BURHAN

Les transformations dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

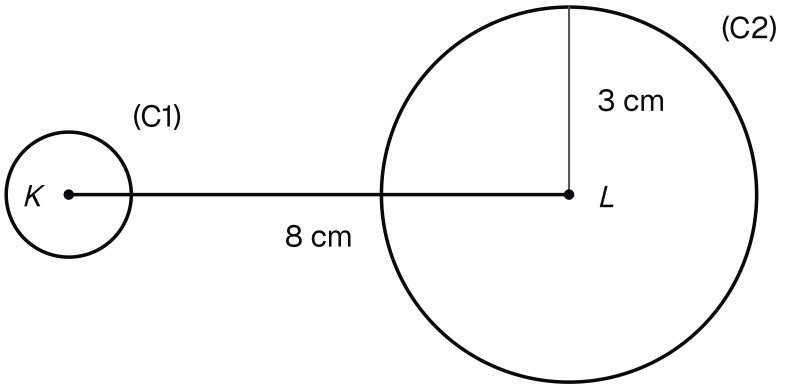
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les transformations dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 — 6 pts

Deux cercles et deux homothéties

Sur ton cahier, trace deux points K et L tels que $KL = 8$ cm. Le cercle $(\mathcal{C}_1)$ a pour centre K et pour rayon 1 cm ; le cercle $(\mathcal{C}_2)$ a pour centre L et pour rayon 3 cm.



Les deux cercles de l'énoncé : (C1) de centre K et de rayon 1 cm, (C2) de centre L et de rayon 3 cm, avec KL = 8 cm.

1. — 1 pts

On cherche une homothétie h_1, de rapport k positif, qui envoie $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$. Écris la relation entre les deux rayons et k, puis déduis-en k. Quelle est l'image de K par h_1 ?

INDICE

Outil : l'image d'un cercle par une homothétie : regarde d'abord le rayon, puis le centre.

2. — 1,5 pts

Le centre P de h_1 vérifie donc $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PK}$. À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{KP}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$. Déduis-en la position de P et la distance KP.

INDICE

Début : écris $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KL}$ et remplace dans l'égalité. **Ensuite :** isole $\overrightarrow{PK}$, puis change de sens.

3. — 0,5 pts

Contrôle ton résultat : calcule PL à partir de la position de P, puis à partir du rapport de h_1.

INDICE

Outil : d'une part, K est entre P et L ; d'autre part, $PL = |k|\,PK$ d'après la définition de l'homothétie.

4. 1,5 pts

L'homothétie h_2 de centre Q et de rapport -3 envoie elle aussi K sur L, donc $\overrightarrow{QL} = -3\,\overrightarrow{QK}$. En procédant comme à la question 2, exprime $\overrightarrow{KQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$, puis calcule KQ. Vérifie que h_2 envoie $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

INDICE

Début : la relation de Chasles donne $\overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KL} = -3\,\overrightarrow{QK}$. **Point délicat :** pour le rayon, c'est la valeur absolue du rapport qui compte.

5. 1,5 pts

Une droite passant par K coupe $(\mathcal{C}_1)$ en A et B. On note A' et B' leurs images par h_2. Justifie que L est le milieu de $[A'B']$ et que A' et B' sont sur $(\mathcal{C}_2)$. Déduis-en la longueur de $[A'B']$.

