BURHAN

Les transformations dans le plan : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

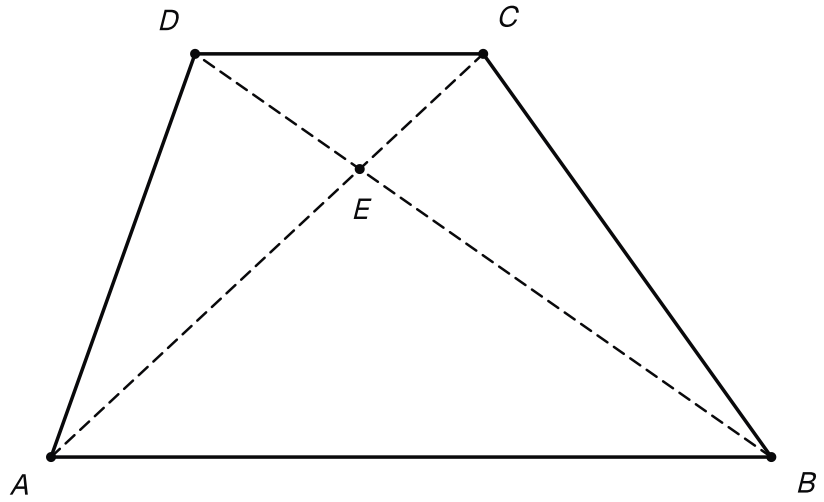
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les transformations dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Un trapèze et le point commun de ses diagonales

Trace un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$, tel que $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en E. On admet qu'il existe une homothétie h de centre E qui envoie A sur C et B sur D.



Le trapèze ABCD, de grande base [AB] et de petite base [DC], et le point E où se croisent ses diagonales.

1.

Exprime $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Déduis-en le rapport k de h.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{DC}$. Ensuite, la propriété caractéristique de l'homothétie relie $\overrightarrow{CD}$, image de $\overrightarrow{AB}$, au rapport.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{CD}$. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{DC}$, donc :

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Rapport. Les images de A et B par h sont C et D. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$. On a donc $k\,\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, avec $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ car $A \neq B$.

Conclusion. $\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, et le rapport de h est $k = -\frac{2}{5}$.

2.

On mesure $EA = 5$ cm. Calcule EC, puis la longueur de la diagonale $[AC]$.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie, $EC = |k|\,EA$. Le signe de k indique si E est entre A et C.

CORRIGÉ

Distance EC. D'après la définition de l'homothétie, $h(A) = C$ donne :

$$\overrightarrow{EC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{EA}.$$

La distance au centre est multipliée par $\frac{2}{5}$: $EC = \frac{2}{5} \times 5 = 2$ cm.

Position de E. Le rapport est négatif : A et C sont de part et d'autre de E, qui est donc entre A et C.

Diagonale. $AC = AE + EC$, soit $AC = 5 + 2 = 7$ cm.

Conclusion. $EC = 2$ cm, et la diagonale $[AC]$ mesure 7 cm.

3.

On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$. Quelle est l'image de I par h ? Déduis-en que E, I et J sont alignés.

INDICE

Outil : la conservation du milieu par h. Pour l'alignement, souviens-toi de la position d'un point, de son image et du centre.

CORRIGÉ

Image de I. h envoie A sur C et B sur D. D'après la conservation du milieu par l'homothétie h, l'image du milieu I de $[AB]$ est le milieu de $[CD]$, c'est-à-dire J.

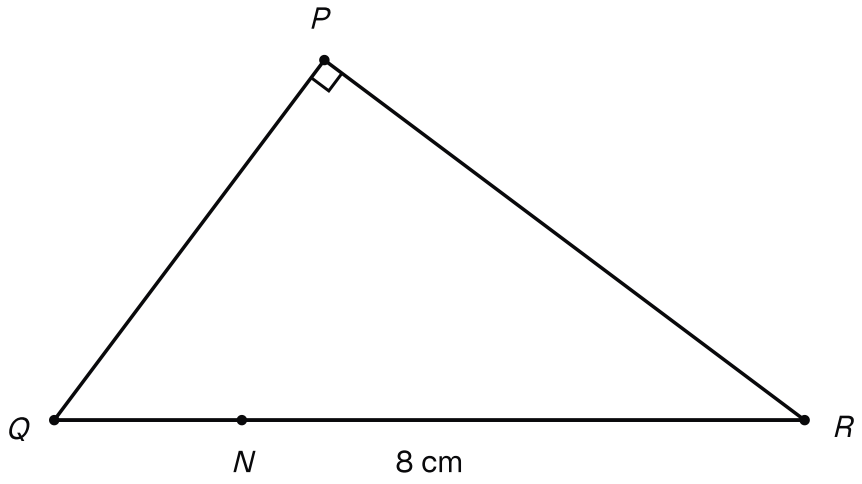
Alignement. D'après la définition de l'homothétie, $\overrightarrow{EJ} = k\,\overrightarrow{EI}$: ces deux vecteurs sont colinéaires et ont la même origine E. Le centre E, le point I et son image J sont donc alignés.

