BURHAN

Les transformations dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

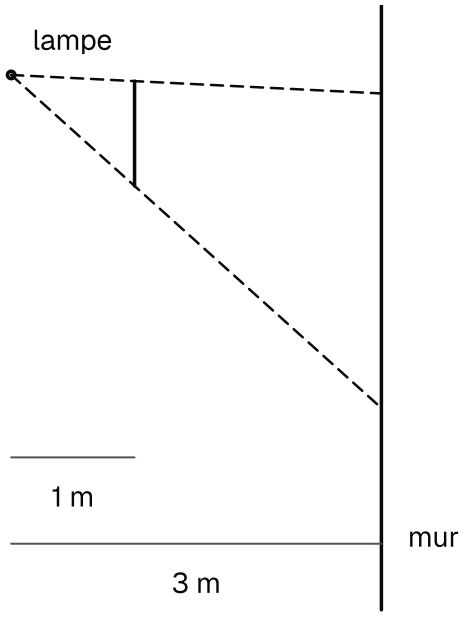
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/transformations-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
Les transformations dans le plan	Semestre 2

Agrandir sans déformer

Le soir, tu poses une lampe sur la table, face à un mur. Entre les deux, tu tiens un triangle découpé dans du carton, parallèle au mur. Son ombre apparaît sur le mur : c'est encore un triangle, mais plus grand.

La lampe est à 1 m du carton et à 3 m du mur.



Vue de côté de la scène : la lampe, le carton à un mètre d'elle, le mur à trois mètres, et deux rayons qui frôlent les bords du carton.

Devine : Une prédiction

Un côté du triangle en carton mesure 10 cm. Combien mesure le côté correspondant de son ombre ?

A. 10 cm, comme le carton.

Faux.

L'ombre est plus grande que le carton : les rayons s'écartent en partant de la lampe.

B. 20 cm.

Faux.

Tu as compté l'écart de 2 m entre le carton et le mur. Ce qui compte, c'est le rapport des distances à la lampe.

C. 30 cm.

Juste.

Juste : le mur est trois fois plus loin de la lampe que le carton.

D. 90 cm.

Faux.

Ce serait multiplier deux fois par 3 : les longueurs ne sont multipliées qu'une fois.

Correction

Chaque rayon part de la lampe. Sur un même rayon, le point du mur est trois fois plus loin de la lampe que le point du carton.

Les longueurs de l'ombre sont donc multipliées par 3 : $3 \times 10 = 30$ cm.

Les angles, eux, ne changent pas : l'ombre a la même forme. Tu le justifieras dans ce chapitre.

Cette ombre est l'image du carton par une **homothétie**, de centre la lampe.

Dans ce chapitre, tu revois d'abord les symétries et la translation du collège, écrites avec des vecteurs. Tu découvres ensuite l'homothétie. Puis tu apprends ce que ces transformations conservent : milieux, alignements, parallélisme, longueurs, angles.

Tu t'en sers pour démontrer des propriétés de figures. Ton outil principal est le calcul vectoriel : relation de Chasles et vecteurs colinéaires.

Rappels : symétries et translation

Ce que tu sais déjà

Rappel du collège : trois transformations te sont familières.

- La **symétrie centrale** de centre Ω : Ω est le milieu du segment qui joint un point à son image.
- La **symétrie axiale** d'axe (Δ) : l'axe est la médiatrice de ce segment.
- La **translation** : chaque point glisse dans la même direction, dans le même sens et de la même longueur.

Ce chapitre les écrit avec des vecteurs : c'est leur **définition vectorielle**.

Devine : Une image dans un parallélogramme

Trace un parallélogramme $ABCD$ de centre O, point d'intersection de ses diagonales. Quelle est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O ?

A. Le point C.

Juste.

Juste : les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu, O.

B. Le point B.

Faux.

O n'est pas le milieu de $[AB]$: il est le milieu des diagonales.

C. Le point D.

Faux.

$[AD]$ est un côté, pas une diagonale : son milieu n'est pas O.

D. Le point A lui-même.

Faux.

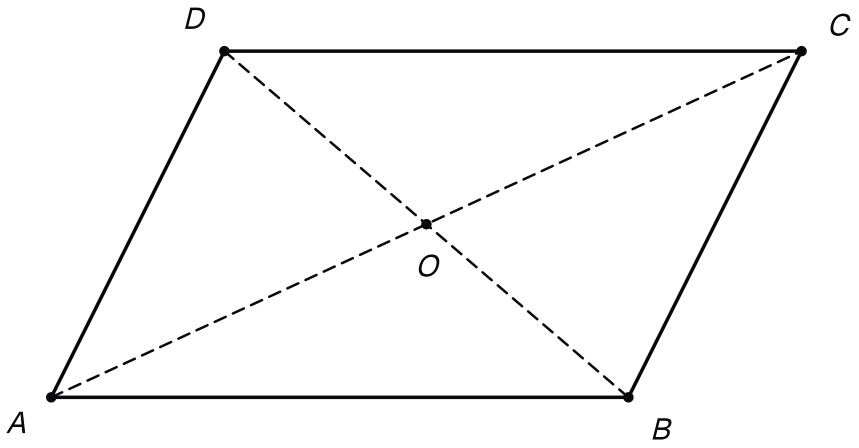
Seul le centre O est sa propre image.

Correction

Rappel du collège : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc O est le milieu de $[AC]$, et l'image de A est C.

Avec des vecteurs :

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}.$$



Le parallélogramme ABCD et ses deux diagonales, qui se croisent au point O.

Les deux symétries, avec des vecteurs

Définition : Symétrie centrale

Soit Ω un point du plan. La **symétrie centrale de centre** Ω, notée S_Ω, associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}.$$

- **Définition affine** : $M' = S_\Omega(M)$ si et seulement si Ω est le milieu du segment $[MM']$.

- Le centre est sa propre image : $S_\Omega(\Omega) = \Omega$.

Exemple : la symétrie centrale dans le parallélogramme

Reprends le parallélogramme $ABCD$ de centre O. Comme O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, la définition affine de la symétrie centrale donne $S_O(A) = C$ et $S_O(B) = D$.

Avec des vecteurs : $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$.

De même, $S_O(C) = A$: l'image de C est le point de départ A.

Définition : Symétrie axiale

Soit (Δ) une droite du plan. La **symétrie axiale d'axe** (Δ), notée $S_{(\Delta)}$, associe à chaque point M du plan le point M' défini ainsi :

- si M appartient à (Δ), alors $M' = M$;
- si M n'appartient pas à (Δ), alors M' est le point tel que (Δ) soit la **médiatrice** du segment $[MM']$.

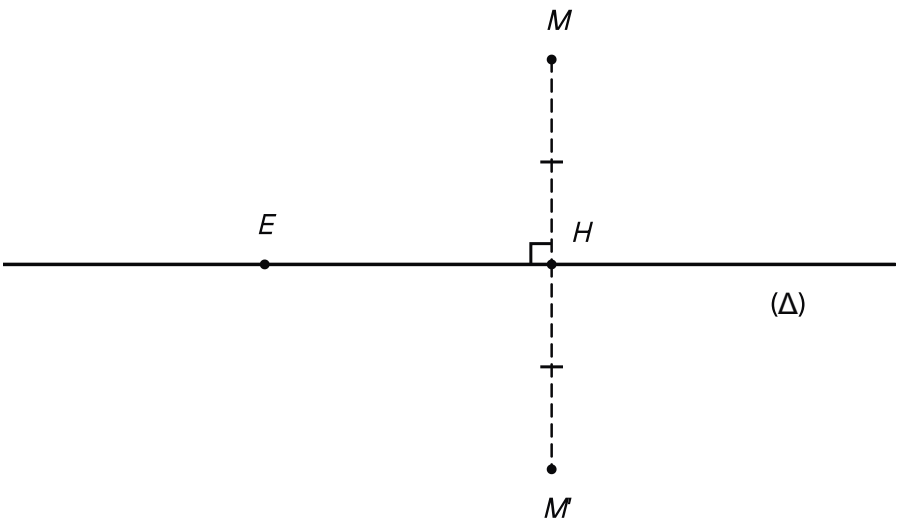
Forme vectorielle : si H est le point d'intersection de (Δ) et de la perpendiculaire à (Δ) passant par M, alors M' est le point tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$.

Exemple : un point sur l'axe, un point hors de l'axe

Trace une droite (Δ), un point E sur (Δ) et un point M hors de (Δ).

- E appartient à l'axe : d'après la définition de la symétrie axiale, $S_{(\Delta)}(E) = E$.
- Pour M, trace la perpendiculaire à (Δ) passant par M ; elle coupe (Δ) en H. Place M' tel que $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$, de l'autre côté de l'axe.

Alors H est le milieu de $[MM']$, et (MM') est perpendiculaire à (Δ) en H. Donc (Δ) est la médiatrice de $[MM']$: $M' = S_{(\Delta)}(M)$.



Un point de l'axe reste en place ; le point M passe de l'autre côté, et l'axe coupe [MM'] perpendiculairement en son milieu H.

La translation, avec des vecteurs

Définition : Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur. La **translation de vecteur** $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, associe à chaque point M du plan le point M' tel que

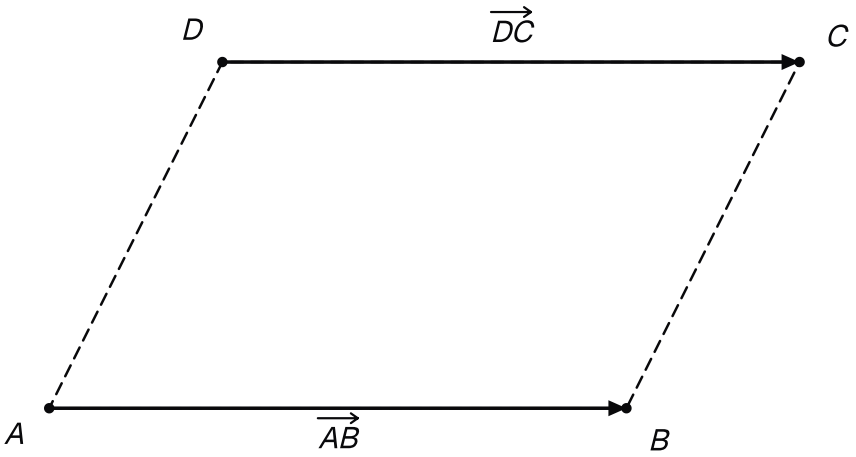
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

- **Définition affine** : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $M' = t_{\vec{u}}(M)$ si et seulement si $ABM'M$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- La translation de vecteur nul associe à chaque point le point lui-même.

Exemple : la translation dans le parallélogramme

Dans le parallélogramme $ABCD$, on a $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. D'après la définition de la translation, l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc C. L'image de A est B.

Vérifie la définition affine : avec $M = D$ et $M' = C$, le quadrilatère $ABM'M$ est $ABCD$, qui est bien un parallélogramme.



