BURHAN

# Les transformations dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

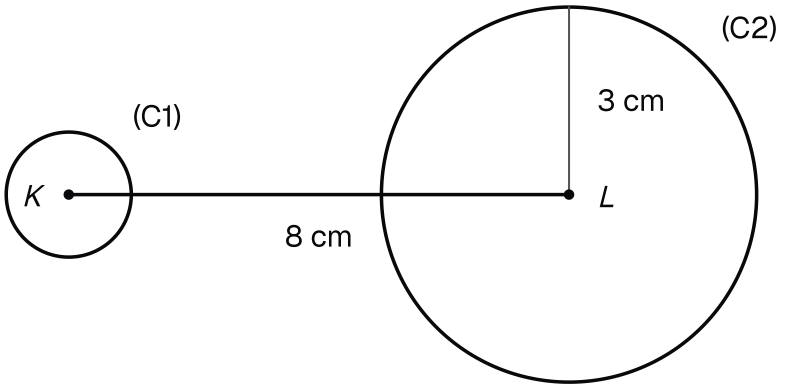
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Les transformations dans le plan | Niveau examen | 5 |

**Exercice 1** 6 pts

## Deux cercles et deux homothéties

Sur ton cahier, trace deux points $K$ et $L$ tels que $KL = 8$ cm. Le cercle $(\mathcal{C}_1)$ a pour centre $K$ et pour rayon $1$ cm ; le cercle $(\mathcal{C}_2)$ a pour centre $L$ et pour rayon $3$ cm.




**Les deux cercles de l'énoncé : (C1) de centre K et de rayon 1 cm, (C2) de centre L et de rayon 3 cm, avec KL = 8 cm.**

**1.** 1 pts

On cherche une homothétie $h_1$, de rapport $k$ positif, qui envoie $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$. Écris la relation entre les deux rayons et $k$, puis déduis-en $k$. Quelle est l'image de $K$ par $h_1$ ?

INDICE

**Outil :** l'image d'un cercle par une homothétie : regarde d'abord le rayon, puis le centre.

CORRIGÉ

**Rapport.** D'après l'image d'un cercle par une homothétie, l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par $h_1$ est un cercle de rayon $|k| \times 1$. Cette image doit être $(\mathcal{C}_2)$, de rayon $3$ cm :

$$|k| \times 1 = 3.$$

Donc $|k| = 3$ et, comme $k > 0$, $k = 3$.

**Image de $K$.** L'image de $(\mathcal{C}_1)$ a pour centre l'image de $K$. Cette image est $(\mathcal{C}_2)$, de centre $L$ : donc $h_1(K) = L$.

**Conclusion.** La relation $|k| \times 1 = 3$ donne $k = 3$, et l'image de $K$ par $h_1$ est $L$.

**2.** 1,5 pts

Le centre $P$ de $h_1$ vérifie donc $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PK}$. À l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{KP}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$. Déduis-en la position de $P$ et la distance $KP$.

INDICE

**Début :** écris $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KL}$ et remplace dans l'égalité. **Ensuite :** isole $\overrightarrow{PK}$, puis change de sens.

CORRIGÉ

**Calcul.** D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KL}$. L'égalité $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PK}$ devient $\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KL} = 3\,\overrightarrow{PK}$, donc $\overrightarrow{KL} = 2\,\overrightarrow{PK}$, puis $\overrightarrow{PK} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{KL}$. En changeant le sens du vecteur :

$$\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{KL}.$$

**Position.** Le coefficient est négatif : $P$ est sur la droite $(KL)$, du côté de $K$ opposé à $L$.

**Distance.** $KP = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$ cm.

**Conclusion.** $\overrightarrow{KP} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{KL}$ : le point $P$ est sur la droite $(KL)$, du côté de $K$ opposé à $L$, et $KP = 4$ cm.

**3.** 0,5 pts

Contrôle ton résultat : calcule $PL$ à partir de la position de $P$, puis à partir du rapport de $h_1$.

INDICE

**Outil :** d'une part, $K$ est entre $P$ et $L$ ; d'autre part, $PL = |k|\,PK$ d'après la définition de l'homothétie.

CORRIGÉ

**Par la position.** D'après la question 2, le point $K$ est entre $P$ et $L$ : $PL = PK + KL = 4 + 8 = 12$ cm.

**Par le rapport.** D'après la définition de l'homothétie $h_1$, de rapport $3$, la distance au centre est multipliée par $3$ : $PL = 3 \times PK = 3 \times 4 = 12$ cm.

**Conclusion.** Les deux calculs donnent $PL = 12$ cm : la position de $P$ trouvée à la question 2 est confirmée.

**4.** 1,5 pts

L'homothétie $h_2$ de centre $Q$ et de rapport $-3$ envoie elle aussi $K$ sur $L$, donc $\overrightarrow{QL} = -3\,\overrightarrow{QK}$. En procédant comme à la question 2, exprime $\overrightarrow{KQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$, puis calcule $KQ$. Vérifie que $h_2$ envoie $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.

INDICE

**Début :** la relation de Chasles donne $\overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KL} = -3\,\overrightarrow{QK}$. **Point délicat :** pour le rayon, c'est la valeur absolue du rapport qui compte.

