BURHAN

Les transformations dans le plan : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

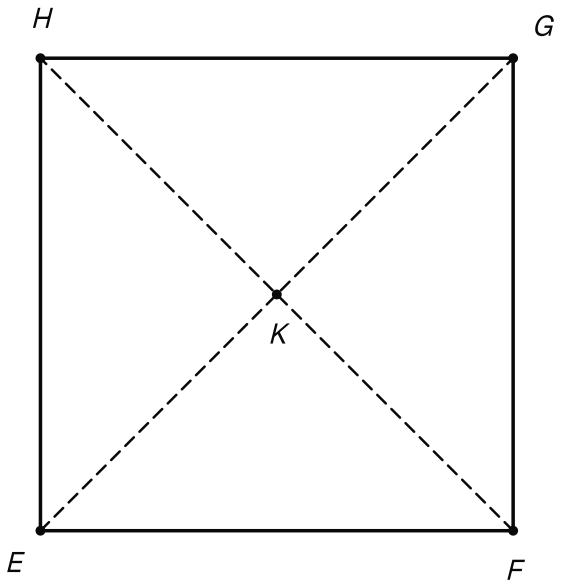
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les transformations dans le plan	Application	8

Exercice 1

Symétries et translation dans un carré

Trace sur ton cahier un carré $EFGH$, ses sommets nommés dans cet ordre. Ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en K.



Le carré EFGH et ses diagonales, qui se croisent en K.

1.

Construis l'image de E, puis celle de F, par la symétrie centrale S_K.

INDICE

Outil : la définition affine de la symétrie centrale. Rappel du collège : les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

CORRIGÉ

Centre du carré. Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu : K est le milieu de $[EG]$ et le milieu de $[FH]$.

Images. D'après la définition affine de la symétrie centrale, l'image d'un point par S_K est le point qui forme avec lui un segment de milieu K. Donc $S_K(E) = G$ et $S_K(F) = H$.

Conclusion. Par la symétrie centrale S_K, l'image de E est le sommet G et l'image de F est le sommet H.

2.

Construis l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.

INDICE

Outil : la définition de la translation. Cherche le point M' tel que $\overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{FG}$, en regardant les côtés opposés du carré.

CORRIGÉ

Côtés opposés. Dans le carré $EFGH$, les côtés $[EH]$ et $[FG]$ sont parallèles, de même longueur et parcourus dans le même sens :

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}.$$

Image. D'après la définition de la translation, l'image de E est le point M' tel que $\overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{FG}$. L'égalité précédente montre que ce point est H.

Conclusion. L'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$ est le sommet H.

3.

Construis l'image de E par la symétrie axiale $S_{(FH)}$.

INDICE

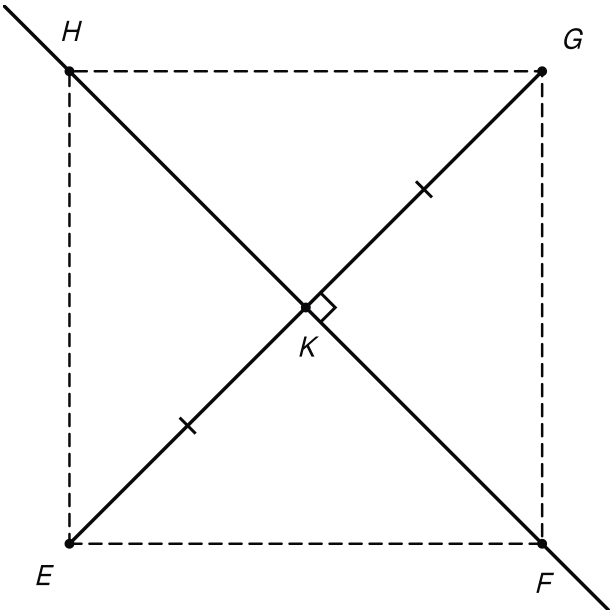
Outil : la définition de la symétrie axiale. Quelle droite est la médiatrice du segment $[EG]$?

CORRIGÉ

Médiatrice. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et ont le même milieu K. La droite (FH) passe donc par le milieu de $[EG]$ et lui est perpendiculaire : c'est la médiatrice de $[EG]$.

Image. Les points E et G sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[EG]$. D'après la définition de la symétrie axiale, $S_{(FH)}(E) = G$.