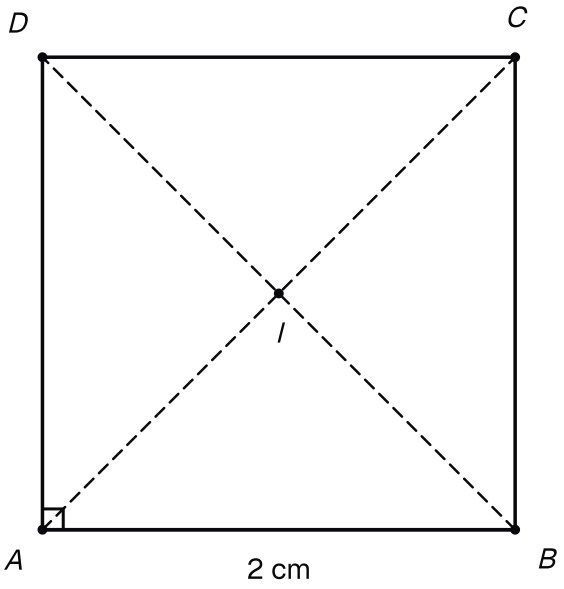
INDICE

Début : $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_1)$, donc K en est le milieu. **Outils :** la conservation du milieu, puis l'image d'un cercle par une homothétie.

Exercice 2 7 pts

Un carré agrandi, puis déplacé

Trace un carré $ABCD$ de côté 2 cm, ses sommets nommés dans cet ordre. Ses diagonales se coupent en I. On note h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$, et B', C', D', I' les images de B, C, D, I par h.



Le carré ABCD de côté 2 cm et le point I où se coupent ses diagonales.

1. 1 pts

Construis B' et D', puis calcule AB' et AD'.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie. Le rapport est positif : précise la demi-droite, puis la distance.

2. 1,5 pts

Écris l'égalité vectorielle qui lie $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{BC}$. Déduis-en que les droites $(B'C')$ et (BC) sont parallèles, puis calcule $B'C'$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de l'homothétie, appliquée à B et C. **Ensuite :** deux vecteurs colinéaires et non nuls donnent des droites parallèles.

3. 1,5 pts

Justifie que les quatre côtés de $AB'C'D'$ mesurent 3 cm et que l'angle $\widehat{D'AB'}$ est droit. Déduis-en la nature de $AB'C'D'$.

INDICE

Outils : les distances sont multipliées par $\frac{3}{2}$; le centre A est sa propre image et les angles sont conservés. **Rappel du collège :** un losange qui a un angle droit est un carré.

4. 1,5 pts

Le point I est le milieu de $[AC]$. Justifie que I' est le centre du carré $AB'C'D'$. Déduis-en que I' est sur la droite (AC).

INDICE

Outil : la conservation du milieu par h ; le centre d'un carré est le milieu de ses diagonales. Pour l'alignement, pense au centre, au point et à son image.

5. 1,5 pts

Le quadrilatère $EFGH$ est l'image de $AB'C'D'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Donne la longueur de ses côtés. Est-il isométrique à $AB'C'D'$? Semblable à $ABCD$? Isométrique à $ABCD$?

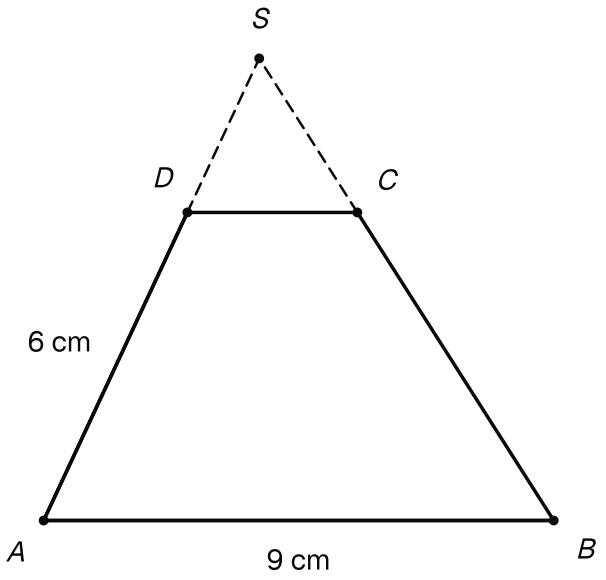
INDICE

Outils : la conservation des distances par une translation, puis la définition des figures isométriques et des figures semblables. **Point délicat :** des figures semblables ne sont pas forcément isométriques.

Exercice 3 7 pts

Un trapèze et ses côtés non parallèles

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, tel que $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, avec $AB = 9$ cm et $AD = 6$ cm. Les droites (AD) et (BC) se coupent en S. On admet qu'il existe une homothétie h de centre S telle que $h(A) = D$.