CORRIGÉ

**Calcul.** D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{QL} = \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KL}$. L'égalité $\overrightarrow{QL} = -3\,\overrightarrow{QK}$ devient $\overrightarrow{QK} + \overrightarrow{KL} = -3\,\overrightarrow{QK}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= -4\,\overrightarrow{QK} \\ &= 4\,\overrightarrow{KQ}.\end{aligned}$$

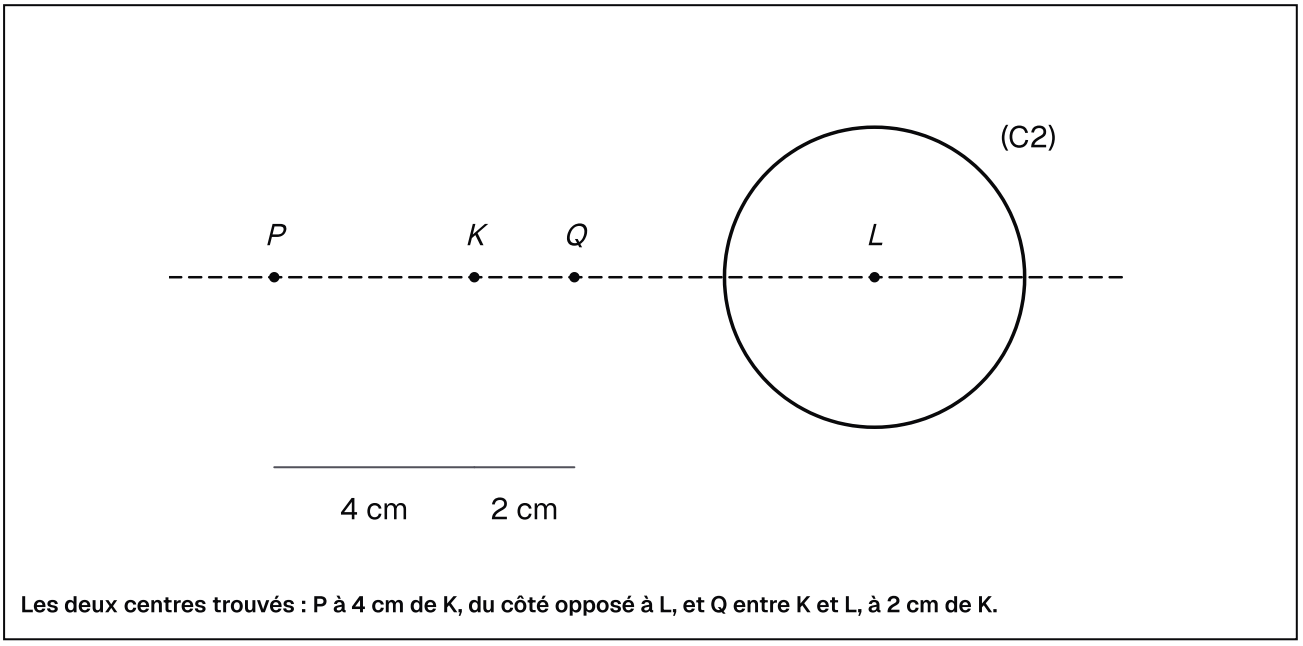
En divisant par $4$ :

$$\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{KL}.$$

**Position et distance.** Le coefficient $\dfrac{1}{4}$ est compris entre $0$ et $1$ : $Q$ est sur le segment $[KL]$, à $KQ = \dfrac{1}{4} \times 8 = 2$ cm de $K$.

**Cercles.** D'après l'image d'un cercle par une homothétie, l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par $h_2$ a pour centre $h_2(K) = L$ et pour rayon $|-3| \times 1 = 3$ cm : c'est le cercle $(\mathcal{C}_2)$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{KQ} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{KL}$ et $KQ = 2$ cm ; l'homothétie $h_2$ envoie bien $(\mathcal{C}_1)$ sur $(\mathcal{C}_2)$.




**Les deux centres trouvés : P à 4 cm de K, du côté opposé à L, et Q entre K et L, à 2 cm de K.**

**5.** 1,5 pts

Une droite passant par $K$ coupe $(\mathcal{C}_1)$ en $A$ et $B$. On note $A'$ et $B'$ leurs images par $h_2$. Justifie que $L$ est le milieu de $[A'B']$ et que $A'$ et $B'$ sont sur $(\mathcal{C}_2)$. Déduis-en la longueur de $[A'B']$.

INDICE

**Début :** $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_1)$, donc $K$ en est le milieu. **Outils :** la conservation du milieu, puis l'image d'un cercle par une homothétie.

CORRIGÉ

**Milieu.** La droite passe par le centre $K$ de $(\mathcal{C}_1)$ : $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C}_1)$, et $K$ est le milieu de $[AB]$. D'après la conservation du milieu par $h_2$, l'image $L$ de $K$ est le milieu de $[A'B']$.

**Sur le cercle.** Les points $A$ et $B$ sont sur $(\mathcal{C}_1)$, donc leurs images $A'$ et $B'$ sont sur l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par $h_2$, qui est $(\mathcal{C}_2)$ d'après la question 4.

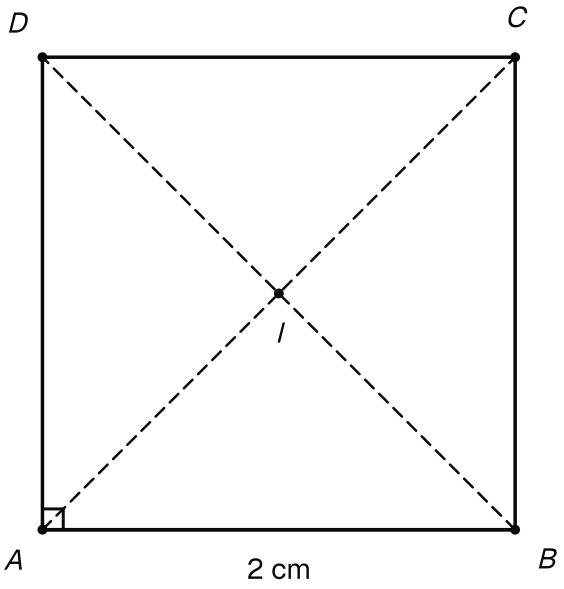
**Longueur.** Les extrémités du segment $[A'B']$ sont sur $(\mathcal{C}_2)$ et son milieu est le centre $L$ : c'est un diamètre de $(\mathcal{C}_2)$. Sa longueur est le double du rayon : $3 \times 2 = 6$ cm.