Conclusion. L'image de E par la symétrie axiale $S_{(FH)}$ est le sommet G.



La diagonale (FH) coupe [EG] à angle droit en son milieu K : elle en est la médiatrice, et G est l'image de E.

4.

Quelle est l'image de F par $S_{(FH)}$? Et celle de K ?

INDICE

Outil : la définition de la symétrie axiale, dans le cas d'un point de l'axe.

CORRIGÉ

Points de l'axe. Les points F et K appartiennent à l'axe (FH). D'après la définition de la symétrie axiale, un point de l'axe est sa propre image.

Conclusion. $S_{(FH)}(F) = F$ et $S_{(FH)}(K) = K$: chacun des points F et K est sa propre image.

Exercice 2

Une homothétie de rapport quatre tiers

Le segment $[PQ]$ mesure 6 cm et R est le point de $[PQ]$ tel que $PR = 3$ cm. On note h l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{4}{3}$.

1.

Construis le point $Q' = h(Q)$ et calcule PQ'.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie. Le rapport est positif : sur quelle demi-droite d'origine P se trouve Q' ?

CORRIGÉ

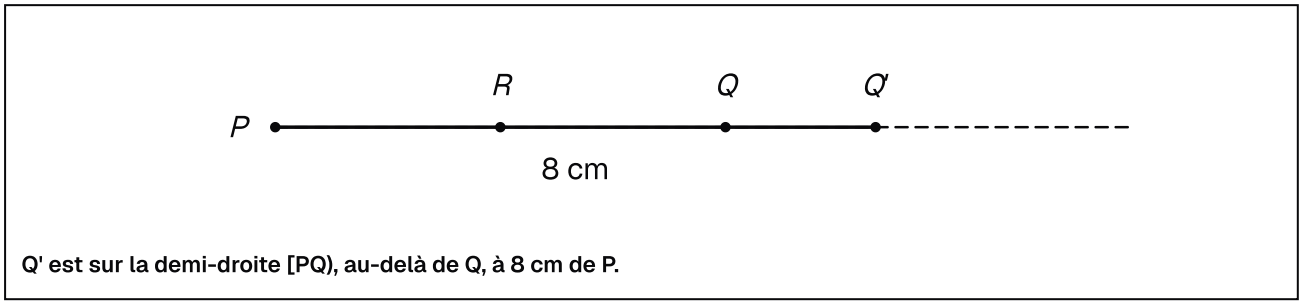
Égalité de définition. D'après la définition de l'homothétie, le point $Q' = h(Q)$ vérifie :

$$\overrightarrow{PQ'} = \frac{4}{3}\,\overrightarrow{PQ}.$$

Position. Le rapport $\frac{4}{3}$ est positif : Q' est sur la demi-droite $[PQ)$.

Distance. $PQ' = \frac{4}{3} \times 6 = 8$ cm.

Conclusion. On place Q' sur la demi-droite $[PQ)$, à 8 cm de P : $PQ' = 8$ cm.



Q' est sur la demi-droite [PQ), au-delà de Q, à 8 cm de P.

2.

Construis le point $R' = h(R)$ et calcule PR'.

INDICE

Outil : la même définition, appliquée au point R.

CORRIGÉ

Égalité de définition. D'après la définition de l'homothétie, appliquée cette fois au point R :

$$\overrightarrow{PR'} = \frac{4}{3}\,\overrightarrow{PR}.$$

Position et distance. Le rapport est positif et R est sur $[PQ)$: le point R' est sur $[PQ)$, avec $PR' = \frac{4}{3} \times 3 = 4$ cm.

Conclusion. On place R' sur la demi-droite $[PQ)$, à 4 cm de P : $PR' = 4$ cm.

3.

Calcule QQ'. Le point Q est-il situé entre P et Q' ?

INDICE

Outil : les points P, Q et Q' sont sur une même demi-droite d'origine P ; compare PQ et PQ'.

CORRIGÉ

Ordre des points. Les points Q et Q' sont sur la demi-droite $[PQ)$, avec $PQ = 6$ cm et $PQ' = 8$ cm. Comme $PQ < PQ'$, le point Q est entre P et Q'.

Distance. On en déduit $QQ' = PQ' - PQ$, soit $QQ' = 8 - 6 = 2$ cm.

