BURHAN

Les transformations dans le plan : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

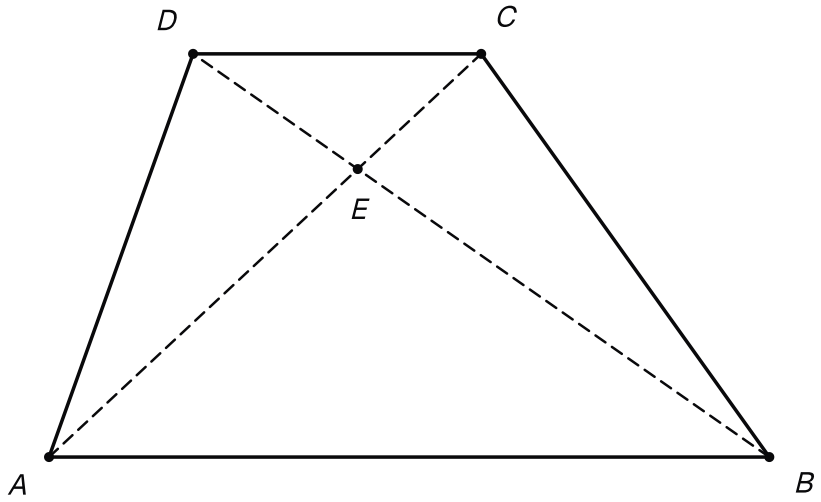
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les transformations dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Un trapèze et le point commun de ses diagonales

Trace un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, tel que $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en E. On admet qu'il existe une homothétie h de centre E qui envoie A sur C et B sur D.



Le trapèze ABCD, de grande base [AB] et de petite base [DC], et le point E où se croisent ses diagonales.

1.

Exprime $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Déduis-en le rapport k de h.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{DC}$. Ensuite, la propriété caractéristique de l'homothétie relie $\overrightarrow{CD}$, image de $\overrightarrow{AB}$, au rapport.

2.

On mesure $EA = 5$ cm. Calcule EC, puis la longueur de la diagonale $[AC]$.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie, $EC = |k|\,EA$. Le signe de k indique si E est entre A et C.

3.

On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$. Quelle est l'image de I par h ? Déduis-en que E, I et J sont alignés.

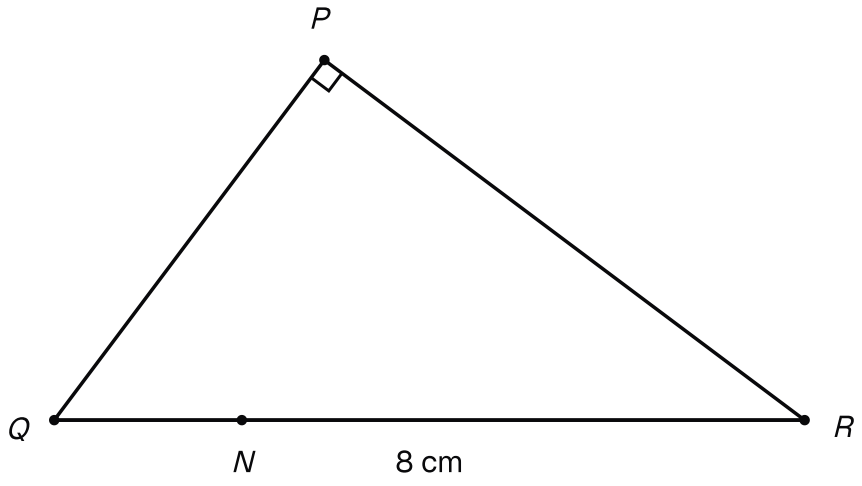
INDICE

Outil : la conservation du milieu par h. Pour l'alignement, souviens-toi de la position d'un point, de son image et du centre.

Exercice 2

Un triangle rectangle agrandi de l'autre côté

PQR est un triangle rectangle en P, avec $QR = 8$ cm. Le point N vérifie $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QR}$. On note Q', R', N' les images de Q, R, N par l'homothétie h de centre P et de rapport -3.



Le triangle PQR rectangle en P, d'hypoténuse 8 cm, et le point N placé au quart de [QR] en partant de Q.

1.

Justifie que $\overrightarrow{Q'N'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{Q'R'}$.

INDICE

Outil : une homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs. Identifie les deux vecteurs de départ.

2.