**Conclusion.** $L$ est le milieu de $[A'B']$, les points $A'$ et $B'$ sont sur $(\mathcal{C}_2)$, et $A'B' = 6$ cm.

## Exercice 2 — 7 pts

### Un carré agrandi, puis déplacé

Trace un carré $ABCD$ de côté $2$ cm, ses sommets nommés dans cet ordre. Ses diagonales se coupent en $I$. On note $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\frac{3}{2}$, et $B'$, $C'$, $D'$, $I'$ les images de $B$, $C$, $D$, $I$ par $h$.




**Le carré ABCD de côté 2 cm et le point I où se coupent ses diagonales.**

#### 1. — 1 pts

Construis $B'$ et $D'$, puis calcule $AB'$ et $AD'$.

INDICE

**Outil :** la définition de l'homothétie. Le rapport est positif : précise la demi-droite, puis la distance.

CORRIGÉ

**Égalités de définition.** D'après la définition de l'homothétie :

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AD'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AD}.$$

**Position.** Le rapport est positif : $B'$ est sur la demi-droite $[AB)$ et $D'$ sur la demi-droite $[AD)$.

**Distances.** $AB' = AD' = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ cm.

**Conclusion.** On place $B'$ sur $[AB)$ et $D'$ sur $[AD)$, à $3$ cm de $A$ : $AB' = AD' = 3$ cm.

**2.** 1,5 pts

Écris l'égalité vectorielle qui lie $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{BC}$. Déduis-en que les droites $(B'C')$ et $(BC)$ sont parallèles, puis calcule $B'C'$.

INDICE

**Outil :** la propriété caractéristique de l'homothétie, appliquée à $B$ et $C$. **Ensuite :** deux vecteurs colinéaires et non nuls donnent des droites parallèles.

CORRIGÉ

**Égalité vectorielle.** $B'$ et $C'$ sont les images de $B$ et $C$ par l'homothétie $h$ de rapport $\frac{3}{2}$. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie :

$$\overrightarrow{B'C'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

**Parallélisme.** Les vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et non nuls : les droites $(B'C')$ et $(BC)$ sont parallèles.

**Longueur.** $B'C' = \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2} \times 2 = 3$ cm.

**Conclusion.** $\overrightarrow{B'C'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, les droites $(B'C')$ et $(BC)$ sont parallèles, et $B'C' = 3$ cm.

**3.** 1,5 pts

Justifie que les quatre côtés de $AB'C'D'$ mesurent $3$ cm et que l'angle $\widehat{D'AB'}$ est droit. Déduis-en la nature de $AB'C'D'$.

INDICE

**Outils :** les distances sont multipliées par $\frac{3}{2}$ ; le centre $A$ est sa propre image et les angles sont conservés. **Rappel du collège :** un losange qui a un angle droit est un carré.

CORRIGÉ

**Côtés.** Le centre est sa propre image : $h(A) = A$. Les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ ont donc pour images $[AB']$, $[B'C']$, $[C'D']$ et $[D'A]$. Par l'homothétie $h$, les distances sont multipliées par $\frac{3}{2}$, et les côtés de $ABCD$ mesurent 2 cm : $AB' = B'C' = C'D' = D'A = 3$ cm.

**Angle.** Comme $h(A) = A$, l'angle $\widehat{DAB}$ a pour image l'angle $\widehat{D'AB'}$. D'après la conservation des angles, $\widehat{D'AB'}$ est droit, comme $\widehat{DAB}$.

**Nature.** $AB'C'D'$ a quatre côtés de même longueur : c'est un losange. Ce losange a un angle droit : c'est un carré.

**Conclusion.** Les quatre côtés de $AB'C'D'$ mesurent $3$ cm, l'angle $\widehat{D'AB'}$ est droit, et $AB'C'D'$ est un carré de côté $3$ cm.

**4.** 1,5 pts

Le point $I$ est le milieu de $[AC]$. Justifie que $I'$ est le centre du carré $AB'C'D'$. Déduis-en que $I'$ est sur la droite $(AC)$.

INDICE

**Outil :** la conservation du milieu par $h$ ; le centre d'un carré est le milieu de ses diagonales. Pour l'alignement, pense au centre, au point et à son image.

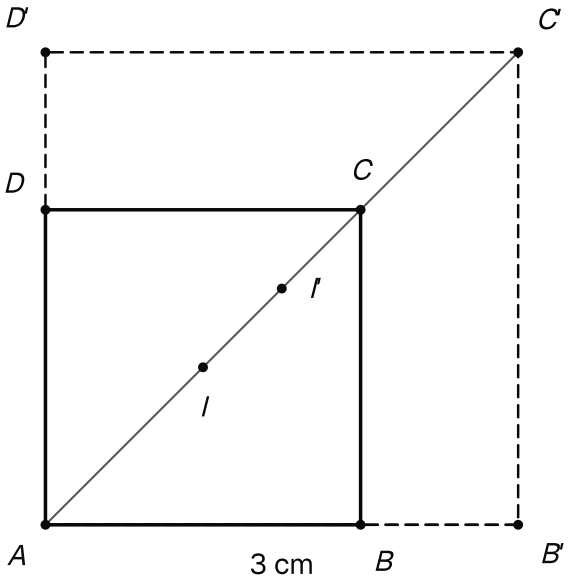
CORRIGÉ

**Milieu.** $h$ envoie $A$ sur $A$ et $C$ sur $C'$. Le point $I$ est le milieu de $[AC]$ : d'après la conservation du milieu par $h$, son image $I'$ est le milieu de $[AC']$.

