BURHAN

Résumé : Les transformations dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
Les transformations dans le plan	Semestre 2

Symétries et translation

À retenir : Rappel du collège : trois transformations déjà connues

Au collège, tu as construit des symétriques et des images par translation. Au lycée, chacune de ces transformations reçoit une définition par une égalité de vecteurs : on calcule et on justifie sans mesurer.

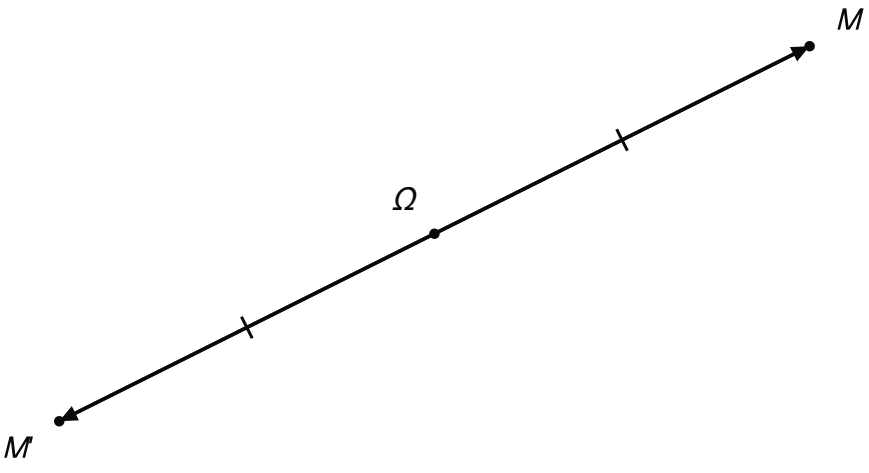
Une transformation associe à chaque point M du plan un seul point M' : son image.

Définition : Symétrie centrale

Soit Ω un point du plan. La **symétrie centrale de centre** Ω, notée S_Ω, associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}.$$

- **Définition affine** : $M' = S_\Omega(M)$ si et seulement si Ω est le milieu du segment $[MM']$.
- Le centre est sa propre image : $S_\Omega(\Omega) = \Omega$.



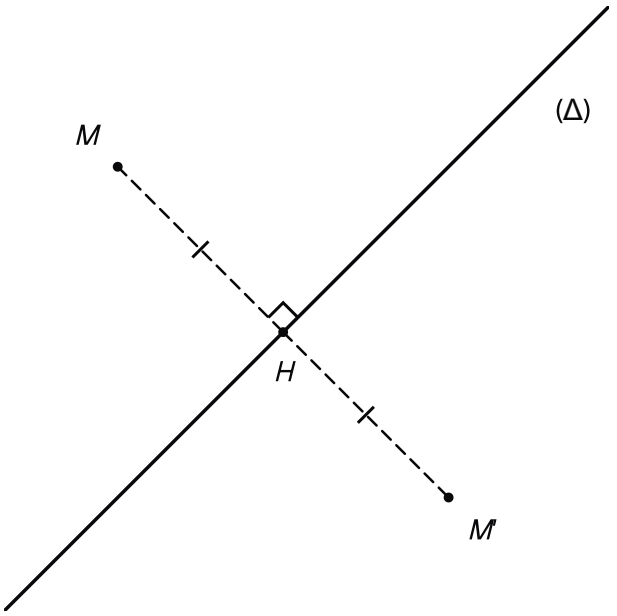
Le centre Ω au milieu de [MM'] : deux flèches de même longueur partent de Ω en sens opposés.

Définition : Symétrie axiale

Soit (Δ) une droite du plan. La **symétrie axiale d'axe** (Δ), notée $S_{(\Delta)}$, associe à chaque point M du plan le point M' défini ainsi :

- si M appartient à (Δ), alors $M' = M$;
- si M n'appartient pas à (Δ), alors M' est le point tel que (Δ) soit la **médiatrice** du segment $[MM']$.