Conclusion. $QQ' = 2$ cm, et Q est bien situé entre P et Q'. Il en va de même pour tout rapport supérieur à 1 : l'image est plus loin du centre que le point de départ.

Exercice 3

Une homothétie de rapport négatif

Trace un triangle KLM tel que $KL = 6$ cm et $KM = 9$ cm. On note h l'homothétie de centre K et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

1.

Construis le point $L' = h(L)$ et calcule KL'.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie. Attention au signe du rapport : de quel côté de K se trouve L' ?

CORRIGÉ

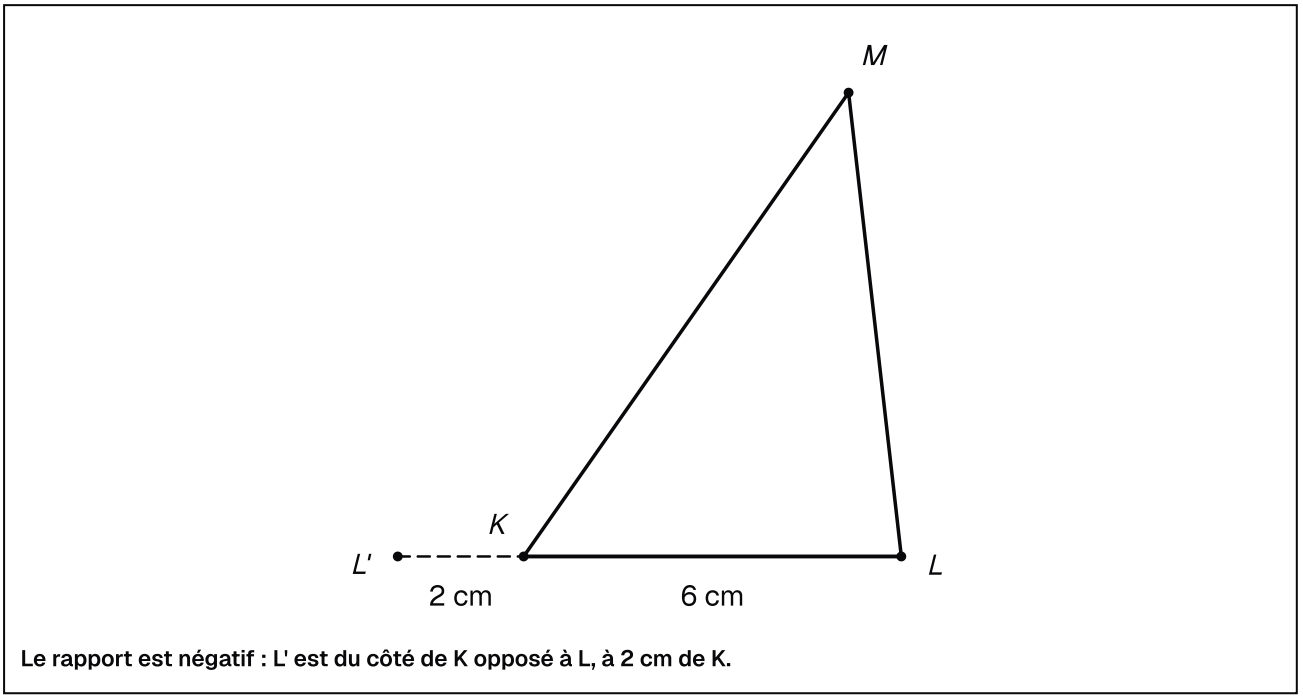
Égalité de définition. D'après la définition de l'homothétie :

$$\overrightarrow{KL'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{KL}.$$

Position. Le rapport est négatif : L' est sur la demi-droite opposée à $[KL)$.

Distance. La distance au centre est multipliée par $\dfrac{1}{3}$: $KL' = \dfrac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

Conclusion. L' se place sur la demi-droite opposée à $[KL)$, à 2 cm de K : $KL' = 2$ cm.



Le rapport est négatif : L' est du côté de K opposé à L, à 2 cm de K.

2.

Construis de même le point $M' = h(M)$ et calcule KM'.

INDICE

Outil : même définition ; la distance au centre est multipliée par $|k| = \dfrac{1}{3}$: elle diminue.