Dans le parallélogramme ABCD, les flèches de A vers B et de D vers C sont égales : la translation qui envoie A sur B envoie aussi D sur C.

Reconnaître, puis à toi

Vérifie : Quelle transformation ?

À chaque point M, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$, où A est un point fixé. De quelle transformation s'agit-il ?

A. La translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ change avec M : une translation déplace tous les points du même vecteur.

B. La symétrie centrale de centre A.

Juste.

Juste : c'est la définition vectorielle de S_A.

C. Une symétrie axiale d'axe passant par A.

Faux.

Aucun axe n'apparaît dans l'égalité ; elle place A au milieu de $[MM']$.

D. La transformation qui laisse chaque point en place.

Faux.

Si $M \neq A$, alors $\overrightarrow{AM'} \neq \overrightarrow{AM}$: M' n'est pas M.

Correction

L'égalité $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ est la définition vectorielle de la symétrie centrale de centre A. Elle dit aussi que A est le milieu de $[MM']$: c'est la définition affine.

À toi : Trois images dans le parallélogramme

Reprends le parallélogramme $ABCD$ de centre O. Donne l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis l'image de C par la symétrie centrale de centre O. Donne enfin l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Justifie chaque réponse. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris l'égalité vectorielle de chaque définition, puis cherche le point qui la vérifie.
Indice 2
Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{CB}$ va de C vers B ; compare-le à $\overrightarrow{AD}$ et à $\overrightarrow{DA}$.

Réponse
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: d'après la définition de la translation, l'image de B est C.
- O est le milieu de $[CA]$: d'après la définition affine de la symétrie centrale, $S_O(C) = A$.
- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$: d'après la définition de la translation, l'image de D est A.

L'homothétie

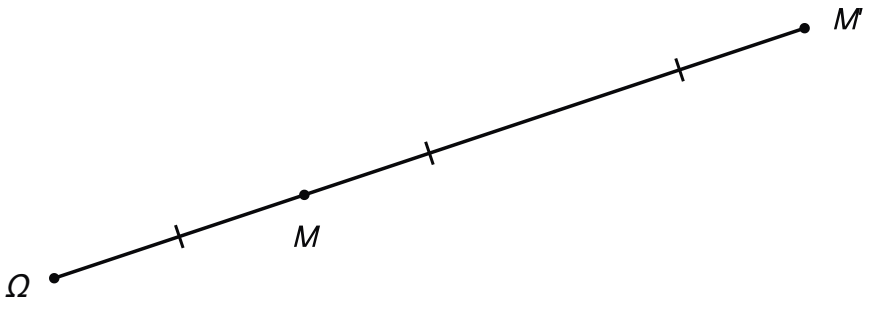
Agrandir à partir d'un point

Intuition. Reprends la lampe, que l'on note Ω. Un point M du carton a son ombre M' sur le mur. Le rayon lumineux passe par Ω, M et M' : ces trois points sont alignés, et M' est du même côté que M.

Le mur est trois fois plus loin que le carton, donc $\Omega M' = 3\,\Omega M$. Avec des vecteurs :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = 3\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

Remplace 3 par un réel k : tu obtiens une nouvelle transformation.



Sur un même rayon issu de la lampe Ω, l'ombre M' est trois fois plus loin de Ω que le point M du carton.

Devine : Placer une image

Soit Ω et M deux points tels que $\Omega M = 3$ cm. Où se trouve le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\,\overrightarrow{\Omega M}$?

A. Au milieu du segment $[\Omega M]$.

Faux.
Le milieu P vérifie $\overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{\Omega P}$: tu as inversé les rôles des deux points.

B. Sur la demi-droite $[\Omega M)$, à 5 cm de Ω.

Faux.
Tu as ajouté 2 cm ; or le vecteur est multiplié par 2.

C. Sur la demi-droite $[\Omega M)$, à 6 cm de Ω.

Juste.
Juste : même sens que $\overrightarrow{\Omega M}$, et deux fois plus long.

D. De l'autre côté de Ω, à 6 cm de Ω.

Faux.
Le réel 2 est positif : les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ ont le même sens.

Correction
Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $2\,\overrightarrow{\Omega M}$ sont égaux. Ils ont le même sens, car $2 > 0$: M' est sur la demi-droite $[\Omega M)$.

Sa distance à Ω est $2 \times 3 = 6$ cm. Le point M est alors le milieu de $[\Omega M']$.

Définition et premiers exemples

Définition : Homothétie

Soit Ω un point du plan et k un réel **non nul**. L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** associe à chaque point M du plan le point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

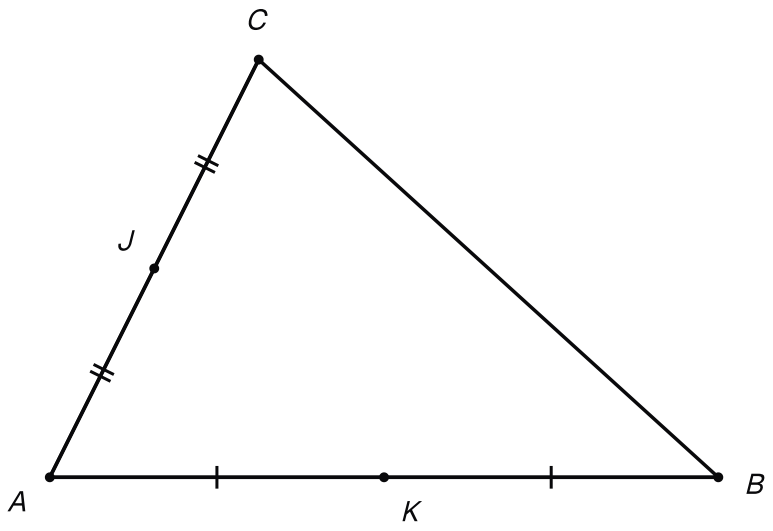
- Le centre est sa propre image, et les points Ω, M et M' sont alignés.
- Si $k > 0$, le point M' appartient à la demi-droite $[\Omega M)$; si $k < 0$, il appartient à la demi-droite opposée. Dans les deux cas, $\Omega M' = |k|\,\Omega M$.
- L'homothétie de rapport 1 associe à chaque point le point lui-même ; l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre Ω.

Exemple : un rapport positif

Trace un triangle ABC. Note K le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

Comme K est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AK}$. D'après la définition de l'homothétie, B est l'image de K par l'homothétie de centre A et de rapport 2. De même, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AJ}$: l'image de J est C.

Le rapport est positif : chaque image est du même côté de A que son point de départ.



K et J coupent en deux les côtés issus de A : en doublant la distance à A, on arrive en B et en C.

Devine : Un rapport négatif

Soit Ω et M deux points tels que $\Omega M = 3$ cm. Où se trouve le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -2\,\overrightarrow{\Omega M}$?

A. Sur la demi-droite $[\Omega M)$, à 6 cm de Ω.

Faux.

Le signe moins change le sens : $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont de sens contraires.

B. De l'autre côté de Ω, à 3 cm de Ω.

Faux.

Tu as gardé la distance ΩM ; or elle est multipliée par $|-2| = 2$.

C. De l'autre côté de Ω, à 6 cm de Ω.

Juste.

Juste : sens contraire, car $-2 < 0$, et distance $2 \times 3 = 6$ cm.

D. Au milieu du segment $[\Omega M]$.

Faux.

Le milieu correspond au rapport $\dfrac{1}{2}$; ici, le rapport vaut -2.

Correction

Le réel -2 est négatif : $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont de sens contraires, donc M' est sur la demi-droite opposée à $[\Omega M)$.

Sa valeur absolue est 2 : la distance de M' à Ω est $2 \times 3 = 6$ cm.

Exemple : un rapport négatif, avec des mesures

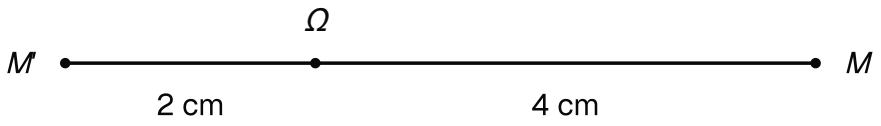
Trace deux points Ω et M tels que $\Omega M = 4$ cm. Construis l'image M' de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

D'après la définition de l'homothétie,

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

Le rapport est négatif : M' est sur la demi-droite opposée à $[\Omega M)$. Sa distance à Ω est $\dfrac{1}{2} \times 4 = 2$ cm.

Le centre Ω est donc entre M et M', et $MM' = 4 + 2 = 6$ cm.



Avec le rapport moins un demi, l'image M' passe de l'autre côté de Ω, à 2 cm du centre, quand M est à 4 cm.

Un rapport négatif dans le triangle

Exemple : un rapport négatif

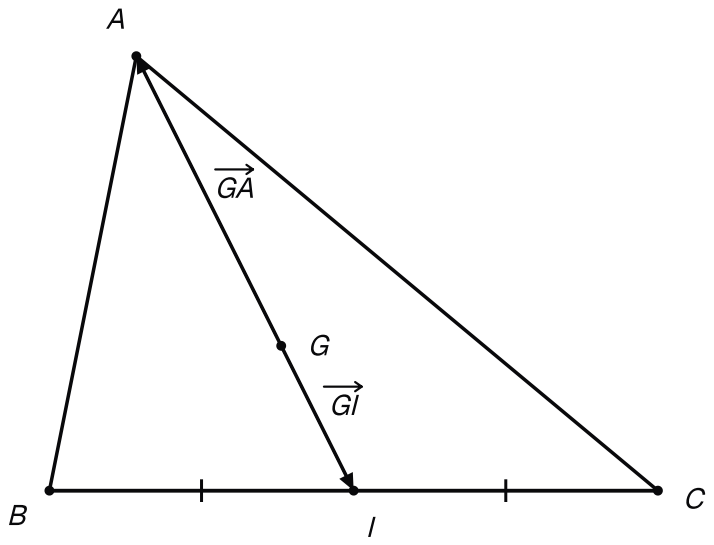
Dans le triangle ABC, note aussi I le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité.

Rappel du collège : G est le point de concours des médianes, situé aux deux tiers de chaque médiane depuis le sommet. Donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$.

Alors $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$, d'où

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GA}.$$

D'après la définition de l'homothétie, I est l'image de A par l'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$. Le rapport est négatif : I est de l'autre côté de G, à la distance $\dfrac{1}{2}\,GA$.



Depuis le centre de gravité G, les flèches vers A et vers I partent en sens contraires, la seconde deux fois plus courte.

En clair. Pour placer l'image d'un point par une homothétie, deux questions suffisent. De quel côté du centre ? Le signe de k le dit. À quelle distance du centre ? Elle est multipliée par $|k|$.

Avec $k = 2$, l'image s'éloigne du centre. Avec $k = -\frac{1}{2}$, elle passe de l'autre côté et se rapproche du centre.