Forme vectorielle : si H est le point d'intersection de (Δ) et de la perpendiculaire à (Δ) passant par M, alors M' est le point tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.



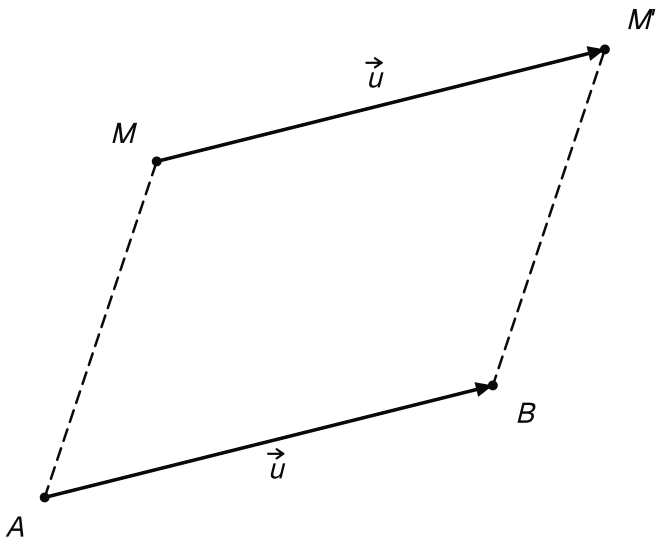
Un axe (Δ) oblique : M et son symétrique M' sont de part et d'autre, à égale distance du point H de l'axe.

Définition : Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur. La **translation de vecteur** $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

- **Définition affine** : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $M' = t_{\vec{u}}(M)$ si et seulement si $ABM'M$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- La translation de vecteur nul associe à chaque point le point lui-même.



Quand le vecteur u est le vecteur AB, le point M et son image M' forment avec A et B le parallélogramme ABM'M.

Exemple

Énoncé. Le point K est le milieu du segment $[EF]$. Quelles transformations envoient E sur F ?

Symétrie. K est le milieu de $[EF]$: d'après la définition affine, $F = S_K(E)$, et aussi $E = S_K(F)$. En vecteurs, $\overrightarrow{KF} = -\overrightarrow{KE}$.

Translation. Comme K est le milieu de $[EF]$, on a aussi $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{EK}$. D'après la définition de la translation, celle de vecteur $2\,\overrightarrow{EK}$ envoie E sur F.

Exemple

Énoncé. (Δ) est une droite, P un point de (Δ) et Q un point qui n'est pas sur (Δ). Que dire des images de P et de Q par $S_{(\Delta)}$?

Point de l'axe. P appartient à (Δ) : d'après la définition, $S_{(\Delta)}(P) = P$.

Point hors de l'axe. Pour $Q' = S_{(\Delta)}(Q)$, la droite (Δ) est la médiatrice de $[QQ']$. Le point P est sur cette médiatrice, donc il est à égale distance de Q et de Q' : $PQ' = PQ$.

L'homothétie

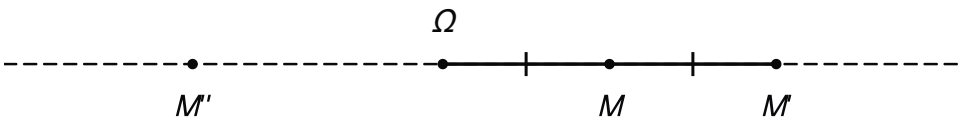
Définition : Homothétie

Soit Ω un point du plan et k un réel **non nul**. L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

- Le centre est sa propre image, et les points Ω, M et M' sont alignés.

- Si $k > 0$, le point M' appartient à la demi-droite $[\Omega M)$; si $k < 0$, il appartient à la demi-droite opposée. Dans les deux cas, $\Omega M' = |k|\,\Omega M$.
- L'homothétie de rapport 1 associe à chaque point le point lui-même ; l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω.



Deux images du même point M : M' du côté de M pour un rapport positif (ici 2), M'' de l'autre côté de Ω pour un rapport négatif (ici moins un et demi).