CORRIGÉ

Égalité de définition. D'après la définition de l'homothétie :

$$\overrightarrow{KM'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{KM}.$$

Position et distance. Le rapport est négatif : M' est sur la demi-droite opposée à $[KM)$, avec $KM' = \dfrac{1}{3} \times 9 = 3$ cm.

Conclusion. M' se place sur la demi-droite opposée à $[KM)$, à 3 cm de K : $KM' = 3$ cm.

3.

Quelle est l'image de K par h ? Calcule la longueur LL'.

INDICE

Outil : le centre d'une homothétie et sa propre image. Pour LL', place les points L, K, L' sur une même droite.

CORRIGÉ

Image du centre. D'après la définition de l'homothétie, le centre est sa propre image : $h(K) = K$.

Ordre des points. Les points L, K et L' sont alignés. Le rapport est négatif, donc L et L' sont de part et d'autre de K : le point K est entre L et L'.

Distance. $LL' = KL + KL' = 6 + 2 = 8$ cm.

Conclusion. L'image de K par h est K lui-même, et $LL' = 8$ cm.

Exercice 4

Reconnaître une transformation à son égalité

A et B sont deux points distincts. Pour chaque transformation ci-dessous, M' et N' désignent les images de points quelconques M et N :

- f_1 vérifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ pour tout point M ;
- f_2 vérifie $\overrightarrow{BM'} = -\overrightarrow{BM}$ pour tout point M ;
- f_3 vérifie $\overrightarrow{M'N'} = 4\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N ;
- f_4 vérifie $2\,\overrightarrow{AM'} = -3\,\overrightarrow{AM}$ pour tout point M ;
- f_5 vérifie $\overrightarrow{AM} = 5\,\overrightarrow{AM'}$ pour tout point M.

1.

Nomme les transformations f_1 et f_2, avec leurs éléments.

INDICE

Outil : compare chaque égalité aux définitions de la translation et de la symétrie centrale.

CORRIGÉ

Cas de f_1. Pour tout point M, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$. D'après la définition de la translation, f_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas de f_2. Pour tout point M, $\overrightarrow{BM'} = -\overrightarrow{BM}$: le point B est le milieu de $[MM']$. D'après la définition de la symétrie centrale, f_2 est la symétrie centrale S_B.

Conclusion. f_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et f_2 est la symétrie centrale S_B, de centre B.

2.

Que peut-on dire de f_3 ? Donne son rapport.

INDICE

Outil : l'égalité porte sur tous les couples de points : pense à la propriété caractéristique de l'homothétie.

CORRIGÉ

Propriété caractéristique. Pour tous points M et N, $\overrightarrow{M'N'} = 4\,\overrightarrow{MN}$, et le réel 4 est différent de 0 et de 1. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, f_3 est une homothétie de rapport 4.

Centre. L'égalité ne fait intervenir aucun point particulier : elle ne permet pas de trouver le centre.

Conclusion. f_3 est une homothétie de rapport 4, dont le centre n'est pas donné par l'égalité.

3.

Nomme f_4 et f_5, avec leurs éléments.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie. Isole d'abord le vecteur qui mène à l'image, $\overrightarrow{AM'}$, en divisant par le bon nombre.

CORRIGÉ

Cas de f_4. Pour tout point M, on divise les deux membres par 2 :

$$\overrightarrow{AM'} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AM}.$$

D'après la définition de l'homothétie, f_4 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.

Cas de f_5. Pour tout point M, on divise les deux membres par 5 :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AM}.$$

Donc f_5 est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{5}$, et non 5 : le vecteur isolé dans le premier membre doit être celui qui mène à l'image.

Conclusion. f_4 est l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{3}{2}$; f_5 est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{5}$.

Exercice 5

Lire le rapport d'une homothétie

Dans chaque question, h est une homothétie de centre Ω, A est un point distinct de Ω et $A' = h(A)$. Les points Ω, A et A' sont donc alignés. Trouve le rapport k de h.

1.

A et A' sont du même côté de Ω, avec $\Omega A = 2$ cm et $\Omega A' = 5$ cm.

INDICE

Outil : la définition de l'homothétie donne $\Omega A' = |k|\,\Omega A$. Le côté fixe le signe.