Le trapèze ABCD, de bases [AB] et [DC], et le point S où se rencontrent les droites (AD) et (BC).

1. 1,5 pts

Justifie que l'image de la droite (AB) par h est la droite (DC), puis que l'image de la droite (BC) est la droite (BC) elle-même. Déduis-en que $h(B) = C$.

INDICE

Outil : par une homothétie, l'image d'une droite est la parallèle qui passe par l'image d'un de ses points. **Ensuite :** B est sur (AB) et sur (BC) ; où se trouve son image ?

2. 1,5 pts

Déduis-en le rapport k de h, exprime $\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\overrightarrow{SA}$, puis calcule DC.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de l'homothétie, avec les images de A et B. **Ensuite :** la définition de l'homothétie, appliquée au point A ; pour DC, les distances sont multipliées par $|k|$.

3. 1,5 pts

Situe D par rapport au segment $[SA]$. Sachant que $AD = 6$ cm, calcule SA puis SD.

INDICE

Début : le coefficient $\frac{1}{3}$ est entre 0 et 1. **Ensuite :** écris $AD = SA - SD$ avec $SD = \frac{1}{3}\,SA$.

4. 1,5 pts

On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$. Détermine $h(I)$. Déduis-en que la droite (IJ) passe par S.

INDICE

Outil : la conservation du milieu par h, puis l'alignement du centre, d'un point et de son image.

5. 1 pts

L'angle $\widehat{SAB}$ mesure 65 degrés. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{SDC}$? Justifie.

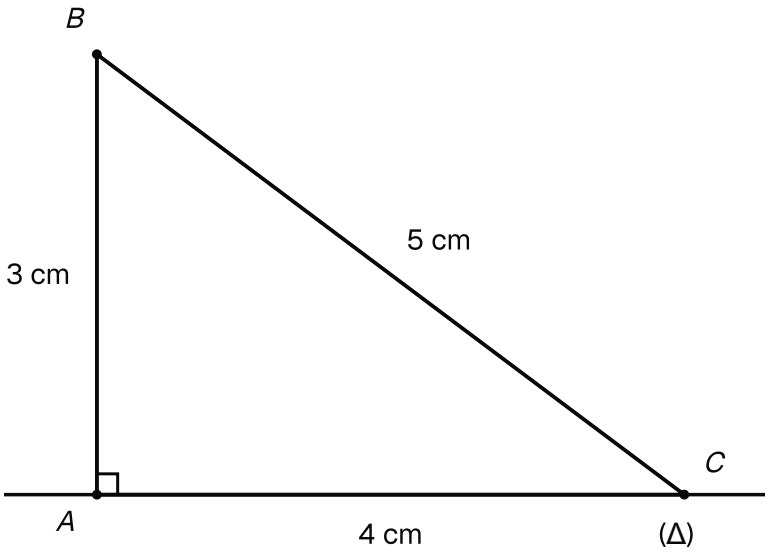
INDICE

Outil : cherche les images de S, A et B par h, puis utilise la conservation des angles.

Exercice 4 7 pts

Un triangle rectangle et deux symétries

Trace un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm. On note (Δ) la droite (AC), et B_1 l'image de B par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.



Le triangle ABC rectangle en A, de côtés 3, 4 et 5 cm, et l'axe (Δ) porté par le côté [AC].

1. 1 pts

Explique pourquoi la perpendiculaire à (Δ) passant par B coupe (Δ) en A. Déduis-en l'égalité vectorielle qui lie $\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{AB}$, puis construis B_1 et calcule BB_1.

INDICE

Outil : la forme vectorielle de la symétrie axiale, avec le point H où la perpendiculaire à l'axe passant par B coupe l'axe. **Ici :** le triangle est rectangle en A.

2. 1,5 pts

Donne les images de A et de C par $S_{(\Delta)}$, puis l'image du triangle ABC. Les triangles ABC et AB_1C sont-ils isométriques ? Calcule B_1C. Déduis-en la nature du triangle BCB_1 et son périmètre.