Conclusion. $h(I) = J$, et les points E, I et J sont alignés.

Exercice 2

Un triangle rectangle agrandi de l'autre côté

PQR est un triangle rectangle en P, avec $QR = 8$ cm. Le point N vérifie $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QR}$. On note Q', R', N' les images de Q, R, N par l'homothétie h de centre P et de rapport -3.



Le triangle PQR rectangle en P, d'hypoténuse 8 cm, et le point N placé au quart de [QR] en partant de Q.

1.

Justifie que $\overrightarrow{Q'N'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{Q'R'}$.

INDICE

Outil : une homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs. Identifie les deux vecteurs de départ.

CORRIGÉ

Relation de départ. Par hypothèse :

$$\overrightarrow{QN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QR}.$$

Conservation. h envoie Q, N, R sur Q', N', R'. D'après la conservation du coefficient de colinéarité par l'homothétie h, le même coefficient $\frac{1}{4}$ relie les vecteurs images.

Conclusion. $\overrightarrow{Q'N'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{Q'R'}$.

2.

Déduis-en que Q', N' et R' sont alignés, et situe N' par rapport au segment $[Q'R']$.

INDICE

Outil : deux vecteurs colinéaires de même origine Q' ; le coefficient est compris entre 0 et 1.

CORRIGÉ

Alignement. D'après la question 1, les vecteurs $\overrightarrow{Q'N'}$ et $\overrightarrow{Q'R'}$ sont colinéaires et ont la même origine Q' : les points Q', N' et R' sont alignés.

Position. Le coefficient $\dfrac{1}{4}$ est compris entre 0 et 1 : N' est sur le segment $[Q'R']$, au quart de ce segment en partant de Q'.

Conclusion. Les points Q', N' et R' sont alignés, et N' est le point du segment $[Q'R']$ situé au quart en partant de Q'.

3.

Calcule $Q'R'$ et $Q'N'$. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{Q'PR'}$?

INDICE

Outil : les distances sont multipliées par $|-3|$. Pour l'angle, cherche d'abord l'image de P, puis utilise la conservation des angles.

CORRIGÉ

Longueur $Q'R'$. Par l'homothétie h, les distances sont multipliées par $|-3| = 3$: $Q'R' = 3 \times 8 = 24$ cm.

Longueur $Q'N'$. D'après la question 2, N' est au quart de $[Q'R']$: $Q'N' = \dfrac{1}{4} \times 24 = 6$ cm.

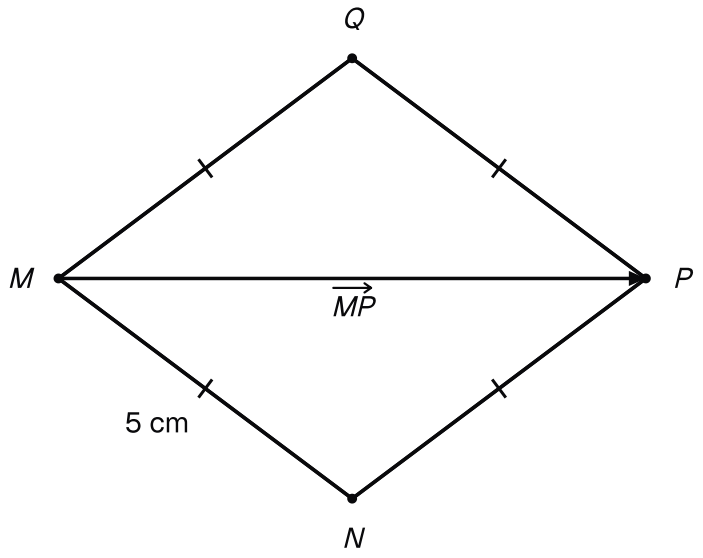
Angle. Le centre est sa propre image : $h(P) = P$. L'angle $\widehat{QPR}$ a donc pour image l'angle $\widehat{Q'PR'}$. D'après la conservation des angles par une homothétie, $\widehat{Q'PR'}$ est droit, comme $\widehat{QPR}$.