Méthode : placer l'image d'un point par une homothétie

1. **Trace** la droite qui joint le centre Ω au point M : l'image M' est sur cette droite.
2. **Regarde le signe** de k. Positif : M' est du même côté que M par rapport à Ω. Négatif : il est de l'autre côté.
3. **Reporte** la longueur $\Omega M' = |k|\,\Omega M$ à partir de Ω.
4. **Vérifie** sur ta figure que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

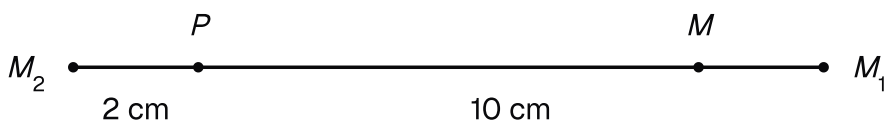
Exemple

Énoncé. Deux points P et M vérifient $PM = 8$ cm. Place l'image M_1 de M par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{5}{4}$. Place ensuite son image M_2 par l'homothétie de centre P et de rapport $-\frac{1}{4}$.

Rapport positif. M_1 est sur la demi-droite $[PM)$, à la distance $PM_1 = \frac{5}{4} \times 8 = 10$ cm de P.

Rapport négatif. M_2 est sur la demi-droite opposée, à la distance $PM_2 = \left|-\frac{1}{4}\right| \times 8 = 2$ cm de P.

Contrôle. P est entre M_1 et M_2, donc $M_1M_2 = 10 + 2 = 12$ cm.



M1 à 10 cm de P du côté de M, M2 à 2 cm de l'autre côté : P sépare les deux images.

Attention : Rapport négatif : l'image change de côté

Prends l'homothétie de centre Ω et de rapport -4. L'image M' d'un point M n'est pas sur la demi-droite $[\Omega M)$: le centre Ω se trouve entre M et M', avec $\Omega M' = 4\,\Omega M$.

Retiens : le signe de k donne le côté, la valeur absolue $|k|$ donne la distance.

Attention : Ne pas échanger le point et son image

Un énoncé donne $\overrightarrow{\Omega A} = 3\,\overrightarrow{\Omega A'}$, où A' est l'image de A. Le rapport n'est pas 3.

Divise les deux membres par 3 :

$$\overrightarrow{\Omega A'} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{\Omega A}.$$

Le rapport vaut donc $\frac{1}{3}$. Dans la définition, le vecteur qui mène à l'image est seul dans le premier membre.

Reconnaître une translation ou une homothétie

Propriété : Propriété caractéristique de la translation

Soit f une transformation qui associe à chaque point M du plan un point $M' = f(M)$. Alors f est une translation si et seulement si, **pour tous points** M et N d'images M' et N',

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

Propriété : Propriété caractéristique de l'homothétie

Soit k un réel non nul, et f une transformation qui associe à chaque point M du plan un point $M' = f(M)$.

- Si f est une homothétie de rapport k, alors, **pour tous points** M et N d'images M' et N', $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.
- Réciproquement, si $k \neq 1$ et si $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N, alors f est une homothétie de rapport k.

Cas de la symétrie centrale ($k = -1$) : f est une symétrie centrale si et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N.

Méthode : reconnaître une transformation

1. **Isole** le vecteur qui contient l'image : $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{\Omega M'}$ ou $\overrightarrow{M'N'}$.
2. **Translation** : tu obtiens $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ pour chaque point, ou $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points.

3. **Homothétie** : tu obtiens $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ pour chaque point, ou $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points, avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$.
4. **Cas** $k = -1$: c'est une symétrie centrale.
5. **Conclus** en nommant la transformation et ses éléments.

Méthode : trouver le centre et le rapport

Tu sais que f est une homothétie. Tu connais deux points A et B, distincts du centre, et leurs images A' et B'.