La méthode et deux cas particuliers

Méthode : construire l'image d'un point par une homothétie

1. **Trace** la droite qui passe par le centre Ω et par le point M.
2. **Regarde le signe** du rapport k : positif, l'image est sur $[\Omega M)$; négatif, elle est sur la demi-droite opposée.
3. **Reporte** la distance $|k|\,\Omega M$ à partir de Ω, du bon côté.
4. **Vérifie** l'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ sur ta figure.

Attention : le signe du rapport

✗ « Le rapport vaut -3 : je place M' sur $[\Omega M)$, à la distance $3\,\Omega M$ de Ω. »

✓ Le rapport est négatif : M' est sur la demi-droite opposée à $[\Omega M)$, de l'autre côté de Ω. La distance $3\,\Omega M$ est juste ; le côté ne l'est pas. Le signe donne le côté, la valeur absolue donne la distance.

Vérifie : Deux rapports particuliers

Que fait l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 ?

A. Elle laisse chaque point à sa place.

Faux.

C'est le cas du rapport 1 : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donne $M' = M$.

B. C'est une translation de vecteur $-\overrightarrow{\Omega M}$.

Faux.

Ce vecteur dépend de M ; une translation déplace tous les points du même vecteur.

C. C'est la symétrie centrale de centre Ω.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$ est sa définition vectorielle.

D. C'est une symétrie axiale d'axe passant par Ω.

Faux.

Aucun axe n'intervient : Ω est le milieu de $[MM']$ pour tout point M.

Correction

Avec $k = -1$, la définition s'écrit $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$: c'est la définition vectorielle de la symétrie centrale de centre Ω.

Avec $k = 1$, elle s'écrit $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$, donc $M' = M$: chaque point est sa propre image.

Lire un rapport, puis à toi

Attention : l'ordre des points dans l'égalité

✗ « M est le milieu de $[\Omega M']$, donc $\overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{\Omega M'}$. »

✓ Si M est le milieu de $[\Omega M']$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\,\overrightarrow{\Omega M}$. L'image se place à gauche, le point de départ à droite.

L'égalité fausse décrirait l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$: elle rapprocherait les points du centre au lieu de les éloigner.

Exemple : lire le rapport sur la scène de la lampe

La lampe Ω est à 110 cm d'un point M du carton. L'ombre M' de ce point est sur le rayon issu de Ω, à 330 cm de Ω.

Le point M' est sur la demi-droite $[\Omega M)$: le rapport est positif. Les distances donnent sa valeur :

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M} = \frac{330}{110} = 3.$$

L'ombre est donc l'image du carton par l'homothétie de centre Ω et de rapport 3.

À toi : Trois rapports

Trace un segment $[\Omega A]$ de longueur 6 cm. Construis l'image A_1 de A par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{5}{3}$. Construis ensuite l'image A_2 par celle de rapport $-\frac{2}{3}$, puis l'image A_3 par celle de rapport -1. Donne chaque fois la distance au centre et le côté. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : le signe du rapport, puis la distance $|k|\,\Omega A$.

Indice 2

Les distances au centre valent $\frac{5}{3}\times 6$, $\frac{2}{3}\times 6$ et 1×6, en centimètres.

Indice 3

Point délicat : pour un rapport négatif, l'image est de l'autre côté de Ω ; ne place pas A_2 entre Ω et A.

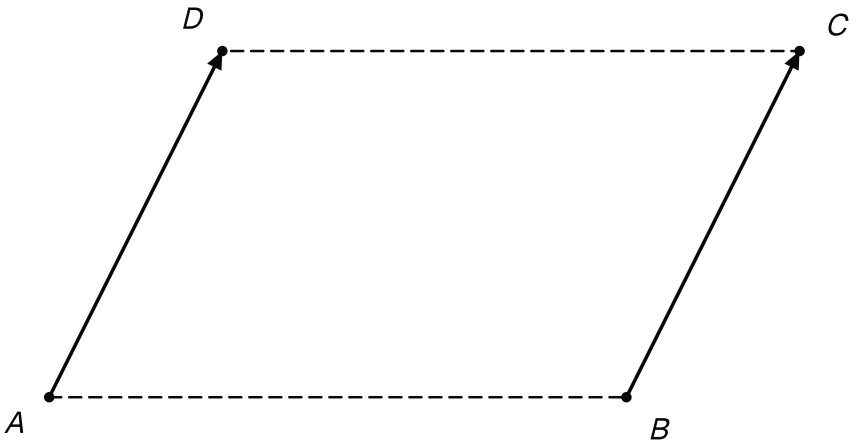
Réponse

- $k=\frac{5}{3}>0$: A_1 est sur $[\Omega A)$, à $\frac{5}{3}\times 6=10$ cm de Ω, donc à 4 cm au-delà de A.
- $k=-\frac{2}{3}<0$: A_2 est sur la demi-droite opposée, à $\left|-\frac{2}{3}\right|\times 6=4$ cm de Ω. Alors $AA_2=6+4=10$ cm.
- $k=-1$: A_3 est de l'autre côté, à 6 cm de Ω. C'est le symétrique de A par rapport à Ω, et $AA_3=12$ cm.

Propriétés caractéristiques de la translation et de l'homothétie

Un vecteur qui ne change pas

Intuition. Dans le parallélogramme $ABCD$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ envoie A sur D et B sur C. Compare sur ta figure les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que se passe-t-il pour deux points quelconques ? Fais ta prédiction.



Le vecteur AD fait glisser A jusqu'en D et B jusqu'en C ; compare ensuite les côtés du bas et du haut.

Devine : Deux points, deux images

Une translation envoie M sur M' et N sur N'. Que peux-tu dire du vecteur $\overrightarrow{M'N'}$?

A. $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$

Faux.

Ce serait le cas pour une symétrie centrale : la figure serait retournée.

B. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Juste.

Juste : le vecteur est transporté sans changement.

C. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} + \vec{u}$

Faux.

Le vecteur $\vec{u}$ s'ajoute au départ et à l'arrivée : il se compense.

D. Cela dépend des points M et N.

Faux.

Le résultat est le même pour tous les points : c'est ce qui caractérise la translation.

Correction

On a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N. Dans le parallélogramme, avec $M = A$ et $N = B$, cela donne $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux extrémités d'un vecteur avancent du même vecteur $\vec{u}$, et la relation de Chasles fait disparaître $\vec{u}$. La propriété qui suit le démontre, et elle affirme aussi la réciproque.

La propriété caractéristique de la translation

Propriété : Propriété caractéristique de la translation

Soit f une transformation qui associe à chaque point M du plan un point $M' = f(M)$. Alors f est une translation si et seulement si, **pour tous points** M et N d'images M' et N',

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

Démonstration

Étape 1. Supposons que f est la translation de vecteur $\vec{u}$. Par définition de la translation, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}.$$

Étape 2. Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N. On fixe un point A, d'image A', et on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$. Pour tout point M, la relation de Chasles et l'hypothèse appliquée à A et M donnent

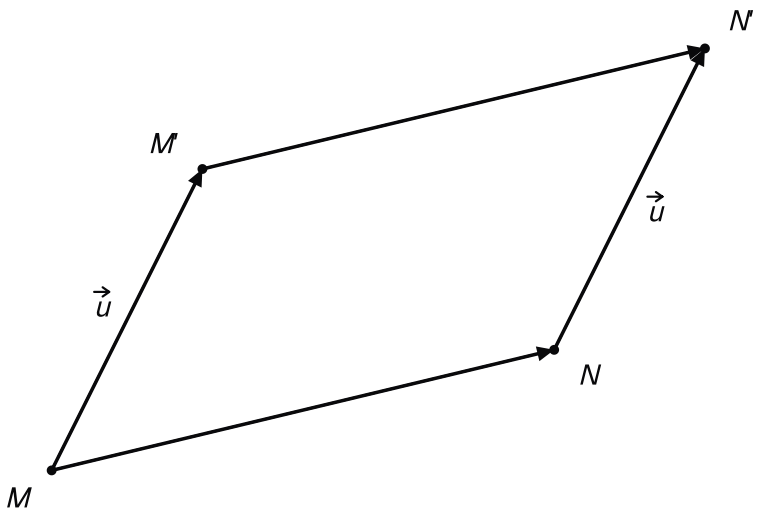
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} + \overrightarrow{AM} = \vec{u}.$$

Donc f est la translation de vecteur $\vec{u}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer $\overrightarrow{M'N'}$ à $\overrightarrow{MN}$, va de M' à N' **en passant par** M **et** N : c'est la relation de Chasles. Les vecteurs $-\vec{u}$ et $\vec{u}$ se compensent.

Pour la réciproque, fixe un point A et pose $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$. L'hypothèse montre alors que chaque point avance de ce même vecteur.



Les points M et N avancent tous deux du vecteur u ; le vecteur M'N' reproduit alors le vecteur MN.

Vérifie : Le chemin de la preuve

Dans la première étape de la preuve, quelle égalité fait apparaître $\overrightarrow{MN}$?

A. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{N'N}$

Faux.

Le dernier vecteur va de N' à N : pour arriver en N', il faut $\overrightarrow{NN'}$.

B. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

Faux.

Le chemin part de M' : le premier vecteur est $\overrightarrow{M'M}$, pas $\overrightarrow{MM'}$.

C. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'N} + \overrightarrow{NN'} + \overrightarrow{MN}$

Faux.

La somme $\overrightarrow{M'N} + \overrightarrow{NN'}$ vaut déjà $\overrightarrow{M'N'}$: le terme $\overrightarrow{MN}$ est de trop.

D. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

Juste.

Juste : de M' à M, de M à N, puis de N à N'.

Correction

La relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}.$$

Par définition de la translation, $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. Il reste $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Exemple : Contre-exemple : une homothétie qui n'est pas une translation

Reprends le triangle ABC, avec K milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AC]$. L'homothétie de centre A et de rapport 2 envoie K sur B et J sur C.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\,\overrightarrow{AJ} - 2\,\overrightarrow{AK} \\ &= 2\,\overrightarrow{KJ}.\end{aligned}$$

Comme $K \neq J$, on a $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{KJ}$. D'après la propriété caractéristique de la translation, cette homothétie n'est pas une translation. Un seul couple de points suffit pour le prouver.