Conclusion. $Q'R' = 24$ cm, $Q'N' = 6$ cm, et l'angle $\widehat{Q'PR'}$ est droit.

Exercice 3

Un losange déplacé le long d'une diagonale

$MNPQ$ est un losange de côté 5 cm, ses sommets nommés dans cet ordre. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{MP}$, et $N' = t(N)$, $Q' = t(Q)$.



Le losange MNPQ de côté 5 cm et le vecteur MP qui définit la translation.

1.

Quelle est l'image de M par t ? Construis N' et Q'.

INDICE

Outil : la définition de la translation : $\overrightarrow{NN'}$ et $\overrightarrow{QQ'}$ sont égaux au vecteur $\overrightarrow{MP}$.

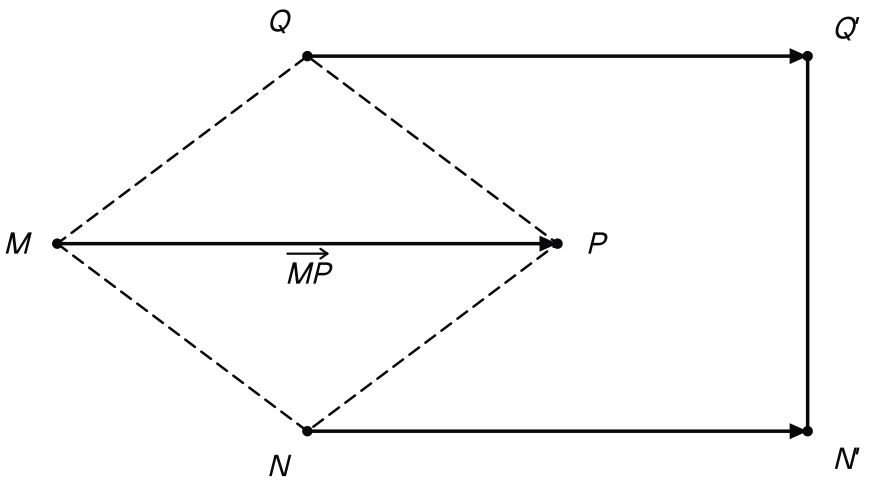
CORRIGÉ

Image de M. D'après la définition de la translation, l'image de M est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MP}$: c'est le point P.

Construction. On construit N' et Q' à partir des égalités qui les définissent :

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MP},$$
$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{MP}.$$

Conclusion. L'image de M par t est P ; les points N' et Q' s'obtiennent en reportant le vecteur $\overrightarrow{MP}$ à partir de N et de Q.



N et Q glissent du vecteur MP : leurs images N' et Q' sont à droite du losange, M ayant pour image P.

2.

Justifie que $\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}$. Déduis-en que les droites $(N'Q')$ et (NQ) sont parallèles et que $N'Q' = NQ$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique de la translation, appliquée aux points N et Q.

CORRIGÉ

Égalité de vecteurs. t envoie N sur N' et Q sur Q'. D'après la propriété caractéristique de la translation :

$$\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}.$$

Parallélisme. Ces deux vecteurs sont égaux et non nuls, car $N \neq Q$: ils sont colinéaires, donc les droites $(N'Q')$ et (NQ) sont parallèles.

Longueur. Deux vecteurs égaux ont la même longueur : $N'Q' = NQ$.

Conclusion. $\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}$; les droites $(N'Q')$ et (NQ) sont parallèles, et $N'Q' = NQ$.

3.

Rappel du collège : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires. Déduis-en que $(N'Q')$ est perpendiculaire à (MP), puis calcule PN'.

INDICE

Outil : une droite parallèle à (NQ) est perpendiculaire à toute droite perpendiculaire à (NQ). Pour PN', applique la propriété caractéristique aux points M et N.