1. **Rapport** : écris $\overrightarrow{A'B'}$ sous la forme $k\,\overrightarrow{AB}$.
2. **Contrôle** que $k \neq 1$. Avec $k = 1$, chaque point serait sa propre image.
3. **Centre** : il est sur (AA') et sur (BB'). Si ces droites sont distinctes, c'est leur point commun. Sinon, place-le par $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}$.
4. **Vérifie** que $\overrightarrow{\Omega A'} = k\,\overrightarrow{\Omega A}$.

Exemple

Énoncé. Une homothétie f envoie E sur E' et F sur F', avec $\overrightarrow{E'F'} = -3\,\overrightarrow{EF}$ et $E \neq F$. Trouve son rapport, puis place son centre Ω.

Rapport. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, le rapport vaut -3.

Centre. Le rapport est différent de 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E\Omega} &= \frac{1}{1-(-3)}\,\overrightarrow{EE'} \\ &= \frac{1}{4}\,\overrightarrow{EE'}.\end{aligned}$$

Le centre est sur $[EE']$, au quart en partant de E.

Contrôle. $\overrightarrow{\Omega E'} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{EE'}$ et $\overrightarrow{\Omega E} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{EE'}$, donc $\overrightarrow{\Omega E'} = -3\,\overrightarrow{\Omega E}$.

Remarque : Coefficient égal à 1

Si tu trouves $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N, la propriété caractéristique de la translation conclut : f est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{AA'}$, quel que soit le point A choisi.

Coefficient de colinéarité, milieu, alignement, parallélisme

Propriété : Conservation du coefficient de colinéarité

Soit f une translation, une symétrie centrale ou une homothétie. Soit A, B, C, D quatre points d'images A', B', C', D', et α un réel. Si

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB},$$

alors

$$\overrightarrow{C'D'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}.$$

On dit que f **conserve le coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.

Propriété : Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme

Soit f une translation, une symétrie centrale ou une homothétie, et notons M' l'image d'un point M.

- Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- Si A, B et C sont alignés, alors A', B' et C' sont alignés.
- Si $A \neq B$, $C \neq D$ et si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

Méthode : transporter une propriété par une transformation

1. **Cherche** la transformation qui envoie les points connus sur les points de la question.
2. **Écris** la propriété de départ : une égalité $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, un milieu, un alignement ou un parallélisme.
3. **Applique** la conservation, en nommant la transformation et ses éléments.
4. **Rédige** la conclusion sur les images, puis relis-la sur ta figure.

Exemple

Énoncé. Trois points R, S, T vérifient $\overrightarrow{RT} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{RS}$. Leurs images par une translation $t_{\vec{u}}$ sont R', S', T'. Où se trouve T' ?

Transport. La translation $t_{\vec{u}}$ conserve le coefficient de colinéarité :

$$\overrightarrow{R'T'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{R'S'}.$$

Conclusion. Les points R', S' et T' sont alignés. Le point T' est sur le segment $[R'S']$, aux deux cinquièmes en partant de R'.

Exemple

Énoncé. I est le milieu de $[EF]$, et $EF = 3$ cm. On note E', F', I' les images de E, F, I par l'homothétie de centre P et de rapport 4.

Milieu. D'après la conservation du milieu, I' est le milieu de $[E'F']$.

Longueurs. D'après la propriété des distances pour une homothétie, les distances sont multipliées par 4 : $E'F' = 12$ cm, puis $E'I' = 6$ cm.

Distances

Propriété : Distances : translation, symétrie centrale, homothétie

Soit M et N deux points du plan, d'images M' et N'.

- Par une translation ou par une symétrie centrale, $M'N' = MN$: ces transformations **conservent les distances**.
- Par une homothétie de rapport k, $M'N' = |k|\,MN$: les distances sont **multipliées par** $|k|$.

Propriété : Symétrie axiale : distances et coefficient de colinéarité

Soit (Δ) une droite et $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ). Pour tous points A, B, C, D d'images A', B', C', D' :

- $A'B' = AB$: la symétrie axiale **conserve les distances** ;
- si $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$: elle **conserve le coefficient de colinéarité**.