CORRIGÉ

Valeur absolue. D'après la définition de l'homothétie, $\Omega A' = |k|\,\Omega A$, donc :

$$|k| = \frac{\Omega A'}{\Omega A} = \frac{5}{2}.$$

Signe. Les points A et A' sont du même côté de Ω : $k > 0$.

Conclusion. Le rapport de h est $k = \dfrac{5}{2}$.

2.

Ω est situé entre A et A', avec $\Omega A = 6$ cm et $\Omega A' = 4$ cm.

INDICE

Outil : même calcul de $|k|$; ici le centre sépare le point et son image.

CORRIGÉ

Valeur absolue. D'après la définition de l'homothétie :

$$|k| = \frac{\Omega A'}{\Omega A} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Signe. Le centre Ω est entre A et A' : le point et son image sont de part et d'autre de Ω, donc $k < 0$.

Conclusion. Le rapport de h est $k = -\dfrac{2}{3}$.

3.

A' est le milieu du segment $[\Omega A]$.

INDICE

Outil : traduis « milieu de $[\Omega A]$ » par une égalité de vecteurs partant de Ω.

CORRIGÉ

Égalité de vecteurs. Le point A' est le milieu de $[\Omega A]$, donc :

$$\overrightarrow{\Omega A'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega A}.$$

Conclusion. D'après la définition de l'homothétie, le rapport de h est $k = \dfrac{1}{2}$.

4.

Ω est le milieu du segment $[AA']$. Quelle transformation connue est h ?

INDICE

Outil : traduis le milieu par une égalité de vecteurs, puis compare avec la définition de la symétrie centrale.

CORRIGÉ

Rapport. Le point Ω est le milieu de $[AA']$, donc $\overrightarrow{\Omega A'} = -\overrightarrow{\Omega A}$. D'après la définition de l'homothétie, $k = -1$.

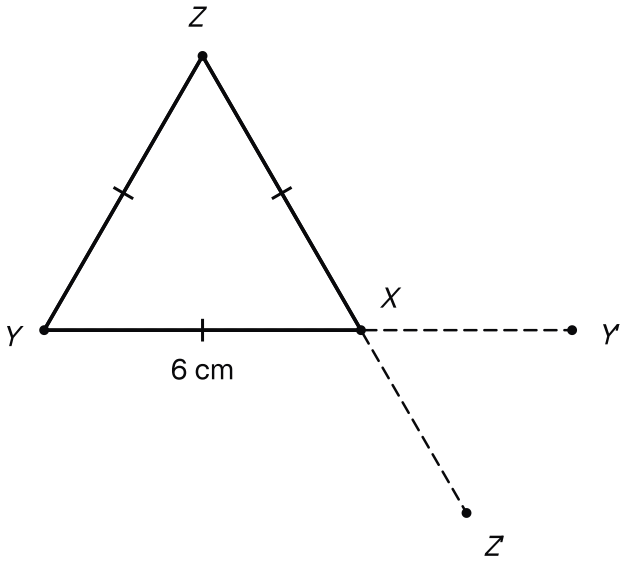
Transformation connue. L'homothétie de centre Ω et de rapport -1 associe à chaque point M le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$, c'est-à-dire tel que Ω soit le milieu de $[MM']$. C'est la définition de la symétrie centrale de centre Ω.

Conclusion. Le rapport de h est $k = -1$, et h est la symétrie centrale S_{Ω}.

Exercice 6

Longueurs d'un triangle équilatéral et de ses images

XYZ est un triangle équilatéral de côté 6 cm. On note h l'homothétie de centre X et de rapport $-\dfrac{2}{3}$, et $Y' = h(Y)$, $Z' = h(Z)$.



Le triangle équilatéral XYZ et les images Y' et Z', placées de l'autre côté du sommet X.

1.

Quelle est l'image de X par h ? Calcule XY', XZ' et $Y'Z'$.

INDICE

Outil : par une homothétie de rapport k, les distances sont multipliées par $|k|$. Le centre est sa propre image.

CORRIGÉ

Image du centre. Le centre est sa propre image : $h(X) = X$.

Facteur des distances. Par l'homothétie h, les distances sont multipliées par :

$$\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Longueurs. Les côtés de XYZ mesurent 6 cm, et h envoie X, Y, Z sur X, Y', Z' :

- $XY' = \dfrac{2}{3}\,XY = 4$ cm ;
- $XZ' = \dfrac{2}{3}\,XZ = 4$ cm ;
- $Y'Z' = \dfrac{2}{3}\,YZ = 4$ cm.