CORRIGÉ

Perpendicularité. Les diagonales (MP) et (NQ) du losange sont perpendiculaires. D'après la question 2, la droite $(N'Q')$ est parallèle à (NQ) : elle est donc perpendiculaire à (MP).

Longueur PN'. t envoie M sur P et N sur N'. D'après la propriété caractéristique de la translation, $\overrightarrow{PN'} = \overrightarrow{MN}$, donc $PN' = MN = 5$ cm.

Conclusion. La droite $(N'Q')$ est perpendiculaire à (MP), et $PN' = 5$ cm.

Exercice 4

Une transformation définie par une somme de vecteurs

A et B sont deux points distincts, et I est le milieu de $[AB]$. La transformation f associe à chaque point M le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

1.

Justifie que, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par I dans chacun des deux vecteurs. Que vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?

CORRIGÉ

Passage par I. Soit M un point. D'après la relation de Chasles, appliquée à chacun des deux vecteurs :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\\ &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\\ &\quad + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\\ &= 2\,\overrightarrow{MI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right).\end{aligned}$$

Milieu. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Conclusion. Pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

2.

Soit M et N deux points d'images M' et N'. Écris $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$, puis remplace $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{NN'}$ à l'aide de la question 1.

INDICE

Outil : la question 1 donne $\overrightarrow{MM'}$; le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est son opposé.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{M'M}$. D'après la question 1, $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MI}$. Le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est son opposé :

$$\overrightarrow{M'M} = -2\,\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{IM}.$$

Vecteur $\overrightarrow{NN'}$. La question 1, appliquée au point N, donne $\overrightarrow{NN'} = 2\,\overrightarrow{NI}$.

Remplacement. On reporte ces deux vecteurs dans $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$, obtenue par la relation de Chasles.

Conclusion. Pour tous points M et N :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= 2\,\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN}\\ &\quad + 2\,\overrightarrow{NI}.\end{aligned}$$

3.

Simplifie : exprime $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$, puis donne la nature de f.

INDICE

Outil : regroupe $2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{IM}$ par la relation de Chasles. Termine par une propriété caractéristique.

CORRIGÉ

Regroupement. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NM}$, donc :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{IM} &= 2\overrightarrow{NM} \\ &= -2\overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

Simplification. Avec la question 2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{MN} \\ &\quad + \left(2\overrightarrow{NI} + 2\overrightarrow{IM}\right) \\ &= \overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{MN} \\ &= -\overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

Nature. Cette égalité vaut pour tous points M et N, avec le réel -1, différent de 0 et de 1. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, f est une homothétie de rapport -1, c'est-à-dire une symétrie centrale.

Conclusion. Pour tous points M et N, $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, et f est une symétrie centrale.

4.

Quels points sont leur propre image par f ? Déduis-en le centre de f.

INDICE

Outil : cherche le point M tel que $M' = M$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, avec la question 1.

CORRIGÉ

Point invariant. Soit M un point. D'après la question 1, $M' = M$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$, soit $2\overrightarrow{MI} = \vec{0}$, c'est-à-dire $M = I$. Le point I est donc le seul point qui soit sa propre image.

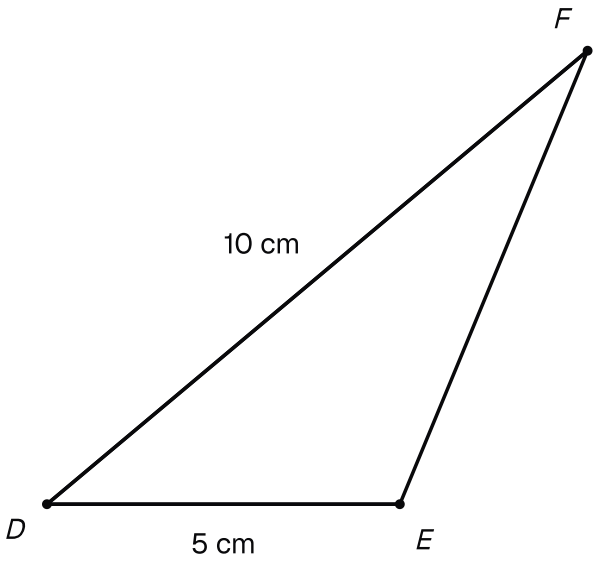
Centre. D'après la définition de la symétrie centrale, son centre est sa propre image. Le centre de f est donc I : f est la symétrie centrale S_I.