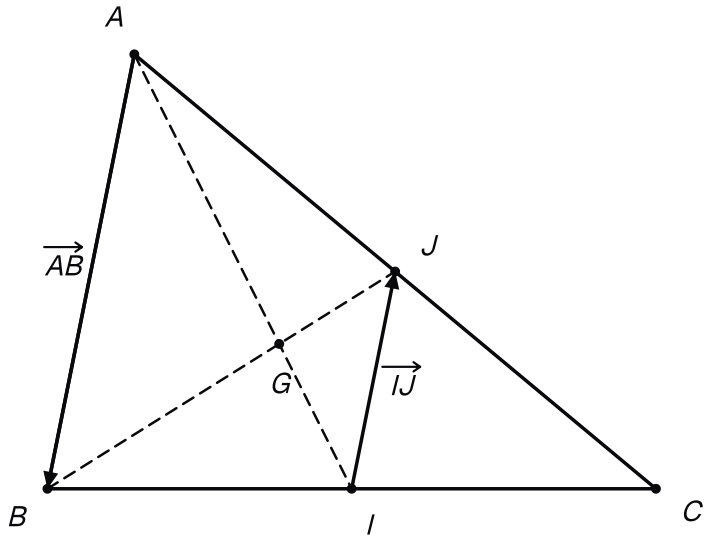
La propriété caractéristique de l'homothétie

Intuition. Dans le triangle ABC, l'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ envoie A sur I. Elle envoie de même B sur J, milieu de $[CA]$, car G est aussi aux deux tiers de la médiane issue de B.

Rappel du collège : la droite (IJ) des milieux est parallèle à (AB), et $IJ = \dfrac{1}{2}\,AB$. Les vecteurs sont de sens contraires :

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}.$$

Pourquoi est-ce vrai ? En passant par le centre G, chaque morceau est multiplié par le même rapport.



Le centre G envoie A sur I et B sur J : la flèche de I vers J est deux fois plus courte que celle de A vers B, et de sens contraire.

Propriété : Propriété caractéristique de l'homothétie

Soit k un réel non nul, et f une transformation qui associe à chaque point M du plan un point $M' = f(M)$.

- Si f est une homothétie de rapport k, alors, **pour tous points** M et N d'images M' et N', $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.
- Réciproquement, si $k \neq 1$ et si $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N, alors f est une homothétie de rapport k.

Cas de la symétrie centrale ($k = -1$) : f est une symétrie centrale si et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N.

Démonstration

Étape 1. Si f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k, la définition de l'homothétie et la relation de Chasles donnent

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = -k\,\overrightarrow{\Omega M} + k\,\overrightarrow{\Omega N} = k\left(\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}\right) = k\,\overrightarrow{MN}.$$

Étape 2. Réciproquement, supposons $k \neq 1$ et $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N. On fixe un point A, d'image A'. Comme $k \neq 1$, on définit Ω par $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}$. Alors $\overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{\Omega A} - (1-k)\,\overrightarrow{\Omega A} = k\,\overrightarrow{\Omega A}$.

Étape 3. Pour tout point M, la relation de Chasles et l'hypothèse appliquée à A et M donnent $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{\Omega A} + k\,\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$. Donc f est l'homothétie de centre Ω et de rapport k. Pour $k = -1$: une symétrie centrale est l'homothétie de rapport -1, donc l'étape 1 s'applique, et l'homothétie obtenue à l'étape 3 est la symétrie centrale de centre Ω.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **passer par le centre**. On écrit $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'}$, puis chaque morceau vaut k fois le vecteur de départ.

Pour la réciproque, il faut d'abord **fabriquer le centre** :

$$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}.$$

Cette égalité exige $k \neq 1$. Avec $k = 1$, la propriété caractérise la translation.

Vérifie : Une hypothèse de la réciproque

Dans la réciproque, pourquoi la preuve suppose-t-elle $k \neq 1$?

A. Pour pouvoir diviser par $1 - k$ et construire le centre.
Juste.

Juste : le centre est défini par $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}$.

B. Parce qu'avec $k = 1$, ce serait une symétrie centrale.

Faux.
La symétrie centrale correspond au rapport -1, pas au rapport 1.

C. Parce qu'une homothétie de rapport 1 n'existe pas.

Faux.
Elle existe : elle laisse chaque point à sa place. Seul le rapport 0 est exclu.

D. Parce que le centre doit être le point A choisi.

Faux.
Le point A est quelconque ; le centre se construit à partir de A et de A'.

Correction
Le centre est construit par $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\,\overrightarrow{AA'}$, qui n'a de sens que si $1 - k \neq 0$. Pour $k = 1$, l'égalité $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ caractérise la translation, d'après la propriété caractéristique de la translation.

Exemple : une symétrie centrale reconnue

Dans le parallélogramme $ABCD$ de centre O, une transformation f vérifie $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N, et $f(A) = C$.

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, dans le cas de la symétrie centrale, f est une symétrie centrale. Comme $f(A) = C$, d'après la définition affine de la symétrie centrale, son centre est le milieu de $[AC]$, c'est-à-dire O.

Ainsi $f = S_O$; comme O est aussi le milieu de $[BD]$, $f(B) = D$.

Reconnaître une transformation, trouver un centre

Méthode : reconnaître une transformation

1. **Cherche** une égalité vectorielle vraie pour tous les points.
2. **Translation** : $\overrightarrow{MM'}$ est un même vecteur $\vec{u}$ pour tout M, ou bien $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ pour tous M et N.
3. **Homothétie** : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ avec un centre Ω fixe, ou bien $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ avec k différent de 0 et de 1. Pour $k = -1$, c'est une symétrie centrale.
4. **Nomme** la transformation avec tous ses éléments : son vecteur, ou son centre et son rapport.

Méthode : trouver le centre et le rapport d'une homothétie

1. **Compare** $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$, pour deux points et leurs images : le coefficient est le rapport k.
2. **Contrôle** que $k \neq 1$; sinon, cherche une translation.
3. **Trace** les droites (AA') et (BB'), pour deux points A et B distincts du centre, donc tels que $A' \neq A$ et $B' \neq B$: le centre est sur chacune. Si ces droites sont distinctes, le centre est leur point commun ; sinon, emploie $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{AA'}$.
4. **Vérifie** que $\overrightarrow{\Omega A'} = k\,\overrightarrow{\Omega A}$.

Exemple : retrouver le centre de gravité

Dans le triangle ABC, une homothétie envoie A sur I et B sur J. D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, son rapport k vérifie $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $k = -\dfrac{1}{2}$.

Le centre est sur les droites (AI) et (BJ). Ce sont deux médianes, qui se coupent en G : le centre est G.

Contrôle : $\overrightarrow{GI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

À toi : Le chemin inverse

Dans le triangle ABC, I, J et K sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et G est le centre de gravité. Une homothétie envoie I sur A et J sur B. Détermine son rapport et son centre. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : compare $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$, puis trace (IA) et (JB).
Indice 2
Tu sais que $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; exprime $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.
Indice 3
Point délicat : l'image est à gauche, $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{IJ}$; le rapport n'est donc pas $-\dfrac{1}{2}$.

Réponse
D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, le rapport k vérifie $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{IJ}$. Comme $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{IJ}$: $k = -2$.

Le centre est sur les médianes (IA) et (JB), donc c'est G.

Contrôle : $\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GI}$, car $\overrightarrow{GI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Conservation du coefficient de colinéarité, du milieu, de l'alignement et du parallélisme

Un coefficient qui résiste

Rappel du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan » : si $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, les deux vecteurs sont colinéaires, et α est leur **coefficient de colinéarité**. Une transformation envoie A, B, C, D sur A', B', C', D'. Le coefficient change-t-il ? Fais ta prédiction.

Devine : Un coefficient après une homothétie

Par une homothétie de rapport -2, les points A, B, C, D ont pour images A', B', C', D'. On sait que $\overrightarrow{CD} = 3\,\overrightarrow{AB}$. Que vaut $\overrightarrow{C'D'}$?

A. $-6\,\overrightarrow{A'B'}$

Faux.

Tu as multiplié le coefficient par le rapport ; or $\overrightarrow{A'B'}$ est lui aussi multiplié par -2.

B. $-\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{A'B'}$

Faux.

Diviser par le rapport n'a pas de raison ici : le rapport se simplifie.

C. $3\,\overrightarrow{A'B'}$

Juste.

Juste : le coefficient de colinéarité ne change pas.

D. $6\,\overrightarrow{A'B'}$

Faux.

Le coefficient n'est pas multiplié par $|-2|$: il ne change pas.

Correction

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, $\overrightarrow{C'D'} = -2\,\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{A'B'} = -2\,\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'D'} &= -2 \times 3\,\overrightarrow{AB} \\ &= 3\left(-2\,\overrightarrow{AB}\right) \\ &= 3\,\overrightarrow{A'B'}.\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai ? Par une translation, une symétrie centrale ou une homothétie, tous les vecteurs sont multipliés par un même réel k, qui se simplifie.

La conservation du coefficient de colinéarité

Propriété : Conservation du coefficient de colinéarité

Soit f une translation, une symétrie centrale ou une homothétie. Soit A, B, C, D quatre points d'images A', B', C', D', et α un réel. Si

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}, \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{C'D'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}.$$

On dit que f **conserve le coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.

Démonstration

Étape 1. Il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N : $k = 1$ pour une translation, d'après la propriété caractéristique de la translation ; k est le rapport pour une homothétie, d'après la propriété caractéristique de l'homothétie ; $k = -1$ pour une symétrie centrale, qui est l'homothétie de rapport -1.

Étape 2. Si $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, alors

$$\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{CD} = k\alpha\,\overrightarrow{AB} = \alpha\left(k\,\overrightarrow{AB}\right) = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}.$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une seule idée : il existe un réel k, **le même pour tous les vecteurs**, tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. Il vaut 1 pour une translation, -1 pour une symétrie centrale, le rapport pour une homothétie.

Dans $\overrightarrow{C'D'} = k\alpha\,\overrightarrow{AB}$, on regroupe $k\,\overrightarrow{AB}$, qui est $\overrightarrow{A'B'}$. Le réel α reste seul devant.

Vérifie : D'où vient le réel commun ?

Pour une homothétie de rapport $k \neq 1$, quel énoncé donne $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{CD}$ dans la preuve ?

A. La définition de la translation.

Faux.

Une translation donne le réel 1 ; ici, la transformation est une homothétie.

B. La propriété caractéristique de l'homothétie.

Juste.

Juste : elle s'applique à tous les points, donc à C et à D.

C. La conservation des distances.

Faux.

Une homothétie multiplie les distances, et des longueurs égales ne font pas des vecteurs égaux.

D. La relation de Chasles, à elle seule.

Faux.

Chasles sert dans la preuve de la propriété caractéristique, mais ne fournit pas le rapport.

Correction

La propriété caractéristique de l'homothétie donne $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N. Avec $M = C$ et $N = D$, on obtient $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{CD}$. La suite du calcul fait disparaître k.