**Centre du carré.** Le segment $[AC']$ est une diagonale du carré $AB'C'D'$, et le centre d'un carré est le milieu de ses diagonales : $I'$ est le centre de $AB'C'D'$.

**Alignement.** D'après la définition de l'homothétie, le centre $A$, le point $I$ et son image $I'$ sont alignés. Donc $I'$ est sur la droite $(AI)$, qui est la droite $(AC)$.

**Conclusion.** $I'$ est le centre du carré $AB'C'D'$, et il appartient à la droite $(AC)$.




**Le carré ABCD et son agrandissement AB'C'D' depuis le sommet A : I' est le centre du grand carré, sur la diagonale (AC).**

**5.** 1,5 pts

Le quadrilatère $EFGH$ est l'image de $AB'C'D'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Donne la longueur de ses côtés. Est-il isométrique à $AB'C'D'$ ? Semblable à $ABCD$ ? Isométrique à $ABCD$ ?

INDICE

**Outils :** la conservation des distances par une translation, puis la définition des figures isométriques et des figures semblables. **Point délicat :** des figures semblables ne sont pas forcément isométriques.

CORRIGÉ

**Côtés.** Une translation conserve les distances : les côtés de $EFGH$ mesurent $3$ cm, comme ceux de $AB'C'D'$.

**Avec $AB'C'D'$.** $EFGH$ est l'image de $AB'C'D'$ par une translation : d'après la définition des figures isométriques, ces deux figures sont isométriques.

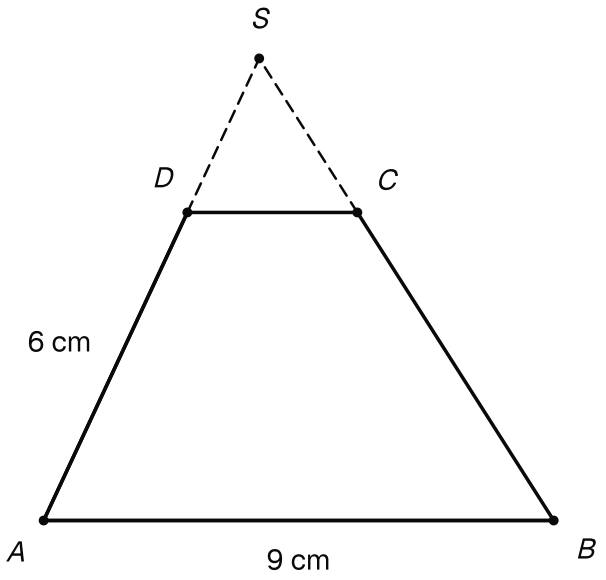
**Avec $ABCD$.** $EFGH$ s'obtient à partir de $ABCD$ par l'homothétie $h$, puis la translation, appliquées successivement : d'après la définition des figures semblables, ces deux figures sont semblables. Elles ne sont pas isométriques, car leurs côtés mesurent $3$ cm et $2$ cm, et $3 \neq 2$.

**Conclusion.** Les côtés de $EFGH$ mesurent $3$ cm. $EFGH$ est isométrique à $AB'C'D'$ et semblable à $ABCD$, mais il n'est pas isométrique à $ABCD$.

**Exercice 3** 7 pts

## Un trapèze et ses côtés non parallèles

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, tel que $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, avec $AB = 9$ cm et $AD = 6$ cm. Les droites $(AD)$ et $(BC)$ se coupent en $S$. On admet qu'il existe une homothétie $h$ de centre $S$ telle que $h(A) = D$.




**Le trapèze ABCD, de bases [AB] et [DC], et le point S où se rencontrent les droites (AD) et (BC).**

**1.** 1,5 pts

Justifie que l'image de la droite $(AB)$ par $h$ est la droite $(DC)$, puis que l'image de la droite $(BC)$ est la droite $(BC)$ elle-même. Déduis-en que $h(B) = C$.

INDICE

**Outil :** par une homothétie, l'image d'une droite est la parallèle qui passe par l'image d'un de ses points. **Ensuite :** $B$ est sur $(AB)$ et sur $(BC)$ ; où se trouve son image ?

CORRIGÉ

**Image de $(AB)$.** D'après l'image d'une droite par une homothétie, l'image de $(AB)$ est la parallèle à $(AB)$ passant par $h(A) = D$. Les bases d'un trapèze sont parallèles : la droite $(DC)$ est parallèle à $(AB)$ et passe par $D$, c'est donc l'image de $(AB)$.

**Image de $(BC)$.** Le centre $S$ est sur $(BC)$, et il est sa propre image. L'image de $(BC)$ est donc la parallèle à $(BC)$ passant par $S$ : c'est $(BC)$ elle-même.

**Image de $B$.** Le point $B$ est commun aux droites $(AB)$ et $(BC)$. Son image $h(B)$ est donc commune à leurs images, $(DC)$ et $(BC)$. Ces deux droites sont distinctes, car $B$ n'est pas sur $(DC)$ : leur seul point commun est $C$. Donc $h(B) = C$.

**Conclusion.** Par $h$, l'image de $(AB)$ est $(DC)$, l'image de $(BC)$ est $(BC)$, et $h(B) = C$.

**2.** 1,5 pts

Déduis-en le rapport $k$ de $h$, exprime $\overrightarrow{SD}$ en fonction de $\overrightarrow{SA}$, puis calcule $DC$.