Conclusion. Le seul point qui soit sa propre image par f est I ; c'est le centre de f.

Exercice 5

L'image d'une droite, puis un point d'intersection

Trace un triangle DEF tel que $DE = 5$ cm et $DF = 10$ cm. On note h l'homothétie de centre D et de rapport $\dfrac{3}{5}$, et $E' = h(E)$, $F' = h(F)$.



Le triangle DEF, avec DE = 5 cm et DF = 10 cm.

1.

Construis le point E' et calcule DE'.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie, avec un rapport positif.

CORRIGÉ

Égalité de définition. D'après la définition de l'homothétie :

$$\overrightarrow{DE'} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{DE}.$$

Position et distance. Le rapport est positif : E' est sur la demi-droite $[DE)$, avec $DE' = \dfrac{3}{5} \times 5 = 3$ cm.

Conclusion. E' est le point de la demi-droite $[DE)$ tel que $DE' = 3$ cm.

2.

Justifie que l'image de la droite (EF) par h est la parallèle à (EF) passant par E'. On la note (d).

INDICE

Outil : l'image d'une droite par une homothétie. Un point de (EF) dont tu connais l'image suffit.

CORRIGÉ

Direction. D'après l'image d'une droite par une homothétie, l'image de (EF) est une droite parallèle à (EF).

Un point connu. Le point E est sur (EF), donc son image E' est sur l'image de (EF).

Unicité. Par un point passe une seule parallèle à une droite donnée.

Conclusion. L'image de (EF) par h est la parallèle à (EF) passant par E', c'est-à-dire la droite (d).

3.

La droite (d) coupe (DF) en un point. Justifie que ce point est F', puis calcule DF'.

INDICE

Outil : cherche deux raisons pour lesquelles F' est à la fois sur (DF) et sur (d). Vérifie ensuite que ces deux droites n'ont qu'un point commun.

CORRIGÉ

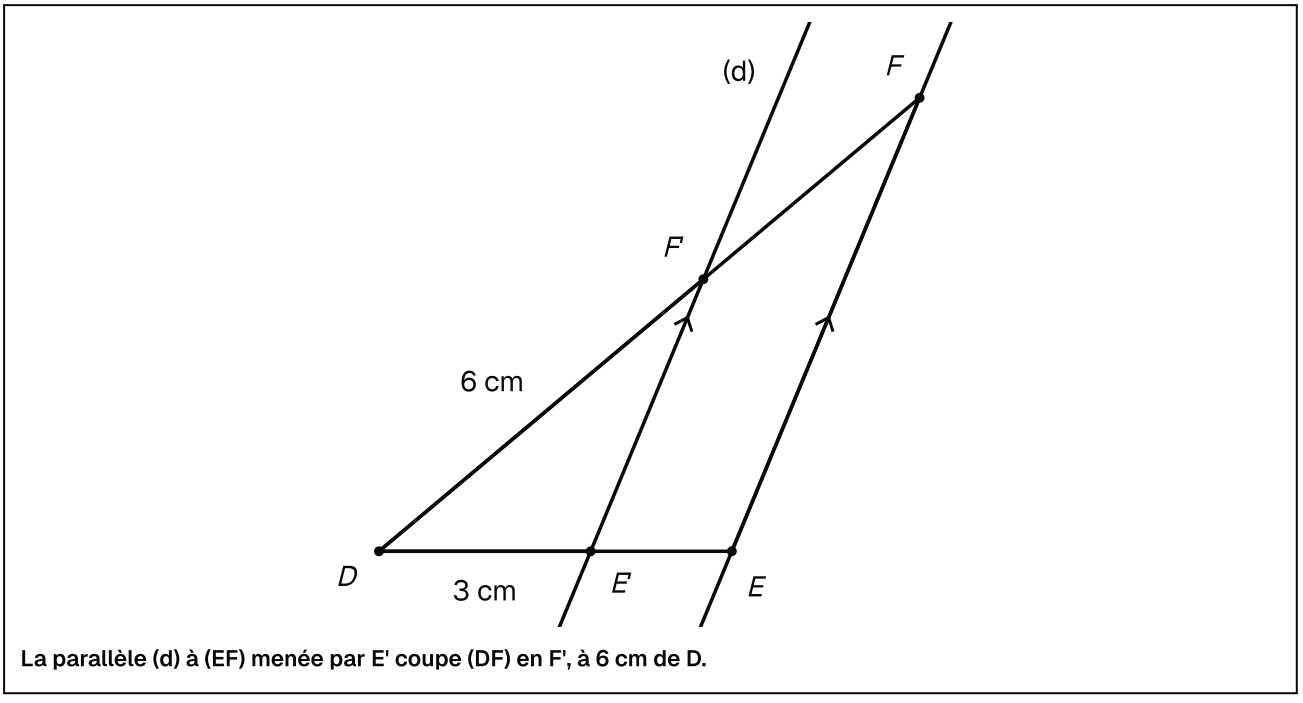
Sur (DF). D'après la définition de l'homothétie, le centre D, le point F et son image F' sont alignés : F' est sur (DF).