Elle conserve donc aussi le milieu, l'alignement et le parallélisme, par le même raisonnement que pour les autres transformations ; pour le parallélisme, $A' \neq B'$ car $A'B' = AB$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple

Énoncé. Un segment $[UV]$ mesure 6 cm. Calcule la longueur de son image par l'homothétie de centre P et de rapport $-\dfrac{5}{2}$. Fais de même pour une translation.

Homothétie. Les distances sont multipliées par $\left|-\dfrac{5}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$, donc $U'V' = \dfrac{5}{2} \times 6 = 15$ cm.

Translation. Elle conserve les distances : l'image mesure 6 cm.

Attention : Longueur : la valeur absolue du rapport

Une distance n'est jamais négative. Avec le rapport $-\frac{5}{2}$, écrire $U'V' = -15$ cm n'a aucun sens.

Le signe du rapport agit sur le vecteur : $\overrightarrow{U'V'} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{UV}$. Pour la longueur, prends la valeur absolue du rapport.

Attention : Symétrie axiale : pas de parallèle en général

Une symétrie axiale conserve les longueurs, mais pas les vecteurs. Prends une droite (d) qui coupe l'axe (Δ) en un point I, sans être confondue avec l'axe ni perpendiculaire à lui.

Son image passe aussi par I, car I est sa propre image. Les deux droites sont distinctes et se coupent en I : elles ne sont pas parallèles.

Images de droites, de cercles et d'angles

Propriété : Images d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite

Soit f une translation, une symétrie (centrale ou axiale) ou une homothétie, et A et B deux points distincts d'images A' et B'.

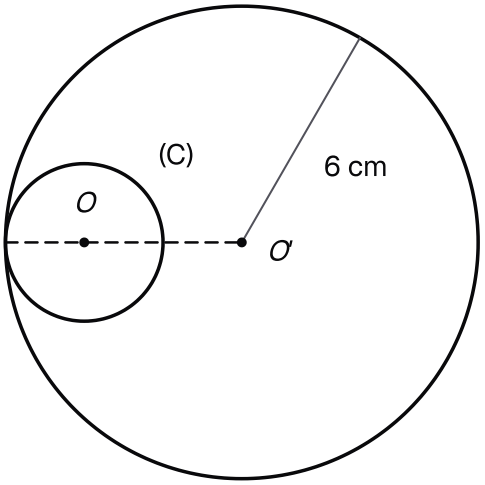
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

Par une translation ou une homothétie, l'image d'une droite est une droite **parallèle** à celle-ci.

Propriété : Image d'un cercle

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon r, et O' l'image de O.

- Par une translation ou une symétrie (centrale ou axiale), l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O' et de **même rayon** r.
- Par une homothétie de rapport k, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O' et de rayon $|k|\,r$.



Exemple avec un rapport égal à 3 : le cercle (C) de centre O et son image, de centre O' et de rayon triple.

Propriété : Conservation des angles

Les translations, les symétries (centrales ou axiales) et les homothéties **conservent les mesures des angles géométriques** : si A, B, C sont trois points tels que $B \neq A$ et $B \neq C$, d'images A', B', C', alors

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

L'image d'un angle est un angle de même mesure.

Remarque

Ce résultat est admis.

Méthode : construire l'image d'une droite ou d'un cercle

1. **Droite** : construis les images de deux de ses points et joins-les. Par une translation ou une homothétie, une seule image suffit : trace par elle la parallèle à la droite de départ.
2. **Cercle** : construis l'image de son centre, puis calcule le nouveau rayon. Il reste le même par une translation ou une symétrie. Il est multiplié par $|k|$ par une homothétie de rapport k.
3. **Segment ou demi-droite** : place l'image de chaque extrémité. Pour une demi-droite, prends son origine et un autre de ses points.
4. **Point d'intersection** : si un point est commun à deux droites sécantes, son image est commune à leurs images. Trace ces deux droites images : leur point commun est l'image cherchée.