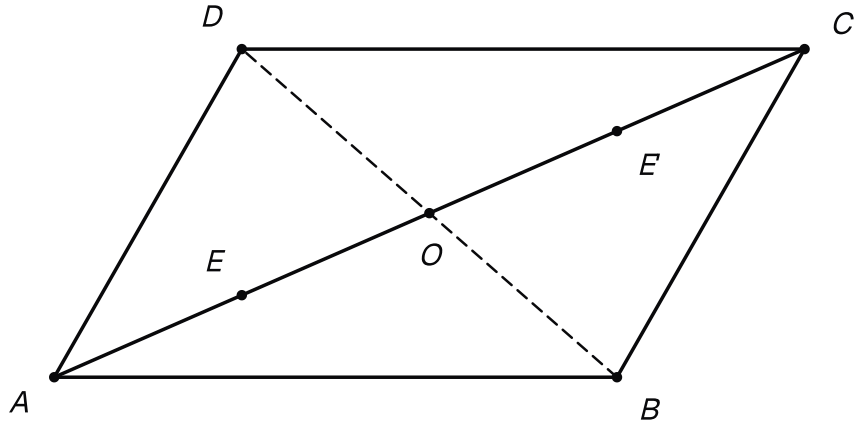
Exemple : un point de la diagonale

Dans le parallélogramme $ABCD$ de centre O, soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. La symétrie centrale S_O envoie A sur C et C sur A ; note E' l'image de E.

D'après la conservation du coefficient de colinéarité par S_O,

$$\overrightarrow{CE'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.$$

Le point E' est donc sur la diagonale $[AC]$, au quart depuis C. Si $AC = 8$ cm, alors $CE' = 2$ cm et $AE' = 6$ cm.



E est au quart de la diagonale en partant de A ; son image E' est au quart en partant de C.

Où va un milieu ?

Devine : Où va un milieu ?

Dans le parallélogramme $ABCD$ de centre O, le point M est le milieu de $[AB]$. Où se trouve l'image de M par la symétrie centrale de centre O ?

A. Au milieu de $[AD]$.

Faux.
$[AD]$ n'est pas l'image de $[AB]$: S_O envoie A sur C et B sur D.

B. Au point O.

Faux.
Seul le centre est sa propre image, et M n'est pas O : O n'est pas sur le côté $[AB]$.

C. En un point qui n'est sur aucun côté.

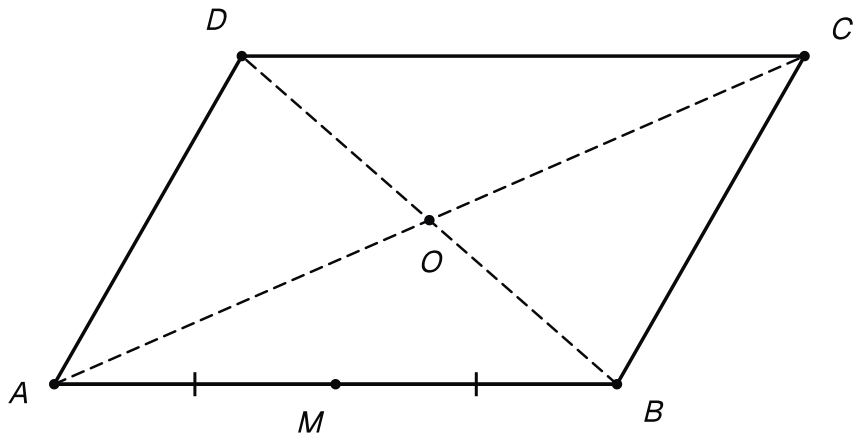
Faux.
S_O envoie A sur C et B sur D : l'image de M reste entre C et D.

D. Au milieu de $[CD]$.

Juste.
Juste : S_O envoie A sur C et B sur D, et le coefficient $\frac{1}{2}$ passe aux images.

Correction
La symétrie S_O envoie A sur C et B sur D. Note M' l'image de M.

Comme $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, la conservation du coefficient de colinéarité donne $\overrightarrow{CM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. Donc M' est le milieu de $[CD]$.



Le parallélogramme ABCD, son centre O et le milieu M du côté [AB] ; l'image de M reste à placer.

Rappel du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan » : trois propriétés s'écrivent avec un coefficient de colinéarité.

- I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Si $A \neq B$, les points A, B, C sont alignés si et seulement s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le coefficient est conservé, donc chaque propriété passe aux images.

Milieu, alignement, parallélisme

Propriété : Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme

Soit f une translation, une symétrie centrale ou une homothétie, et notons M' l'image d'un point M.

- Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.
- Si A, B et C sont alignés, alors A', B' et C' sont alignés.

- Si $A \neq B$, $C \neq D$ et si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

Démonstration

Étape 1. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, $\overrightarrow{A'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$: I' est le milieu de $[A'B']$.

Étape 2. Si $A = B$, alors $A' = B'$ et les trois images sont alignées. Sinon, C appartient à la droite (AB) : il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$: A', B' et C' sont alignés.

Étape 3. Si (AB) et (CD) sont parallèles, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$. Or, d'après les propriétés caractéristiques de la translation et de l'homothétie, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$; comme $A \neq B$, on a $A' \neq B'$, et de même $C' \neq D'$. Les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont donc parallèles.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque propriété se **traduit** d'abord par une égalité vectorielle avec un coefficient : $\frac{1}{2}$ pour un milieu, un réel α pour un alignement ou un parallélisme. La conservation du coefficient la **transporte** ensuite aux images.

Pour le parallélisme, une précaution : les points images doivent être distincts. C'est vrai, car $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k \neq 0$.

Vérifie : Une précaution

Dans la troisième étape de la preuve, pourquoi les points A' et B' sont-ils distincts ?

A. Parce que la transformation conserve les distances.
Faux.
Une homothétie de rapport 3 ne conserve pas les distances : la raison est ailleurs.

B. Parce que $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.
Faux.
C'est ce qu'on veut démontrer : on ne peut pas s'en servir.

C. Parce que deux images sont toujours distinctes.
Faux.
Il faut une raison, et elle dépend de A et de B : le cas $A = B$ donnerait $A' = B'$.

D. Parce que $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, avec $k \neq 0$ et $A \neq B$.
Juste.
Juste : un vecteur non nul multiplié par un réel non nul n'est pas nul.

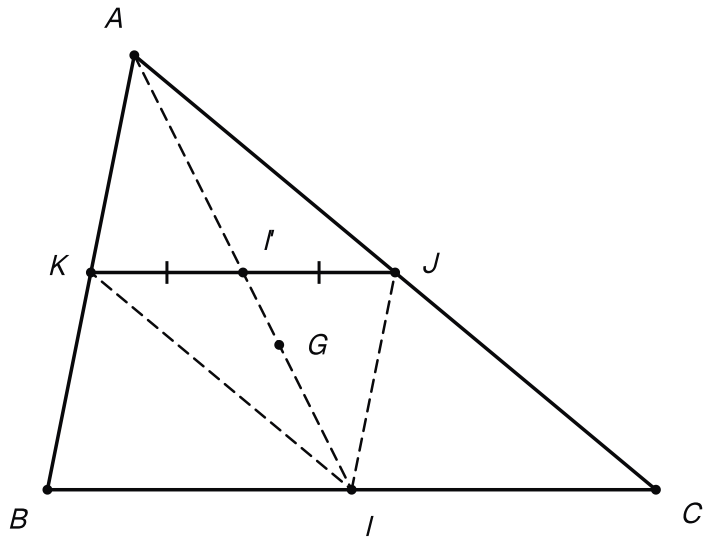
Correction
On a $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, avec $k \neq 0$. Comme $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est pas nul, donc $\overrightarrow{A'B'}$ non plus : $A' \neq B'$. De même $C' \neq D'$, et les deux droites images existent.

Exemple : un milieu sur une médiane

Dans le triangle ABC, l'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ envoie A sur I, B sur J et C sur K. Soit I' l'image de I.

Comme I est le milieu de $[BC]$, la conservation du milieu par h montre que I' est le milieu de $[JK]$.

De plus, d'après la définition de l'homothétie, G, I et I' sont alignés. Donc le milieu de $[JK]$ est sur la médiane (AI), qui passe par G et par I.



Le milieu I' de [JK] se trouve sur la médiane issue de A, entre A et G.

Démontrer avec une transformation

Méthode : démontrer un alignement, un parallélisme ou un milieu

1. **Choisis** une transformation qui envoie des points connus sur les points de ta question.
2. **Établis** la propriété sur les points de départ : milieu, alignement, parallélisme, ou égalité $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.
3. **Transporte**-la par la conservation du coefficient de colinéarité, en nommant la transformation.
4. **Conclus** sur les images, par une phrase complète.

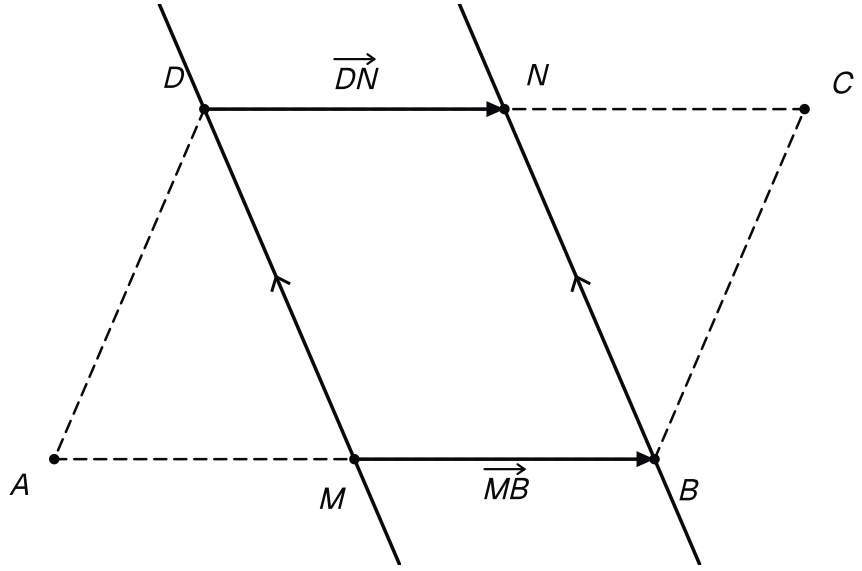
Exemple : deux droites parallèles par une translation

Dans le parallélogramme $ABCD$, soit M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[DC]$. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MB}.\end{aligned}$$

D'après la définition de la translation, celle de vecteur $\overrightarrow{MB}$ envoie M sur B et D sur N. D'après sa propriété caractéristique, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MD}$.

Ces vecteurs sont égaux et non nuls : les droites (MD) et (BN) sont parallèles.



La translation de vecteur MB envoie M sur B et D sur N : les droites (MD) et (BN) sont parallèles.

À toi : Un point d'un côté, transporté

Dans le triangle ABC, I, J et K sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et G est le centre de gravité. L'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A, B, C sur I, J, K. Soit P le point de $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, et P' son image par h. Montre que P' est sur le segment $[IJ]$, et précise sa position. Montre ensuite que les droites (CP) et (KP') sont parallèles. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pense à la conservation du coefficient de colinéarité par h.

Indice 2

Le coefficient $\frac{1}{4}$ passe aux images : écris l'égalité entre $\overrightarrow{IP'}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Indice 3

Point délicat : pour le parallélisme, emploie la propriété caractéristique de l'homothétie avec C et P, et vérifie que $C \neq P$.