Sur (d). Le point F appartient à (EF), donc son image F' appartient à l'image de (EF), c'est-à-dire à (d).

Un seul point commun. La droite (d) est parallèle à (EF), et (EF) coupe (DF) en F : les droites (d) et (DF) sont sécantes. Leur unique point commun est donc F'.

Distance. Les distances sont multipliées par $\frac{3}{5}$: $DF' = \frac{3}{5} \times 10 = 6$ cm.

Conclusion. Le point où (d) coupe (DF) est F', et $DF' = 6$ cm.



La parallèle (d) à (EF) menée par E' coupe (DF) en F', à 6 cm de D.

Exercice 6

Le plan d'une chambre à l'échelle

Sur le plan d'une maison, le sol d'une chambre est représenté par un rectangle $KLMN$ de 8 cm sur 6 cm, avec $KL = 8$ cm et $LM = 6$ cm. On admet que ce rectangle est l'image du sol réel par une homothétie de rapport $\frac{1}{50}$, puis une translation, appliquées successivement.

1.

Calcule les dimensions réelles de la chambre, en mètres.

INDICE

Outil : par l'homothétie, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{50}$; la translation les conserve. Une longueur réelle est donc combien de fois celle du plan ?

CORRIGÉ

Rapport des longueurs. Par l'homothétie, les distances sont multipliées par $\frac{1}{50}$, et la translation les conserve. Chaque longueur du plan vaut donc $\frac{1}{50}$ de la longueur réelle : une longueur réelle vaut 50 fois celle du plan.

Calcul. Les dimensions réelles sont $50 \times 8 = 400$ cm et $50 \times 6 = 300$ cm.

Conclusion. La chambre mesure 4 m sur 3 m.

2.

Calcule la diagonale KM sur le plan, puis la diagonale réelle du sol.

INDICE

Outil : le triangle KLM est rectangle en L ; rappel du collège : le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Sur le plan. Les angles du rectangle sont droits : le triangle KLM est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore, $KM^2 = KL^2 + LM^2$, soit $KM^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Donc $KM = 10$ cm.

Dans la réalité. Une longueur réelle vaut 50 fois celle du plan : $50 \times 10 = 500$ cm.

Conclusion. La diagonale KM mesure 10 cm sur le plan, et la diagonale réelle du sol mesure 5 m.

3.

Le sol réel et le rectangle du plan sont-ils des figures semblables ? Sont-ils isométriques ? Que dire de leurs angles ?

INDICE

Outil : la définition des figures semblables et isométriques. Compare aussi les longueurs.

CORRIGÉ

Semblables. Le rectangle du plan est l'image du sol réel par une homothétie, puis une translation : d'après la définition des figures semblables, les deux figures sont semblables.

Angles. D'après la conservation des angles, les angles du plan sont droits, comme ceux du sol.

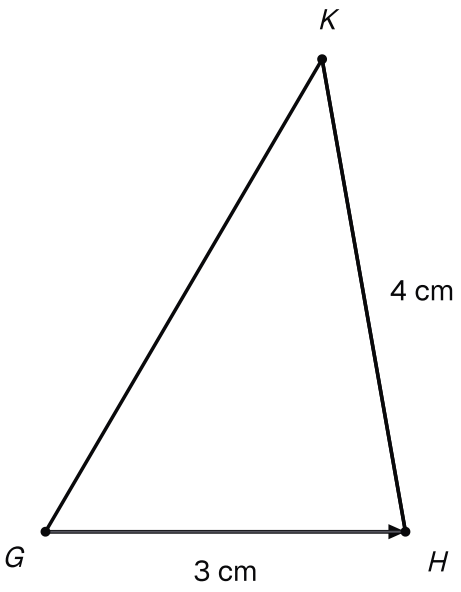
Pas isométriques. Les longueurs ne sont pas conservées, par exemple 8 cm sur le plan contre 4 m dans la réalité : les figures ne sont pas isométriques.