INDICE

**Outil :** la propriété caractéristique de l'homothétie, avec les images de $A$ et $B$. **Ensuite :** la définition de l'homothétie, appliquée au point $A$ ; pour $DC$, les distances sont multipliées par $|k|$.

CORRIGÉ

**Rapport.** $h$ envoie $A$ sur $D$ et $B$ sur $C$. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, $\overrightarrow{DC} = k\,\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ : $k = \dfrac{1}{3}$.

**Vecteur.** D'après la définition de l'homothétie, appliquée au point $A$ d'image $D$ :

$$\overrightarrow{SD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}.$$

**Base.** Par l'homothétie $h$, les distances sont multipliées par $\dfrac{1}{3}$ : $DC = \dfrac{1}{3} \times 9 = 3$ cm.

**Conclusion.** Le rapport de $h$ est $\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, et la petite base mesure $3$ cm.

**3.** 1,5 pts

Situe $D$ par rapport au segment $[SA]$. Sachant que $AD = 6$ cm, calcule $SA$ puis $SD$.

INDICE

**Début :** le coefficient $\dfrac{1}{3}$ est entre $0$ et $1$. **Ensuite :** écris $AD = SA - SD$ avec $SD = \dfrac{1}{3}\,SA$.

CORRIGÉ

**Position.** D'après la question 2, $\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, avec $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ : $D$ est sur le segment $[SA]$, au tiers en partant de $S$.

**Longueurs.** Le point $D$ est entre $S$ et $A$, et $SD = \dfrac{1}{3}\,SA$ :

$$\begin{aligned} AD &= SA - SD \\ &= SA - \frac{1}{3}\,SA \\ &= \frac{2}{3}\,SA. \end{aligned}$$

Avec $AD = 6$ cm, on obtient $\dfrac{2}{3}\,SA = 6$, donc $SA = 9$ cm, puis $SD = 3$ cm.

**Conclusion.** Le point $D$ est sur le segment $[SA]$, au tiers en partant de $S$ ; $SA = 9$ cm et $SD = 3$ cm.

**4.** 1,5 pts

On note $I$ le milieu de $[AB]$ et $J$ celui de $[DC]$. Détermine $h(I)$. Déduis-en que la droite $(IJ)$ passe par $S$.

INDICE

**Outil :** la conservation du milieu par $h$, puis l'alignement du centre, d'un point et de son image.

CORRIGÉ

**Image de $I$.** $h$ envoie $A$ sur $D$ et $B$ sur $C$. D'après la conservation du milieu par $h$, l'image du milieu $I$ de $[AB]$ est le milieu de $[DC]$ : $h(I) = J$.

**Alignement.** D'après la définition de l'homothétie, le centre $S$, le point $I$ et son image $J$ sont alignés.

**Droite $(IJ)$.** Le point $I$ est sur $(AB)$ et $J$ sur $(DC)$, droites parallèles distinctes : $I \neq J$, donc la droite $(IJ)$ est bien définie, et elle passe par $S$.

**Conclusion.** $h(I) = J$, et la droite $(IJ)$ passe par $S$.

**5.** 1 pts

L'angle $\widehat{SAB}$ mesure $65$ degrés. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{SDC}$ ? Justifie.

INDICE

**Outil :** cherche les images de $S$, $A$ et $B$ par $h$, puis utilise la conservation des angles.

CORRIGÉ

**Images des points.** Par $h$, le centre $S$ est sa propre image, $h(A) = D$, et $h(B) = C$ d'après la question 1. L'image de l'angle $\widehat{SAB}$ est donc l'angle $\widehat{SDC}$.

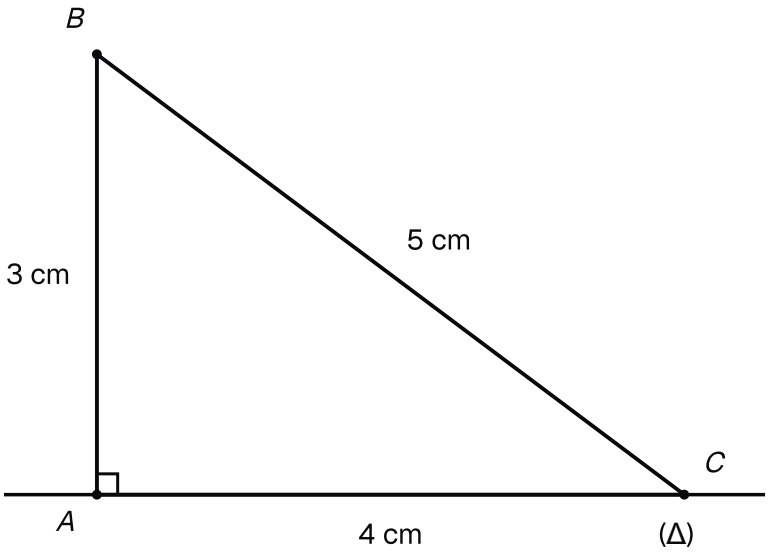
**Conservation.** D'après la conservation des angles par une homothétie, ces deux angles ont la même mesure.

**Conclusion.** L'angle $\widehat{SDC}$ mesure $65$ degrés, comme $\widehat{SAB}$.

**Exercice 4** 7 pts

## Un triangle rectangle et deux symétries

Trace un triangle $ABC$ rectangle en $A$, avec $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm. On note $(\Delta)$ la droite $(AC)$, et $B_1$ l'image de $B$ par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.




**Le triangle ABC rectangle en A, de côtés 3, 4 et 5 cm, et l'axe (Δ) porté par le côté [AC].**

**1.** 1 pts

Explique pourquoi la perpendiculaire à $(\Delta)$ passant par $B$ coupe $(\Delta)$ en $A$. Déduis-en l'égalité vectorielle qui lie $\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{AB}$, puis construis $B_1$ et calcule $BB_1$.