Conclusion. L'image de X est X lui-même, et $XY' = XZ' = Y'Z' = 4$ cm.

2.

Quelle est la nature du triangle $XY'Z'$? Compare son périmètre à celui de XYZ.

INDICE

Outil : compare les trois côtés trouvés, puis additionne-les.

CORRIGÉ

Nature. D'après la question 1, les trois côtés de $XY'Z'$ mesurent 4 cm : ce triangle est équilatéral.

Périmètres. Le périmètre de $XY'Z'$ vaut $3 \times 4 = 12$ cm et celui de XYZ vaut $3 \times 6 = 18$ cm. Or $\frac{2}{3} \times 18 = 12$.

Conclusion. Le triangle $XY'Z'$ est équilatéral, et son périmètre est celui de XYZ multiplié par $\frac{2}{3}$.

3.

On applique cette fois au triangle XYZ la translation de vecteur $\overrightarrow{YZ}$. Quels sont les côtés et le périmètre du triangle obtenu ?

INDICE

Outil : que fait une translation aux distances ?

CORRIGÉ

Distances. Une translation conserve les distances : chaque côté du triangle obtenu a la longueur du côté correspondant de XYZ, soit 6 cm.

Conclusion. Le triangle obtenu a trois côtés de 6 cm et un périmètre de 18 cm, comme XYZ.

Exercice 7

Trois images d'un même cercle

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre A et pour rayon 3 cm. Le point B est tel que $BA = 6$ cm.

1.

Décris l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre B et de rapport $-\dfrac{4}{3}$: position de son centre A_1, puis son rayon.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle. Commence par l'image du centre A, puis multiplie le rayon par la valeur absolue du rapport.

CORRIGÉ

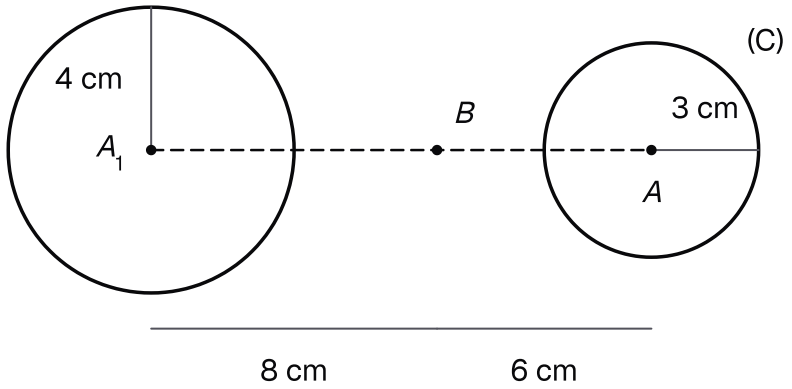
Centre. D'après la définition de l'homothétie :

$$\overrightarrow{BA_1} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}.$$

Le rapport est négatif : A_1 est sur la demi-droite opposée à $[BA)$, avec $BA_1 = \dfrac{4}{3} \times 6 = 8$ cm.

Rayon. D'après l'image d'un cercle par une homothétie, le rayon est multiplié par $\left|-\dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$. Il vaut donc $\dfrac{4}{3} \times 3 = 4$ cm.

Conclusion. L'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A_1 et de rayon 4 cm, où A_1 est sur la demi-droite opposée à $[BA)$, à 8 cm de B.



Le cercle de centre A et de rayon 3 cm, et son image de centre A1 et de rayon 4 cm, de l'autre côté de B.

2.

Décris l'image de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. Calcule la distance de B au nouveau centre A_2 .

INDICE

Outil : l'image d'un cercle par une translation. Écris l'égalité qui définit A_2 à partir de A.

CORRIGÉ

Centre. D'après la définition de la translation, $\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BA}$: le point A est le milieu de $[BA_2]$. Donc $BA_2 = 2 \times 6 = 12$ cm.

Rayon. D'après l'image d'un cercle par une translation, le rayon ne change pas : il vaut 3 cm.

Conclusion. L'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A_2 et de rayon 3 cm, et $BA_2 = 12$ cm.

3.

(Δ) est une droite qui passe par A. Quelle est l'image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$?