Conclusion. Le sol réel et le rectangle du plan sont semblables sans être isométriques, et leurs angles sont les mêmes : quatre angles droits.

Exercice 7

Une frise de triangles

Pour dessiner une frise, on part d'un triangle GHK avec $GH = 3$ cm et $HK = 4$ cm. On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$. Le triangle $G_1H_1K_1$ est l'image de GHK par t, et le triangle $G_2H_2K_2$ est l'image de $G_1H_1K_1$ par t.



Le triangle de départ GHK de la frise, avec GH = 3 cm et HK = 4 cm.

1.

Quel point est G_1 ? Calcule GG_1.

INDICE

Outil : la définition de la translation, appliquée au point G.

CORRIGÉ

Image de G. D'après la définition de la translation, G_1 vérifie $\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GH}$: le point G_1 est donc H.

Conclusion. $G_1 = H$, et $GG_1 = GH = 3$ cm.

2.

Soit M un sommet du triangle GHK, M_1 son image par t et M_2 l'image de M_1 par t. Exprime $\overrightarrow{MM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$. Déduis-en GG_2 et KK_2.

INDICE

Outil : la relation de Chasles en passant par M_1, puis la définition de la translation deux fois.

CORRIGÉ

Deux déplacements. D'après la définition de la translation, $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GH}$. Avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\\ &= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GH}\\ &= 2\,\overrightarrow{GH}.\end{aligned}$$

Distances. Chaque sommet est déplacé du vecteur $2\,\overrightarrow{GH}$, de longueur $2\,GH$: $GG_2 = KK_2 = 2 \times 3 = 6$ cm.

Conclusion. Pour chaque sommet M, $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{GH}$, et $GG_2 = KK_2 = 6$ cm.

3.

Les triangles GHK et $G_2H_2K_2$ sont-ils isométriques ? Calcule H_2K_2.

INDICE

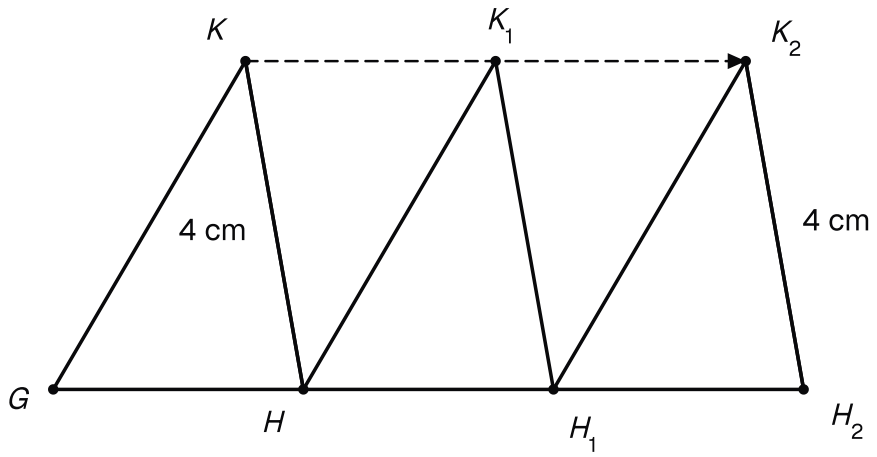
Outil : la définition des figures isométriques, puis la conservation des distances par une translation.

CORRIGÉ

Isométriques. $G_2H_2K_2$ est l'image de GHK par la translation t appliquée deux fois de suite. D'après la définition des figures isométriques, les deux triangles sont isométriques.

Longueur. Une translation conserve les distances, à chacune des deux étapes : $H_2K_2 = H_1K_1 = HK = 4$ cm.

Conclusion. Les triangles GHK et $G_2H_2K_2$ sont isométriques, et $H_2K_2 = 4$ cm.



La frise : chaque triangle avance du vecteur GH, et le troisième est à 6 cm du premier.