INDICE

**Outil :** la forme vectorielle de la symétrie axiale, avec le point $H$ où la perpendiculaire à l'axe passant par $B$ coupe l'axe. **Ici :** le triangle est rectangle en $A$.

CORRIGÉ

**Pied de la perpendiculaire.** Le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ : la droite $(AB)$ est perpendiculaire à $(AC)$, c'est-à-dire à $(\Delta)$. Elle passe par $B$ : c'est la perpendiculaire à $(\Delta)$ passant par $B$, et elle coupe $(\Delta)$ en $A$.

**Égalité vectorielle.** D'après la forme vectorielle de la symétrie axiale, appliquée avec ce point $A$ :

$$\overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB}.$$

Le point $A$ est donc le milieu de $[BB_1]$ : $B_1$ est sur la droite $(AB)$, de l'autre côté de $A$ par rapport à $B$.

**Longueur.** $AB_1 = AB = 3$ cm et $A$ est entre $B$ et $B_1$, donc $BB_1 = 3 + 3 = 6$ cm.

**Conclusion.** La perpendiculaire à $(\Delta)$ passant par $B$ est $(AB)$, qui coupe $(\Delta)$ en $A$ ; $\overrightarrow{AB_1} = -\overrightarrow{AB}$, et $BB_1 = 6$ cm.

**2.** 1,5 pts

Donne les images de $A$ et de $C$ par $S_{(\Delta)}$, puis l'image du triangle $ABC$. Les triangles $ABC$ et $AB_1C$ sont-ils isométriques ? Calcule $B_1C$. Déduis-en la nature du triangle $BCB_1$ et son périmètre.

INDICE

**Début :** $A$ et $C$ sont sur l'axe. **Outils :** la définition des figures isométriques, puis la conservation des distances par une symétrie axiale.

CORRIGÉ

**Images.** Les points $A$ et $C$ appartiennent à l'axe $(\Delta)$ : $S_{(\Delta)}(A) = A$ et $S_{(\Delta)}(C) = C$. Comme $S_{(\Delta)}(B) = B_1$, l'image du triangle $ABC$ est le triangle $AB_1C$.

**Isométriques.** Le triangle $AB_1C$ est l'image de $ABC$ par une symétrie axiale : d'après la définition des figures isométriques, ces deux triangles sont isométriques.

**Longueur.** Une symétrie axiale conserve les distances : $B_1C = BC = 5$ cm.

**Nature et périmètre.** Dans le triangle $BCB_1$, $CB = CB_1 = 5$ cm : il est isocèle en $C$. Son périmètre vaut $CB + CB_1 + BB_1$, soit $5 + 5 + 6 = 16$ cm.

**Conclusion.** $A$ et $C$ sont leurs propres images, et l'image de $ABC$ est $AB_1C$, triangle isométrique à $ABC$ ; $B_1C = 5$ cm, et $BCB_1$ est isocèle en $C$, de périmètre $16$ cm.

**3.** 1,5 pts

On note $D$ l'image de $C$ par la symétrie centrale $S_A$. Calcule $AD$, puis justifie que $S_A(B) = B_1$. Déduis-en les longueurs $B_1D$ et $DB$, puis la nature du quadrilatère $BCB_1D$.

INDICE

**Outil :** la définition affine de la symétrie centrale ; la question 1 donne le milieu de $[BB_1]$. **Ensuite :** cherche l'image de $[BC]$ et celle de $[CB_1]$ par $S_A$, qui conserve les distances.

CORRIGÉ

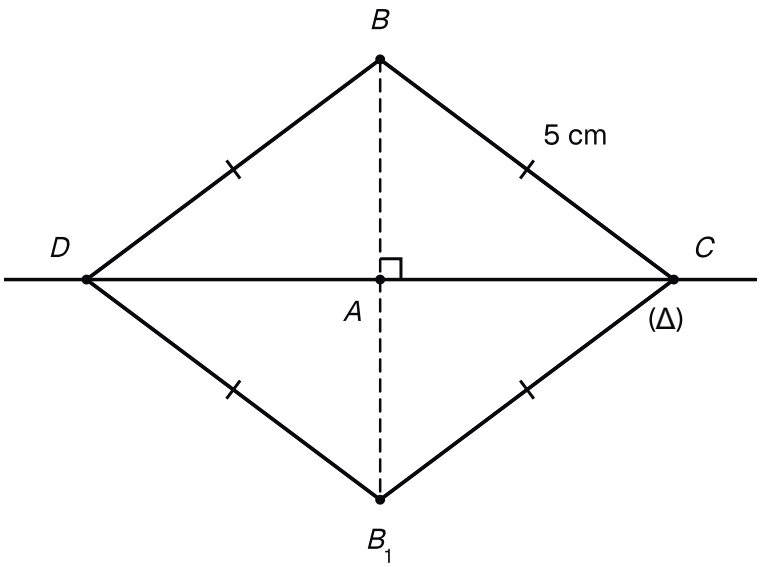
**Image de $C$.** D'après la définition de $S_A$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}$ : $A$ est le milieu de $[CD]$, et $AD = AC = 4$ cm.

**Image de $B$.** D'après la question 1, $A$ est le milieu de $[BB_1]$. D'après la définition affine de la symétrie centrale, $S_A(B) = B_1$, et de même $S_A(B_1) = B$.