INDICE

Outil : l'image d'un cercle par une symétrie axiale. Où se trouve l'image du centre A ?

CORRIGÉ

Image du centre. Le centre A est sur l'axe (Δ) : il est sa propre image.

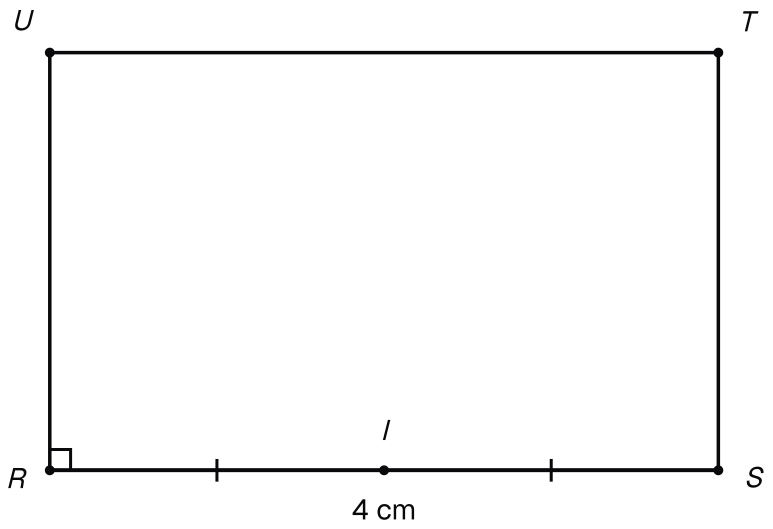
Cercle image. D'après l'image d'un cercle par une symétrie axiale, l'image de $(\mathcal{C})$ a pour centre l'image de A, c'est-à-dire A, et garde le rayon 3 cm.

Conclusion. L'image de $(\mathcal{C})$ par $S_{(\Delta)}$ est le cercle $(\mathcal{C})$ lui-même.

Exercice 8

Le milieu d'un côté d'un rectangle

$RSTU$ est un rectangle, ses sommets nommés dans cet ordre, avec $RS = 4$ cm. Le point I est le milieu du côté $[RS]$.



Le rectangle RSTU, de côté RS = 4 cm, et le milieu I de [RS].

1.

On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Quelles sont les images de R et de S par t ?

INDICE

Outil : la définition de la translation ; compare $\overrightarrow{RU}$ et $\overrightarrow{ST}$ dans le rectangle.

CORRIGÉ

Image de R. D'après la définition de la translation, l'image de R est le point M' tel que $\overrightarrow{RM'} = \overrightarrow{RU}$: c'est U.

Image de S. Dans le rectangle $RSTU$, les côtés opposés $[RU]$ et $[ST]$ sont parallèles, de même longueur et de même sens :

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RU}.$$

D'après la même définition, l'image de S est donc T.

Conclusion. $t(R) = U$ et $t(S) = T$.

2.

Déduis-en l'image de I par t.

INDICE

Outil : la conservation du milieu. I est le milieu d'un segment dont tu connais les images des extrémités.

CORRIGÉ

Milieu. Le point I est le milieu de $[RS]$, et t envoie R sur U et S sur T. D'après la conservation du milieu par la translation t, l'image de I est le milieu du segment $[UT]$.

Conclusion. L'image de I par t est le milieu J du côté $[UT]$.

3.

On note h l'homothétie de centre R et de rapport 3, et $S' = h(S)$, $I' = h(I)$. Justifie que I' est le milieu de $[RS']$, puis calcule RS' et RI'.

INDICE

Outil : l'image de R par h, puis la conservation du milieu par h. Pour les longueurs, les distances sont multipliées par 3.

CORRIGÉ

Milieu. Le centre est sa propre image : $h(R) = R$. Le point I est le milieu de $[RS]$: d'après la conservation du milieu par l'homothétie h, son image I' est le milieu de $[RS']$.

Longueurs. Par h, les distances sont multipliées par 3. Avec $RS = 4$ cm et $RI = 2$ cm :

- $RS' = 3 \times 4 = 12$ cm ;
- $RI' = 3 \times 2 = 6$ cm.

Conclusion. I' est le milieu de $[RS']$, avec $RS' = 12$ cm et $RI' = 6$ cm, soit la moitié de RS'.