Exemple

Énoncé. Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre J et pour rayon 5 cm. Décris son image par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{2}{5}$.

Centre. D'après la définition de l'homothétie, c'est le point J' tel que

$$\overrightarrow{PJ'} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PJ}.$$

Rayon. $\frac{2}{5} \times 5 = 2$. L'image est le cercle de centre J' et de rayon 2 cm.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle EFG, l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 70 degrés. Une homothétie de rapport -3 envoie E, F, G sur E', F', G'.

Angle. D'après la conservation des angles, $\widehat{E'F'G'}$ mesure aussi 70 degrés.

Côtés. Les longueurs, elles, sont multipliées par 3. Par exemple, $E'F' = 3\,EF$.

Figures isométriques, figures semblables

Définition **: Figures isométriques, figures semblables**

- Deux figures sont **isométriques** si l'une est l'image de l'autre par une translation, une symétrie (centrale ou axiale), ou par plusieurs de ces transformations appliquées successivement.
- Deux figures sont **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une homothétie, ou par des homothéties, des translations et des symétries appliquées successivement.

Deux figures isométriques ont les mêmes longueurs et les mêmes angles. Deux figures semblables ont les mêmes angles, et leurs longueurs sont proportionnelles.

Méthode **: longueurs, figures isométriques ou semblables**

1. **Nomme** la transformation qui envoie une figure sur l'autre, ou celles que l'on applique successivement.
2. **Longueurs** : égales par une translation ou une symétrie. Une homothétie de rapport k les multiplie par $|k|$.
3. **Angles** : toujours égaux.
4. **Conclus** : si seules des translations et des symétries interviennent, les deux figures sont isométriques. Dès qu'une homothétie intervient, elles sont semblables.

Exemple

Énoncé. Un triangle a des côtés de 4 cm, 5 cm et 7 cm. On lui applique une homothétie de rapport 3, puis une translation.

Longueurs. L'homothétie les multiplie par 3 : 12 cm, 15 cm et 21 cm. La translation les conserve.

Conclusion. Le triangle final est semblable au premier : mêmes angles, longueurs proportionnelles.

Attention : Semblables, pas forcément isométriques

Des angles égaux ne suffisent pas pour parler de figures isométriques. Le triangle de côtés 4, 5, 7 et son image de côtés 12, 15, 21 ont les mêmes angles.

Pourtant, leurs longueurs diffèrent : ils ne sont pas isométriques. Pour conclure à des figures isométriques, compare aussi les longueurs.

Quelle transformation conserve quoi ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Construire une image** : la définition de la transformation.
- **Reconnaître une transformation** : une propriété caractéristique.
- **Trouver un centre et un rapport** : l'égalité $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, puis les droites (AA') et (BB').
- **Prouver un alignement, un parallélisme, un milieu** : la conservation du coefficient de colinéarité.
- **Calculer une longueur** : conservée, ou multipliée par $|k|$.
- **Décrire l'image d'une droite ou d'un cercle** : deux points, ou le centre et le rayon.
- **Comparer deux figures** : isométriques ou semblables.

Symétrie centrale

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$$

Translation

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Homothétie de rapport k non nul

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Propriété caractéristique de la translation, pour tous M et N

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Propriété caractéristique de l'homothétie de rapport k différent de 0 et de 1, pour tous M et N

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$$

Centre d'une homothétie de rapport k différent de 1

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}$$

Distances par une homothétie de rapport k

$$M'N' = |k|\,MN$$

Rayon de l'image d'un cercle par une homothétie de rapport k

$$r' = |k|\,r$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, chaque conclusion cite la transformation avec ses éléments, puis la propriété employée. Écris par exemple : « par l'homothétie de centre P et de rapport 3, qui multiplie les distances par 3 ».

Quand le signe du rapport compte, annonce les deux cas. Une figure soignée guide le raisonnement, mais elle ne remplace pas la justification.