Réponse

D'après la conservation du coefficient de colinéarité par h, l'égalité $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donne $\overrightarrow{IP'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IJ}$. Le point P' est donc sur $[IJ]$, au quart depuis I.

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie, $\overrightarrow{KP'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$. Or $C \neq P$, car P est sur (AB) et C n'y est pas. Les vecteurs sont colinéaires et non nuls : (CP) et (KP') sont parallèles.

Remarque : Coin devoir : rédiger avec une transformation

En devoir, une preuve par une transformation se rédige en trois temps : la transformation, la propriété de départ, la conclusion.

Écris par exemple : « L'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur I et B sur J. Comme K est le milieu de $[AB]$, d'après la conservation du milieu par h, l'image de K est le milieu de $[IJ]$. »

Nomme toujours la transformation, avec son centre et son rapport, ou avec son vecteur.

Transformations et distances : translation, symétrie centrale, homothétie

Mesurer avant, mesurer après

Intuition. Dans le parallélogramme $ABCD$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ envoie A sur D et B sur C : $DC = AB$, la longueur ne change pas.

Dans le triangle ABC, l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A sur I et B sur J : IJ vaut la moitié de AB.

Pourquoi est-ce vrai ? Une distance est la longueur d'un vecteur, et les propriétés caractéristiques donnent le vecteur image.

Devine : Une longueur image

Par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{3}{2}$, un segment $[MN]$ de longueur 4 cm a pour image un segment $[M'N']$. Combien mesure $M'N'$?

A. 6 cm

Juste.

Juste : $\left|-\frac{3}{2}\right| \times 4 = 6$.

B. -6 cm

Faux.
Une longueur n'est jamais négative : on multiplie par $|k|$, pas par k.

C. 4 cm
Faux.
Les longueurs ne sont conservées que si le rapport vaut 1 ou -1.

D. $\frac{8}{3}$ cm
Faux.
Tu as divisé par $\frac{3}{2}$; or l'image est plus longue, car $|k| > 1$.

Correction
Le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ vaut $-\frac{3}{2}$ fois le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Sa longueur vaut donc $\frac{3}{2}$ fois celle de $[MN]$: $\frac{3}{2} \times 4 = 6$ cm.

Le signe de k change le sens du vecteur, pas sa longueur.

Distances : translation, symétrie centrale, homothétie

Propriété : Distances : translation, symétrie centrale, homothétie

Soit M et N deux points du plan, d'images M' et N'.

- Par une translation ou par une symétrie centrale, $M'N' = MN$: ces transformations **conservent les distances**.
- Par une homothétie de rapport k, $M'N' = |k|\,MN$: les distances sont **multipliées par** $|k|$.

Démonstration

Étape 1. Par une translation, la propriété caractéristique de la translation donne $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$: deux vecteurs égaux ont la même longueur, donc $M'N' = MN$.

Étape 2. Par une homothétie de rapport k, on a $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$, d'après la propriété caractéristique de l'homothétie. La longueur du vecteur $k\,\overrightarrow{MN}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{MN}$, donc $M'N' = |k|\,MN$.

Étape 3. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1, et $|-1| = 1$: elle conserve les distances.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On passe des **vecteurs** aux **longueurs**. La propriété caractéristique donne $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, ou $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. On prend ensuite les longueurs : celle de $k\,\vec{u}$ vaut $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

La symétrie centrale n'a pas besoin d'un calcul à part : c'est l'homothétie de rapport -1.

Vérifie : L'outil de la preuve

Dans la preuve, quel fait sur le produit d'un vecteur par un réel donne $M'N' = |k|\,MN$?

A. Le vecteur $k\,\vec{u}$ a la même longueur que $\vec{u}$.

Faux.

C'est faux dès que $|k| \neq 1$: avec $k = 2$, la longueur double.

B. La longueur de $k\,\vec{u}$ est k fois celle de $\vec{u}$.

Faux.

Avec $k < 0$, on obtiendrait une longueur négative.

C. La longueur de $k\,\vec{u}$ est $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

Juste.

Juste : c'est le fait employé à la deuxième étape.

D. Les vecteurs $k\,\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont toujours le même sens.

Faux.

Ils sont de sens contraires si $k < 0$, et le sens ne dit rien de la longueur.

Correction

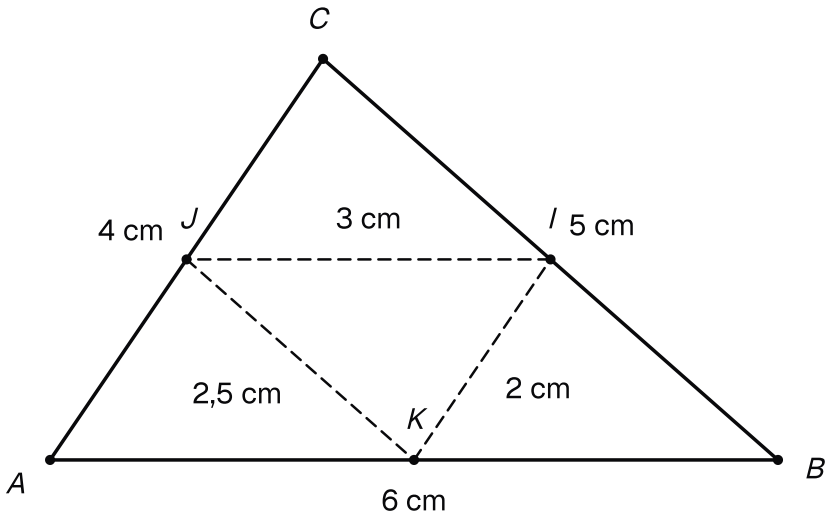
La propriété caractéristique de l'homothétie donne $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$. La longueur de $k\,\overrightarrow{MN}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{MN}$. Donc $M'N' = |k|\,MN$.

Exemple : le triangle des milieux

Dans le triangle ABC, on donne $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 4$ cm. L'homothétie h de centre G et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ envoie A, B, C sur I, J, K.

D'après la propriété des distances pour une homothétie, $IJ = \left|-\dfrac{1}{2}\right| \times AB = 3$ cm. De même, $JK = \dfrac{5}{2}$ cm et $KI = 2$ cm.

Le périmètre de IJK vaut $\dfrac{15}{2}$ cm : c'est la moitié de celui de ABC, qui vaut 15 cm.



Chaque côté du triangle IJK des milieux mesure la moitié du côté de ABC qui lui fait face : 3 cm en face de 6 cm, par exemple.

La symétrie axiale

Intuition. Plie ta feuille le long de l'axe (Δ) : chaque point se pose sur son image. Le pliage suggère que les longueurs se conservent.

Mais la symétrie axiale n'a pas de propriété caractéristique vectorielle dans ce chapitre. On ne peut donc pas refaire la preuve précédente : on admet le résultat suivant.

Propriété : Symétrie axiale : distances et coefficient de colinéarité

Soit (Δ) une droite et $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ). Pour tous points A, B, C, D d'images A', B', C', D' :

- $A'B' = AB$: la symétrie axiale **conserve les distances** ;
- si $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'}$: elle **conserve le coefficient de colinéarité**.

Elle conserve donc aussi le milieu, l'alignement et le parallélisme, par le même raisonnement que pour les autres transformations ; pour le parallélisme, $A' \neq B'$ car $A'B' = AB$.

Remarque : Le statut de ce résultat

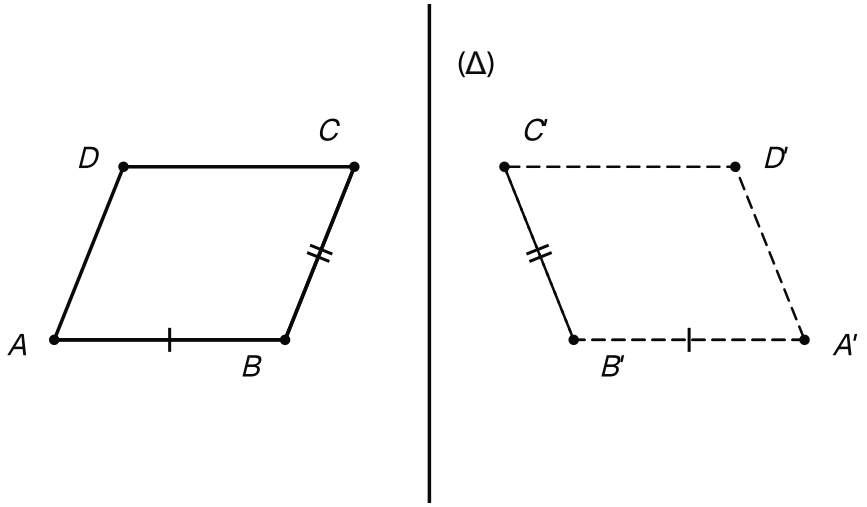
Ce résultat est admis. Sa preuve demande des outils que ce chapitre n'étudie pas. Tu peux l'employer dans tes exercices, en le citant par son nom.

Exemple : un parallélogramme et son image par une symétrie axiale

Trace le parallélogramme $ABCD$ et une droite (Δ) qui ne le coupe pas. Note A', B', C', D' les images des sommets par $S_{(\Delta)}$.

Comme $\overrightarrow{DC} = 1 \times \overrightarrow{AB}$, la conservation du coefficient de colinéarité par la symétrie axiale donne $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$. Donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

D'après la conservation des distances, ses côtés ont les longueurs de ceux de $ABCD$.



Le parallélogramme ABCD et son reflet A'B'C'D' de l'autre côté de l'axe (Δ) : encore un parallélogramme, aux côtés de mêmes longueurs.

Deux pièges, puis à toi

Attention : une longueur n'est jamais négative

✗ « Le rapport vaut -2 et $MN = 3$ cm, donc $M'N' = -6$ cm. »

✓ Les longueurs sont multipliées par $|k|$: $M'N' = |-2| \times 3 = 6$ cm. Le réel k lui-même multiplie le **vecteur** : $\overrightarrow{M'N'} = -2\,\overrightarrow{MN}$. Le signe se voit sur le sens, jamais sur la longueur.

Attention : une symétrie axiale ne conserve pas les vecteurs

✗ « Par la symétrie axiale d'axe (Δ), $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. »

✓ Les longueurs sont égales, pas les vecteurs. Place A et B sur une même perpendiculaire à (Δ), du même côté, à 1 cm et à 3 cm de l'axe. Leurs images sont de l'autre côté, à 1 cm et à 3 cm de l'axe : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs sont de sens contraires, alors que $A'B' = AB = 2$ cm.