Déduis-en que Q', N' et R' sont alignés, et situe N' par rapport au segment $[Q'R']$.

INDICE

Outil : deux vecteurs colinéaires de même origine Q' ; le coefficient est compris entre 0 et 1.

3.

Calcule $Q'R'$ et $Q'N'$. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{Q'PR'}$?

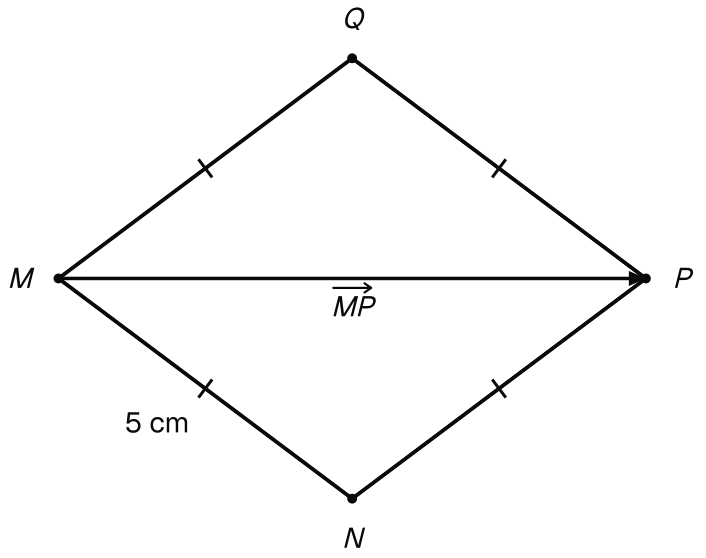
INDICE

Outil : les distances sont multipliées par $|-3|$. Pour l'angle, cherche d'abord l'image de P, puis utilise la conservation des angles.

Exercice 3

Un losange déplacé le long d'une diagonale

$MNPQ$ est un losange de côté 5 cm, ses sommets nommés dans cet ordre. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{MP}$, et $N' = t(N)$, $Q' = t(Q)$.



Le losange MNPQ de côté 5 cm et le vecteur MP qui définit la translation.

1.

Quelle est l'image de M par t ? Construis N' et Q'.

INDICE

Outil : la définition de la translation : $\overrightarrow{NN'}$ et $\overrightarrow{QQ'}$ sont égaux au vecteur $\overrightarrow{MP}$.

2.

Justifie que $\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}$. Déduis-en que les droites $(N'Q')$ et (NQ) sont parallèles et que $N'Q' = NQ$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la translation, appliquée aux points N et Q.

3.

Rappel du collège : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires. Déduis-en que $(N'Q')$ est perpendiculaire à (MP), puis calcule PN'.

INDICE

Outil : une droite parallèle à (NQ) est perpendiculaire à toute droite perpendiculaire à (NQ). Pour PN', applique la propriété caractéristique aux points M et N.

Exercice 4

Une transformation définie par une somme de vecteurs

A et B sont deux points distincts, et I est le milieu de $[AB]$. La transformation f associe à chaque point M le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

1.

Justifie que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par I dans chacun des deux vecteurs. Que vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?

2.

Soit M et N deux points d'images M' et N'. Écris $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$, puis remplace $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{NN'}$ à l'aide de la question 1.

INDICE

Outil : la question 1 donne $\overrightarrow{MM'}$; le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est son opposé.

3.

Simplifie : exprime $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$, puis donne la nature de f.

INDICE

Outil : regroupe $2\,\overrightarrow{NI} + 2\,\overrightarrow{IM}$ par la relation de Chasles. Termine par une propriété caractéristique.

4.

Quels points sont leur propre image par f ? Déduis-en le centre de f.

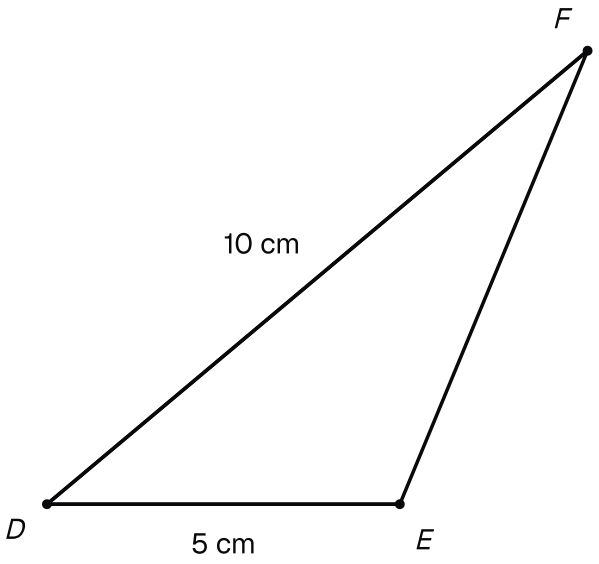
INDICE

Outil : cherche le point M tel que $M' = M$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, avec la question 1.