INDICE

Début : A et C sont sur l'axe. **Outils :** la définition des figures isométriques, puis la conservation des distances par une symétrie axiale.

3. 1,5 pts

On note D l'image de C par la symétrie centrale S_A. Calcule AD, puis justifie que $S_A(B) = B_1$. Déduis-en les longueurs B_1D et DB, puis la nature du quadrilatère BCB_1D.

INDICE

Outil : la définition affine de la symétrie centrale ; la question 1 donne le milieu de $[BB_1]$. **Ensuite :** cherche l'image de $[BC]$ et celle de $[CB_1]$ par S_A, qui conserve les distances.

4. 1,5 pts

Le point E est sur le segment $[BC]$, avec $BE = 2$ cm, de sorte que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. On note $E_1 = S_{(\Delta)}(E)$ et $E_2 = S_A(E)$. Exprime $\overrightarrow{B_1E_1}$ en fonction de $\overrightarrow{B_1C}$, puis $\overrightarrow{B_1E_2}$ en fonction de $\overrightarrow{B_1D}$. Déduis-en les distances B_1E_1 et B_1E_2, puis justifie que E, A et E_2 sont alignés.

INDICE

Outil : les deux symétries conservent le coefficient de colinéarité ; écris d'abord les images de B et de C. **Pour l'alignement :** la définition affine de S_A.

5. 1,5 pts

On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre B et de rayon 2 cm. Détermine son image par $S_{(\Delta)}$, puis son image par S_A. Que remarques-tu ? Déduis-en, sans nouveau calcul, un cercle qui passe par E_1 et par E_2, et compare avec la question 4.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle par une symétrie : cherche l'image du centre, le rayon ne change pas. **Ensuite :** où se trouve le point E par rapport à $(\mathcal{C})$?

Exercice 5 6 pts

Une translation et une homothétie cachées

A et B sont deux points tels que $AB = 3$ cm. À chaque point M du plan, on associe les points M_1 et M_2 définis par les deux égalités :

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA},$$
$$\overrightarrow{MM_2} = 3\,\overrightarrow{MA}.$$

On note f la transformation qui associe M_1 à M, et g celle qui associe M_2 à M.

1. 1 pts

À l'aide de la relation de Chasles, écris $\overrightarrow{MB}$ en passant par A. Déduis-en que f est une translation dont tu donneras le vecteur. Construis $B_1 = f(B)$ et calcule AB_1.

INDICE

Début : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ ne dépend plus de M.

2. 1,5 pts

Exprime $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$. Déduis-en la nature de g, son centre et son rapport. Construis $B_2 = g(B)$ et calcule AB_2.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_2}$, puis remplace $\overrightarrow{MM_2}$. **Point délicat :** $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$.

3. 1,5 pts

Le point E vérifie $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$. On note $E_1 = f(E)$ et $E_2 = g(E)$. Exprime $\overrightarrow{BE_1}$ en fonction de $\overrightarrow{BB_1}$, puis $\overrightarrow{AE_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB_2}$. Déduis-en BE_1 et AE_2.

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité, après avoir écrit les images de A et de B par f, puis par g.

4. 1 pts

Justifie que les points E_1 et E_2 sont sur la droite (AB), de part et d'autre de A. Calcule AE_1, puis E_1E_2. Contrôle AE_1 en exprimant $\overrightarrow{AE_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : les points B_1 et B_2 sont sur (AB), de part et d'autre de A (questions 1 et 2). **Contrôle :** $\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EE_1}$, avec $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{AB}$.

5. 1 pts

On cherche les points M tels que $f(M) = g(M)$. Traduis cette condition par l'égalité $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM_2}$, puis exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Déduis-en qu'un seul point P convient, place-le, et vérifie que $f(P) = g(P) = E$.

INDICE

Début : $f(M) = g(M)$ signifie $M_1 = M_2$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM_2}$. **Ensuite :** remplace par les résultats des questions 1 et 2, puis change de sens le vecteur $\overrightarrow{MA}$.