À toi : Longueurs dans le parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, avec $AB = 5$ cm et $AD = 3$ cm. Calcule la distance entre les images de A et de B par S_O, puis par l'homothétie de centre O et de rapport -3. Calcule aussi le périmètre de l'image de $ABCD$ par cette homothétie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Identifie chaque transformation : conserve-t-elle les distances, ou les multiplie-t-elle ?
Indice 2
Le périmètre de $ABCD$ vaut $2 \times (5 + 3) = 16$ cm ; chaque côté est multiplié par le même nombre.
Indice 3
Point délicat : le rapport -3 est négatif, mais les longueurs sont multipliées par $|-3| = 3$.

Réponse

- S_O envoie A sur C et B sur D. D'après la conservation des distances par une symétrie centrale, $CD = AB = 5$ cm.
- D'après la propriété des distances pour une homothétie, les images de A et B sont à $|-3| \times 5 = 15$ cm l'une de l'autre.
- Chaque côté est multiplié par 3 : le périmètre de l'image vaut $3 \times 16 = 48$ cm.

Images de figures par une translation, une symétrie ou une homothétie

Segments, demi-droites, droites

Devine : L'image d'un segment

Tiens une baguette droite entre la lampe et le mur : son ombre est encore un trait droit. Qu'en est-il pour une symétrie axiale ? Par la symétrie axiale d'axe (Δ), deux points distincts A et B ont pour images A' et B'. Quelle est, d'après toi, l'image du segment $[AB]$?

A. Le segment $[A'B']$.
Juste.
Juste : chaque point du segment a son image sur $[A'B']$.

B. La droite $(A'B')$ tout entière.
Faux.
Les points de $[AB]$ restent entre A et B ; leurs images restent entre A' et B'.

C. Un segment parallèle à $[AB]$, de même longueur.
Faux.
Par une symétrie axiale, l'image n'est en général pas parallèle : pense au pliage.

D. On ne peut pas savoir sans tracer chaque point.
Faux.
Deux points suffisent : la propriété suivante le justifie.

Correction
L'image de $[AB]$ est le segment $[A'B']$.

Pourquoi est-ce vrai ? Un point M de $[AB]$ vérifie $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, avec $0 \leq t \leq 1$. Ce réel t est conservé, donc M' est sur $[A'B']$. La preuve qui suit montre aussi que tout point de $[A'B']$ est l'image d'un point de $[AB]$.

Ce segment n'est en général pas parallèle à $[AB]$.

Propriété : Images d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite

Soit f une translation, une symétrie (centrale ou axiale) ou une homothétie, et A et B deux points distincts d'images A' et B'.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

Par une translation ou une homothétie, l'image d'une droite est une droite **parallèle** à celle-ci.

Démonstration
Étape 1. Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$; il appartient à la demi-droite $[AB)$ si et seulement si, de plus, $t \geq 0$, et au segment $[AB]$ si et seulement si $0 \leq t \leq 1$. Les points A' et B' sont distincts, car $A'B' = AB$, ou $A'B' = |k|\,AB$ pour une homothétie de rapport k, avec $AB \neq 0$ et $k \neq 0$.

Étape 2. Si $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, la conservation du coefficient de colinéarité (admise pour la symétrie axiale) donne $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'}$: l'image M' est sur la figure correspondante.

Étape 3. Réciproquement, soit P un point de cette figure et t le réel tel que $\overrightarrow{A'P} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ est sur la figure de départ, et $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'P}$: donc $M' = P$.

Étape 4. Pour une translation ou une homothétie de rapport k ($k = 1$ pour une translation), les propriétés caractéristiques donnent $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$: les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un point d'une droite se repère par **un réel** t : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$. La conservation du coefficient garde ce réel pour l'image. Le segment correspond à $0 \leq t \leq 1$, la demi-droite à $t \geq 0$.

Le même réel t sert dans les deux sens : du point à son image, et d'un point de l'image au point de départ.

Vérifie : Le chemin retour

Dans la réciproque de la preuve, on part d'un point P du segment $[A'B']$, avec $\overrightarrow{A'P} = t\,\overrightarrow{A'B'}$. Quel point de $[AB]$ a pour image P ?

A. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{t}\,\overrightarrow{AB}$.

Faux.

Le coefficient n'est pas inversé : il est conservé. Et t peut valoir 0.

B. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Juste.

Juste : la conservation du coefficient donne $\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'P}$.

C. Le point M tel que $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BA}$.

Faux.

Ce point est repéré depuis B : son image vérifie $\overrightarrow{B'M'} = t\,\overrightarrow{B'A'}$, et ce n'est pas P en général.

D. Le point P lui-même.

Faux.

En général, P n'est pas sur $[AB]$: la transformation déplace les points.

Correction

On garde le même réel t. Le point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ est sur $[AB]$, car $0 \leq t \leq 1$.

D'après la conservation du coefficient de colinéarité,

$$\overrightarrow{A'M'} = t\,\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'P},$$

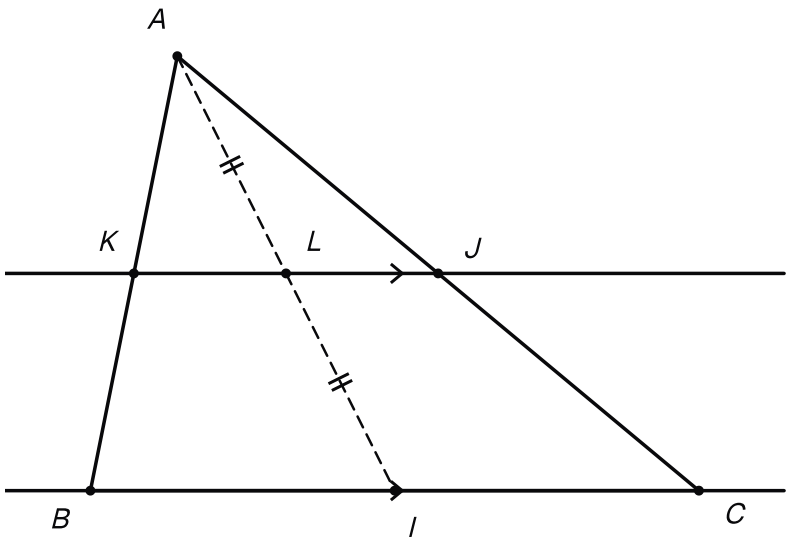
donc $M' = P$. Tout point de $[A'B']$ est ainsi l'image d'un point de $[AB]$.

Exemple : l'image d'un côté, puis d'un point d'intersection

Dans le triangle ABC, K et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, et I celui de $[BC]$. L'homothétie de centre A et de rapport 2 envoie K sur B et J sur C. D'après la propriété des images de droites, l'image de (KJ) est (BC), qui lui est parallèle.

La médiane (AI) coupe (KJ) en un point L, d'image L'. D'après la définition de l'homothétie, L' est sur (AL), c'est-à-dire sur (AI). Il est aussi sur l'image de (KJ), la droite (BC).

Or (AI) et (BC) n'ont que I en commun : $L' = I$. Donc $\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{AL}$: L est le milieu de $[AI]$.



La droite (KJ), parallèle à (BC), coupe la médiane [AI] en son milieu L.

L'image d'un cercle

Rappel du collège : le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r est formé des points M tels que $OM = r$. Par une transformation, la distance $O'M'$ se calcule grâce à la propriété des distances. L'image de chaque point du cercle sera donc sur un cercle de centre O'.

Propriété : Image d'un cercle

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon r, et O' l'image de O.

- Par une translation ou une symétrie (centrale ou axiale), l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O' et de **même rayon** r.
- Par une homothétie de rapport k, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O' et de rayon $|k|\,r$.

Démonstration

Idée de la preuve. Un point M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $OM = r$. Par une translation ou une symétrie, la conservation des distances donne $O'M' = OM = r$; par une homothétie de rapport k, $O'M' = |k|\,OM = |k|\,r$. L'image de chaque point du cercle est donc sur le cercle annoncé. L'étape omise est la réciproque : tout point de ce cercle est l'image d'un point de $(\mathcal{C})$; elle demande la transformation réciproque, que le chapitre n'étudie pas.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de l'idée de la preuve

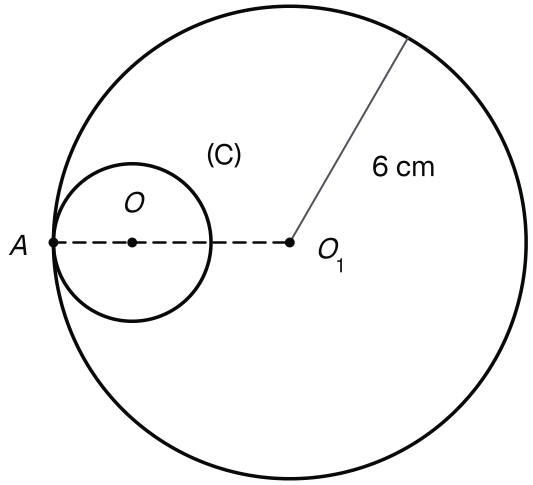
Un cercle se décrit par une distance au centre : $OM = r$. La propriété des distances transporte cette égalité : $O'M' = r$, ou $O'M' = |k|\, r$ pour une homothétie de rapport k. L'idée ne prouve qu'un sens : chaque image est sur le cercle annoncé.

Exemple : un cercle agrandi

Trace un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 cm, et un point A sur $(\mathcal{C})$. L'homothétie de centre A et de rapport 3 envoie O sur le point O_1 tel que $\overrightarrow{AO_1} = 3\,\overrightarrow{AO}$.

D'après la propriété de l'image d'un cercle, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O_1 et de rayon $3 \times 2 = 6$ cm.

Le point A, centre de l'homothétie, est sa propre image : les deux cercles passent par A.



Le cercle (C) de rayon 2 cm et son image de rayon 6 cm, de centre O1 : les deux cercles se touchent en A, centre de l'agrandissement.

Les angles

Devine : Que devient un angle ?

Dans un triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50 degrés. Une homothétie de rapport -2 envoie A, B, C sur A', B', C' : les côtés sont deux fois plus longs. Que mesure l'angle $\widehat{B'A'C'}$?

A. 100 degrés.

Faux.

Les longueurs sont multipliées par 2, pas les angles.

B. 130 degrés.

Faux.
Le signe négatif retourne la figure ; il ne remplace pas l'angle par son supplémentaire.

C. Cela dépend du centre.

Faux.
Le centre place la figure ; il ne la déforme pas.

D. 50 degrés.

Juste.
Juste : l'homothétie agrandit la figure sans la déformer.

Correction
L'angle $\widehat{B'A'C'}$ mesure encore 50 degrés. Une homothétie change les longueurs, mais garde la forme de la figure, comme l'ombre de la lampe. La propriété suivante l'affirme pour toutes les transformations du chapitre.

Propriété : Conservation des angles

Les translations, les symétries (centrales ou axiales) et les homothéties **conservent les mesures des angles géométriques** : si A, B, C sont trois points tels que $B \neq A$ et $B \neq C$, d'images A', B', C', alors

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}.$$

L'image d'un angle est un angle de même mesure.