**Longueurs.** $S_A$ envoie $B$ sur $B_1$ et $C$ sur $D$ : l'image du segment $[BC]$ est $[B_1D]$. Elle envoie aussi $C$ sur $D$ et $B_1$ sur $B$ : l'image de $[CB_1]$ est $[DB]$. Une symétrie centrale conserve les distances, donc $B_1D = BC = 5$ cm et $DB = CB_1 = 5$ cm.

**Nature.** Avec $BC = CB_1 = 5$ cm (question 2), les quatre côtés du quadrilatère $BCB_1D$ mesurent $5$ cm : c'est un losange.

**Conclusion.** $AD = 4$ cm et $S_A(B) = B_1$ ; $B_1D = DB = 5$ cm, et $BCB_1D$ est un losange de côté $5$ cm.




**Le losange BCB1D, centré en A : B1 est sous l'axe (Δ), D à gauche de A, et ses quatre côtés mesurent 5 cm.**

**4.** 1,5 pts

Le point $E$ est sur le segment $[BC]$, avec $BE = 2$ cm, de sorte que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. On note $E_1 = S_{(\Delta)}(E)$ et $E_2 = S_A(E)$. Exprime $\overrightarrow{B_1E_1}$ en fonction de $\overrightarrow{B_1C}$, puis $\overrightarrow{B_1E_2}$ en fonction de $\overrightarrow{B_1D}$. Déduis-en les distances $B_1E_1$ et $B_1E_2$, puis justifie que $E$, $A$ et $E_2$ sont alignés.

INDICE

**Outil :** les deux symétries conservent le coefficient de colinéarité ; écris d'abord les images de $B$ et de $C$. **Pour l'alignement :** la définition affine de $S_A$.

CORRIGÉ

**Par $S_{(\Delta)}$.** Cette symétrie envoie $B$ sur $B_1$, $C$ sur $C$ et $E$ sur $E_1$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ donne :

$$\overrightarrow{B_1E_1} = \frac{2}{5}\overrightarrow{B_1C}.$$

Donc $E_1$ est sur $[B_1C]$, et $B_1E_1 = \frac{2}{5} \times 5 = 2$ cm.

**Par $S_A$.** Cette symétrie envoie $B$ sur $B_1$, $C$ sur $D$ et $E$ sur $E_2$. Par la même conservation :

$$\overrightarrow{B_1E_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{B_1D}.$$

Donc $E_2$ est sur $[B_1D]$, et $B_1E_2 = \frac{2}{5} \times 5 = 2$ cm.

**Alignement.** $E_2 = S_A(E)$ : d'après la définition affine de la symétrie centrale, $A$ est le milieu de $[EE_2]$. Les points $E$, $A$ et $E_2$ sont donc alignés.

**Conclusion.** $\overrightarrow{B_1E_1} = \frac{2}{5}\overrightarrow{B_1C}$ et $\overrightarrow{B_1E_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{B_1D}$ ; $B_1E_1 = B_1E_2 = 2$ cm, et les points $E$, $A$, $E_2$ sont alignés.

**5.** 1,5 pts

On note $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $B$ et de rayon $2$ cm. Détermine son image par $S_{(\Delta)}$, puis son image par $S_A$. Que remarques-tu ? Déduis-en, sans nouveau calcul, un cercle qui passe par $E_1$ et par $E_2$, et compare avec la question 4.

INDICE

**Outil :** l'image d'un cercle par une symétrie : cherche l'image du centre, le rayon ne change pas. **Ensuite :** où se trouve le point $E$ par rapport à $(\mathcal{C})$ ?

CORRIGÉ

**Par $S_{(\Delta)}$.** D'après l'image d'un cercle par une symétrie axiale, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $S_{(\Delta)}(B) = B_1$ et de rayon $2$ cm.

**Par $S_A$.** D'après l'image d'un cercle par une symétrie centrale, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $S_A(B) = B_1$ et de rayon $2$ cm.

**Remarque.** Les deux symétries sont différentes, mais elles envoient $(\mathcal{C})$ sur un même cercle, noté $(\mathcal{C}')$.

**Cercle passant par $E_1$ et $E_2$.** $BE = 2$ cm : le point $E$ est sur $(\mathcal{C})$. Son image $E_1$ par $S_{(\Delta)}$ et son image $E_2$ par $S_A$ sont donc sur $(\mathcal{C}')$.

**Conclusion.** Les deux symétries envoient $(\mathcal{C})$ sur le même cercle $(\mathcal{C}')$, de centre $B_1$ et de rayon $2$ cm, qui passe par $E_1$ et par $E_2$. On retrouve $B_1E_1 = B_1E_2 = 2$ cm, comme à la question 4.

**Exercice 5** 6 pts

## Une translation et une homothétie cachées

$A$ et $B$ sont deux points tels que $AB = 3$ cm. À chaque point $M$ du plan, on associe les points $M_1$ et $M_2$ définis par les deux égalités :

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA},$$
$$\overrightarrow{MM_2} = 3\,\overrightarrow{MA}.$$

On note $f$ la transformation qui associe $M_1$ à $M$, et $g$ celle qui associe $M_2$ à $M$.

**1.** 1 pts

À l'aide de la relation de Chasles, écris $\overrightarrow{MB}$ en passant par $A$. Déduis-en que $f$ est une translation dont tu donneras le vecteur. Construis $B_1 = f(B)$ et calcule $AB_1$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ ne dépend plus de $M$.

CORRIGÉ

**Calcul.** Soit $M$ un point. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA}\\ &= \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

**Nature.** Pour tout point $M$, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB}$ : d'après la définition de la translation, $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. En particulier, $f(A) = B$.

**Image de $B$.** $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB}$ : $B$ est le milieu de $[AB_1]$, donc $AB_1 = 2 \times 3 = 6$ cm.