Exercice 5

L'image d'une droite, puis un point d'intersection

Trace un triangle DEF tel que $DE = 5$ cm et $DF = 10$ cm. On note h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{5}$, et $E' = h(E)$, $F' = h(F)$.



Le triangle DEF, avec DE = 5 cm et DF = 10 cm.

1.

Construis le point E' et calcule DE'.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie, avec un rapport positif.

2.

Justifie que l'image de la droite (EF) par h est la parallèle à (EF) passant par E'. On la note (d).

INDICE

Outil : l'image d'une droite par une homothétie. Un point de (EF) dont tu connais l'image suffit.

3.

La droite (d) coupe (DF) en un point. Justifie que ce point est F', puis calcule DF'.

INDICE

Outil : cherche deux raisons pour lesquelles F' est à la fois sur (DF) et sur (d). Vérifie ensuite que ces deux droites n'ont qu'un point commun.

Exercice 6

Le plan d'une chambre à l'échelle

Sur le plan d'une maison, le sol d'une chambre est représenté par un rectangle $KLMN$ de 8 cm sur 6 cm, avec $KL = 8$ cm et $LM = 6$ cm. On admet que ce rectangle est l'image du sol réel par une homothétie de rapport $\frac{1}{50}$, puis une translation, appliquées successivement.

1.

Calcule les dimensions réelles de la chambre, en mètres.

INDICE

Outil : par l'homothétie, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{50}$; la translation les conserve. Une longueur réelle est donc combien de fois celle du plan ?

2.

Calcule la diagonale KM sur le plan, puis la diagonale réelle du sol.

INDICE

Outil : le triangle KLM est rectangle en L ; rappel du collège : le théorème de Pythagore.

3.

Le sol réel et le rectangle du plan sont-ils des figures semblables ? Sont-ils isométriques ? Que dire de leurs angles ?

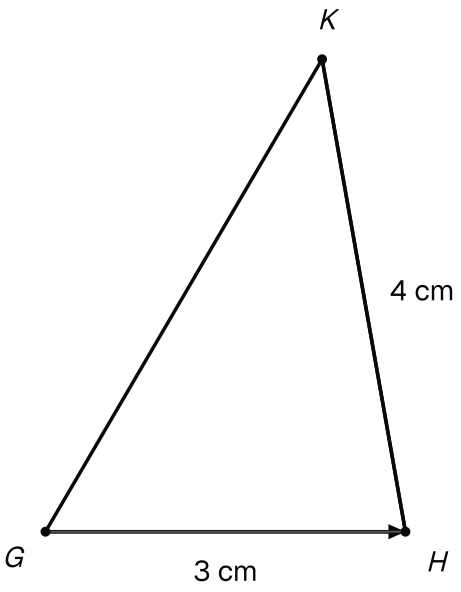
INDICE

Outil : la définition des figures semblables et isométriques. Compare aussi les longueurs.

Exercice 7

Une frise de triangles

Pour dessiner une frise, on part d'un triangle GHK avec $GH = 3$ cm et $HK = 4$ cm. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$. Le triangle $G_1H_1K_1$ est l'image de GHK par t, et le triangle $G_2H_2K_2$ est l'image de $G_1H_1K_1$ par t.



Le triangle de départ GHK de la frise, avec GH = 3 cm et HK = 4 cm.

1.

Quel point est G_1 ? Calcule GG_1.

INDICE

Outil : la définition de la translation, appliquée au point G.

2.

Soit M un sommet du triangle GHK, M_1 son image par t et M_2 l'image de M_1 par t. Exprime $\overrightarrow{MM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$. Déduis-en GG_2 et KK_2.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par M_1, puis la définition de la translation deux fois.

3.

Les triangles GHK et $G_2H_2K_2$ sont-ils isométriques ? Calcule H_2K_2.

INDICE

Outil : la définition des figures isométriques, puis la conservation des distances par une translation.