Remarque : Le statut de ce résultat

Ce résultat est admis. Sa preuve dépasse les outils de ce chapitre. Retiens qu'aucune de ces transformations ne déforme un angle, pas même l'homothétie, qui change les longueurs.

Exemple : les angles du triangle des milieux

Dans le triangle ABC, l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie A, B, C sur I, J, K.
D'après la conservation des angles :

- $\widehat{JIK} = \widehat{BAC}$;
- $\widehat{IJK} = \widehat{ABC}$;
- $\widehat{JKI} = \widehat{BCA}$.

Le triangle des milieux IJK a donc les mêmes angles que ABC, avec des côtés deux fois plus courts.

Construire une image, puis à toi

Méthode : construire l'image d'une droite ou d'un cercle

1. **Pour une droite**, construis les images de deux de ses points, puis joins-les. Avec une translation ou une homothétie, l'image d'un seul point suffit : trace par ce point la parallèle à la droite. Ce raccourci est faux pour une symétrie axiale : l'image n'est en général pas parallèle.
2. **Pour un cercle**, construis l'image du centre. Le rayon est le même pour une translation ou une symétrie ; il est multiplié par $|k|$ pour une homothétie de rapport k.
3. **Pour un segment ou une demi-droite**, construis les images des extrémités, ou de l'origine et d'un second point.
4. **Pour un point d'intersection**, l'image du point commun à deux droites sécantes est le point commun à leurs images. Une droite qui passe par le centre d'une homothétie est sa propre image.

À toi : Trois images d'un cercle

Reprends le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 cm, et le point A de $(\mathcal{C})$. Donne le centre et le rayon de l'image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie centrale de centre A, puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Fais de même avec l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : construis l'image du centre O, puis calcule le rayon.
Indice 2
Par la symétrie de centre A, l'image O_2 de O vérifie $\overrightarrow{AO_2} = -\overrightarrow{AO}$; par la translation, applique la définition au point O.
Indice 3
Point délicat : O est le centre de l'homothétie, donc sa propre image ; le rayon est multiplié par $\left|-\dfrac{3}{2}\right|$.

Réponse

- Par S_A : d'après la propriété de l'image d'un cercle, le centre est O_2, symétrique de O par rapport à A, et le rayon vaut 2 cm. Ce cercle passe par A, car $AO_2 = AO = 2$ cm.
- Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$: le centre est A, et le rayon vaut 2 cm. Ce cercle passe par O.
- Par l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$: le centre est O, et le rayon vaut $\dfrac{3}{2} \times 2 = 3$ cm.

Remarque : Coin devoir : rédiger l'image d'un cercle

En devoir, l'image d'une figure se justifie en nommant la transformation, puis la propriété.

Écris par exemple : « L'homothétie de centre A et de rapport 3 envoie O sur O_1. D'après la propriété de l'image d'un cercle, l'image de $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O_1 et de rayon $3 \times 2 = 6$ cm. »

Donne toujours le centre et le rayon de l'image.

Figures isométriques, figures semblables

Même forme, même taille ?

Intuition. Une photocopie sans agrandissement donne une figure **superposable** à l'original : mêmes longueurs, mêmes angles. Regarde maintenant une photo de 10 cm sur 15 cm, et son agrandissement de 20 cm sur 30 cm.

Devine : Deux photos

La photo de 10 cm sur 15 cm et son agrandissement de 20 cm sur 30 cm ont-ils les mêmes angles ? Les mêmes longueurs ?

A. Mêmes angles, longueurs multipliées par 2.
Juste.
Juste : $\dfrac{20}{10} = \dfrac{30}{15} = 2$, et les angles restent droits.

B. Mêmes angles et mêmes longueurs.
Faux.
Les côtés passent de 10 à 20 cm : les longueurs changent.

C. Ni les mêmes angles, ni les mêmes longueurs.
Faux.
Les coins de la photo restent des angles droits.

D. Mêmes angles, longueurs augmentées de 10 cm.
Faux.
Le grand côté passe de 15 à 30 cm : il gagne 15 cm, pas 10 cm.

Correction
Les rapports $\dfrac{20}{10}$ et $\dfrac{30}{15}$ valent tous deux 2 : les longueurs sont multipliées par 2. Les angles restent droits. Les deux photos sont **semblables**, sans être superposables.

Deux familles de figures

Définition : Figures isométriques, figures semblables

- Deux figures sont **isométriques** si l'une est l'image de l'autre par une translation, une symétrie (centrale ou axiale), ou par plusieurs de ces transformations appliquées successivement.

- Deux figures sont **semblables** si l'une est l'image de l'autre par une homothétie, ou par des homothéties, des translations et des symétries appliquées successivement.

Deux figures isométriques ont les mêmes longueurs et les mêmes angles. Deux figures semblables ont les mêmes angles, et leurs longueurs sont proportionnelles.

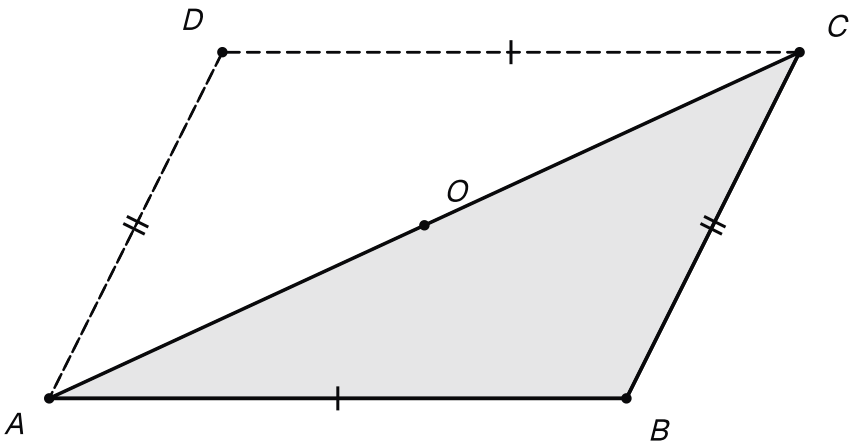
Méthode : comparer deux figures

1. **Trouve** une transformation, ou plusieurs appliquées successivement, qui envoient une figure sur l'autre.
2. **Longueurs** : conservées par les translations et les symétries ; multipliées par $|k|$ par une homothétie de rapport k.
3. **Angles** : conservés dans tous les cas.
4. **Conclus** : avec des translations et des symétries seulement, les figures sont isométriques. Avec une homothétie, elles sont semblables.

Exemple : deux triangles isométriques

Dans le parallélogramme $ABCD$ de centre O, la symétrie centrale S_O envoie A sur C, B sur D et C sur A. Le triangle ABC a donc pour image le triangle CDA.

D'après la définition, ces deux triangles sont isométriques. Ainsi $CD = AB$, $DA = BC$ et $\widehat{CDA} = \widehat{ABC}$.



La symétrie de centre O échange les triangles ABC et CDA : mêmes côtés, mêmes angles.

Semblables, isométriques : ne pas confondre

Exemple : le triangle des milieux

Dans le triangle ABC, l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie ABC sur IJK. D'après la définition, les triangles ABC et IJK sont semblables.

Leurs angles sont égaux, et chaque côté de IJK mesure la moitié du côté correspondant de ABC. Avec $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 4$ cm, tu retrouves $IJ = 3$ cm, $JK = \frac{5}{2}$ cm et $KI = 2$ cm.

Attention : des angles égaux ne suffisent pas

✗ « IJK et ABC ont les mêmes angles, donc ils sont isométriques. »

✓ Des angles égaux ne suffisent pas pour conclure que deux figures sont isométriques. Ici, IJK est l'image de ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$: les deux triangles sont semblables.

Mais les côtés de IJK mesurent 3 cm, $\frac{5}{2}$ cm et 2 cm, et ceux de ABC 6 cm, 5 cm et 4 cm : aucune longueur n'est commune, donc les deux triangles ne sont pas isométriques.

Vérifie : Deux transformations à la suite

Un triangle T est envoyé sur T_1 par une translation, puis T_1 est envoyé sur T_2 par une homothétie de rapport -1. Que dire de T et T_2 ?

A. Ils sont semblables, de rapport 2.

Faux.
Aucune longueur ne double : $|-1| = 1$.

B. Ils ne sont ni isométriques ni semblables.

Faux.
Les deux transformations conservent les longueurs et les angles.

C. Ils sont isométriques seulement si le vecteur est nul.

Faux.
Une translation conserve toujours les longueurs, quel que soit son vecteur.

D. Ils sont isométriques.

Juste.
Juste : l'homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale.

Correction
L'homothétie de rapport -1 est la symétrie centrale de même centre. Donc T_2 est l'image de T par une translation et une symétrie, appliquées successivement.

D'après la définition, T et T_2 sont isométriques : mêmes longueurs, mêmes angles.

À toi : Le carton et son ombre

Le triangle en carton de l'entrée a des côtés de 10 cm, 12 cm et 14 cm. Son ombre est son image par l'homothétie de centre la lampe et de rapport 3. Les deux triangles sont-ils isométriques ? Semblables ? Donne les côtés et le périmètre de l'ombre. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : quelle transformation envoie le carton sur l'ombre ?
Indice 2
Les longueurs sont multipliées par $|3| = 3$; le périmètre du carton vaut $10 + 12 + 14 = 36$ cm.
Indice 3
Point délicat : des angles égaux ne suffisent pas pour des figures isométriques ; compare aussi les longueurs.

Réponse
L'ombre est l'image du carton par une homothétie de rapport 3 : d'après la définition, les deux triangles sont semblables.

D'après la propriété des distances pour une homothétie, les côtés de l'ombre mesurent 30 cm, 36 cm et 42 cm. Son périmètre vaut 108 cm, soit 3×36.

Les longueurs changent : les triangles ne sont pas isométriques. D'après la conservation des angles, ils ont les mêmes angles.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : ce que chaque transformation conserve

- **Translation** $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; elle conserve les vecteurs, les distances et les angles.
- **Symétrie centrale** S_Ω : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$; c'est l'homothétie de rapport -1.
- **Symétrie axiale** $S_{(\Delta)}$: l'axe est la médiatrice de $[MM']$; elle conserve les distances et les angles, pas les vecteurs.
- **Homothétie** de centre Ω et de rapport k : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$; les vecteurs sont multipliés par k, les distances par $|k|$.
- **Toutes** conservent le coefficient de colinéarité, le milieu, l'alignement, le parallélisme et les angles.

- **Figures** : translations et symétries donnent des figures isométriques ; une homothétie, des figures semblables.

Le mot du prof. Devant une figure, cherche la transformation cachée : un milieu, un centre de gravité ou un parallélogramme peuvent en cacher une. Nomme-la avec tous ses éléments, puis cite la propriété qui transporte ce que tu sais.

Tu sais maintenant démontrer un alignement ou un parallélisme avec des vecteurs et une transformation.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les transformations dans le plan » (tc · sciences · mathematiques)