**Conclusion.** $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et $AB_1 = 6$ cm.

**2.** 1,5 pts

Exprime $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$. Déduis-en la nature de $g$, son centre et son rapport. Construis $B_2 = g(B)$ et calcule $AB_2$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_2}$, puis remplace $\overrightarrow{MM_2}$. **Point délicat :** $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$.

CORRIGÉ

**Calcul.** Soit $M$ un point. D'après la relation de Chasles, puis la définition de $M_2$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_2} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_2} \\ &= \overrightarrow{AM} + 3\,\overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{AM} - 3\,\overrightarrow{AM}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout point $M$ :

$$\overrightarrow{AM_2} = -2\,\overrightarrow{AM}.$$

**Nature.** D'après la définition de l'homothétie, $g$ est l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$. Son centre est sa propre image : $g(A) = A$.

**Image de $B$.** $\overrightarrow{AB_2} = -2\,\overrightarrow{AB}$ : le rapport est négatif, donc $B_2$ est sur la demi-droite opposée à $[AB)$, avec $AB_2 = 2 \times 3 = 6$ cm.

**Conclusion.** $g$ est l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$, et $AB_2 = 6$ cm.




**Sur la droite (AB) : B1 à 6 cm de A du côté de B, B2 à 6 cm de l'autre côté.**

**3.** 1,5 pts

Le point $E$ vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On note $E_1 = f(E)$ et $E_2 = g(E)$. Exprime $\overrightarrow{BE_1}$ en fonction de $\overrightarrow{BB_1}$, puis $\overrightarrow{AE_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB_2}$. Déduis-en $BE_1$ et $AE_2$.

INDICE

**Outil :** la conservation du coefficient de colinéarité, après avoir écrit les images de $A$ et de $B$ par $f$, puis par $g$.

CORRIGÉ

**Par $f$.** La translation $f$ envoie $A$ sur $B$, $B$ sur $B_1$ et $E$ sur $E_1$. Elle conserve le coefficient de colinéarité, donc l'égalité $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donne :

$$\overrightarrow{BE_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}.$$

Comme $BB_1 = AB = 3$ cm, $E_1$ est sur $[BB_1]$ et $BE_1 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ cm.

**Par $g$.** L'homothétie $g$ envoie $A$ sur $A$, $B$ sur $B_2$ et $E$ sur $E_2$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité par une homothétie :

$$\overrightarrow{AE_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB_2}.$$

Donc $E_2$ est sur $[AB_2]$ et $AE_2 = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm.

**Conclusion.** $\overrightarrow{BE_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ et $\overrightarrow{AE_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB_2}$ ; $BE_1 = 2$ cm et $AE_2 = 4$ cm.

**4.** 1 pts

Justifie que les points $E_1$ et $E_2$ sont sur la droite $(AB)$, de part et d'autre de $A$. Calcule $AE_1$, puis $E_1E_2$. Contrôle $AE_1$ en exprimant $\overrightarrow{AE_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

**Outil :** les points $B_1$ et $B_2$ sont sur $(AB)$, de part et d'autre de $A$ (questions 1 et 2). **Contrôle :** $\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EE_1}$, avec $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

**Positions.** $E_1$ est sur $[BB_1]$ et $E_2$ sur $[AB_2]$, deux segments portés par la droite $(AB)$. D'après les questions 1 et 2, $B_1$ est du même côté de $A$ que $B$, et $B_2$ de l'autre côté : $A$ est entre $E_2$ et $E_1$.

**Longueurs.** $B$ est entre $A$ et $E_1$, d'où $AE_1 = AB + BE_1 = 3 + 2 = 5$ cm. Comme $A$ est entre $E_1$ et $E_2$, $E_1E_2 = AE_1 + AE_2 = 5 + 4 = 9$ cm.

**Contrôle.** D'après la relation de Chasles, avec $\overrightarrow{EE_1} = \overrightarrow{AB}$ car $f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE_1} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EE_1} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

D'où $AE_1 = \dfrac{5}{3} \times 3 = 5$ cm.

**Conclusion.** $E_1$ et $E_2$ sont sur la droite $(AB)$, de part et d'autre de $A$ ; $AE_1 = 5$ cm, valeur confirmée par le calcul vectoriel, et $E_1E_2 = 9$ cm.

**5.** 1 pts

On cherche les points $M$ tels que $f(M) = g(M)$. Traduis cette condition par l'égalité $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM_2}$, puis exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Déduis-en qu'un seul point $P$ convient, place-le, et vérifie que $f(P) = g(P) = E$.

INDICE

**Début :** $f(M) = g(M)$ signifie $M_1 = M_2$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM_2}$. **Ensuite :** remplace par les résultats des questions 1 et 2, puis change de sens le vecteur $\overrightarrow{MA}$.

CORRIGÉ

**Condition.** Soit $M$ un point. $f(M) = g(M)$ signifie $M_1 = M_2$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM_2}$. Avec la question 1 et la définition de $M_2$, cette condition s'écrit $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{MA}$, soit $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$. En changeant le sens du vecteur, elle équivaut à :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}.$$

**Point unique.** Cette égalité définit un seul point, noté $P$ : il est sur la droite $(AB)$, du côté de $A$ opposé à $B$, avec $AP = \dfrac{1}{3} \times 3 = 1$ cm.

**Vérification.** Par $f$, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_1} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PP_1} \\ &= -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Par $g$ : $\overrightarrow{AP_2} = -2\,\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$. Les deux images vérifient l'égalité qui définit $E$ : $f(P) = g(P) = E$.

**Conclusion.** Un seul point $P$ vérifie $f(P) = g(P)$ : le point de la droite $(AB)$ tel que $\overrightarrow{AP} = -\dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$, et son image commune par $f$ et $g$ est $E$.