BURHAN

Statistique : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/statistique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Statistique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le cross du lycée

Lors du cross du lycée, on relève le temps de course de 80 élèves, en minutes :

Temps (min)	$[12;14[$	$[14;16[$	$[16;18[$	$[18;20[$	$[20;24[$
Nombre d'élèves	8	20	28	16	8

1. 0,75 pts

a) Donner l'amplitude et le centre de chaque classe. b) Calculer la fréquence de chaque classe et contrôler leur somme.

INDICE

Outil : le centre de $[a;b[$ est $\dfrac{a+b}{2}$; la fréquence est l'effectif divisé par 80.

CORRIGÉ

a) D'après la définition de l'amplitude, les quatre premières classes ont pour amplitude 2 min, et la dernière, $[20;24[$, a pour amplitude 4 min.

Le centre de $[a;b[$ est $\dfrac{a+b}{2}$; par exemple, celui de $[12;14[$ vaut $\dfrac{12+14}{2}=13$. Les centres sont 13, 15, 17, 19 et 22.

b) D'après la définition de la fréquence, on divise chaque effectif par 80 : $0{,}1$; $0{,}25$; $0{,}35$; $0{,}2$ et $0{,}1$. Contrôle :

$$0{,}1+0{,}25+0{,}35 \\ +0{,}2+0{,}1=1.$$

Conclusion. Les classes ont pour amplitude 2 min, sauf la dernière (4 min), et pour centres 13, 15, 17, 19 et 22 ; les fréquences ont bien pour somme 1.

2. `0,75 pts`

a) Calculer les effectifs cumulés croissants. b) En déduire la proportion des élèves qui ont couru en moins de 18 minutes.

INDICE

Début : additionne de proche en proche ; le dernier cumul vaut 80. **Ensuite :** le cumul de la classe $[16;18[$ compte les élèves sous 18 min.

CORRIGÉ

a) D'après la définition des cumuls, on additionne les effectifs de proche en proche : 8 ; 28 ; 56 ; 72 ; 80 . Le dernier cumul est bien l'effectif total.

b) Le cumul de la classe $[16;18[$ compte les élèves qui ont couru en moins de 18 minutes : ils sont 56. Leur proportion vaut :

$$\frac{56}{80} = 0{,}7.$$

Conclusion. Une proportion $0{,}7$ des élèves, soit 7 sur 10, a couru en moins de 18 minutes.

3. `0,75 pts`

a) En prenant 2 minutes pour amplitude de référence, donner la hauteur de chaque rectangle de l'histogramme. b) En déduire la classe modale.

INDICE

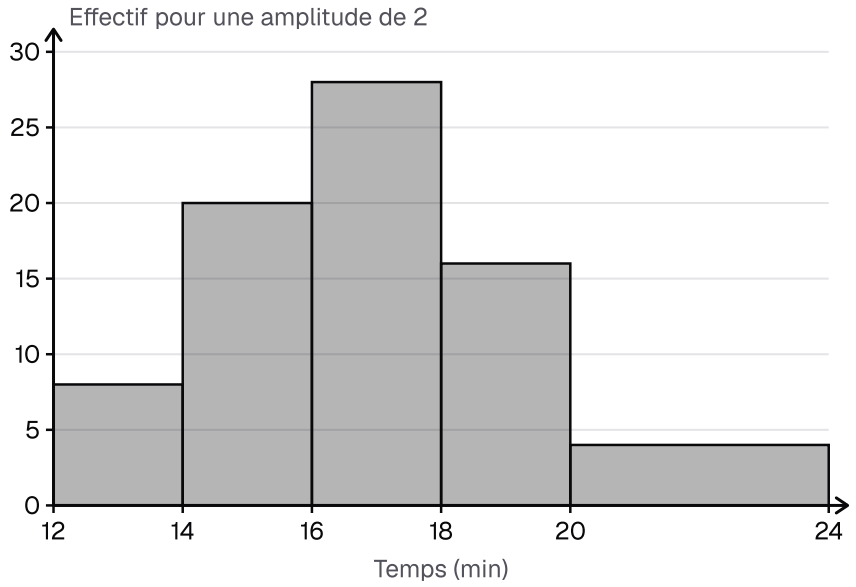
Outil : l'aire de chaque rectangle est proportionnelle à l'effectif ; la dernière classe contient deux amplitudes de référence.

CORRIGÉ

a) Unité d'aire : un rectangle de base 2 min, l'amplitude de référence, et de hauteur 1 représente un élève. Les quatre premières classes ont cette amplitude : leurs hauteurs sont leurs effectifs, 8, 20, 28 et 16. La dernière contient deux amplitudes de référence, donc sa hauteur vaut $\frac{8}{2} = 4$.

b) D'après la définition de la classe modale, c'est la classe du rectangle le plus haut, de hauteur 28 : $[16; 18[$.

Conclusion. Les hauteurs sont 8, 20, 28, 16 et 4, et la classe modale est $[16; 18[$.



Les temps du cross en histogramme, à raison d'une hauteur par tranche de 2 minutes : le rectangle le plus haut est celui de 16 à 18.

4. 1 pts

a) Dans quelle classe se trouve la médiane ? b) Calculer une valeur approchée de la médiane par interpolation, arrondie au centième.

INDICE

Début : $\dfrac{N}{2} = 40$; repère dans la question 2 la classe $[a;b[$ dont les cumuls aux bornes vérifient $N_a < 40 \leq N_b$. **Ensuite :** interpole sur ce segment du polygone des effectifs cumulés.

CORRIGÉ

a) On a $\dfrac{N}{2} = 40$. Sur $[16;18[$, les cumuls aux bornes vérifient $28 < 40 \leq 56$: la médiane est dans cette classe.

b) On interpole sur le segment du polygone des effectifs cumulés croissants qui correspond à cette classe, d'amplitude 2 :

$$\begin{aligned} M_e &= 16 + 2 \times \frac{40 - 28}{56 - 28} \\ &= 16 + \frac{24}{28} \\ &= 16 + \frac{6}{7} \\ &\approx 16{,}86 \text{ min}, \end{aligned}$$

arrondi au centième. Contrôle : $16 < 16{,}86 \leq 18$.

Conclusion. La médiane est dans la classe $[16;18[$; une valeur approchée de la médiane est $16{,}86$ minutes.

5. 1 pts

a) Calculer la somme des produits de chaque centre par l'effectif de sa classe. b) En déduire une valeur approchée du temps moyen.

INDICE

Outil : la définition de la moyenne, en remplaçant chaque classe par son centre.

CORRIGÉ

a) Chaque centre est multiplié par l'effectif de sa classe :

$$\begin{aligned} &8 \times 13 + 20 \times 15 \\ &\quad + 28 \times 17 + 16 \times 19 \\ &\quad + 8 \times 22 \\ &= 104 + 300 + 476 \\ &\quad + 304 + 176 \\ &= 1360. \end{aligned}$$

b) D'après la définition de la moyenne, en remplaçant chaque temps par le centre de sa classe, $\overline{x} \approx \dfrac{1360}{80} = 17$ min. C'est une valeur approchée, car les temps réels d'une classe ne sont pas tous égaux à son centre.

Conclusion. La somme des produits vaut 1360, et le temps moyen vaut environ 17 minutes.

6. `0,75 pts`

Le professeur d'éducation physique veut récompenser la moitié la plus rapide des coureurs. Quel temps maximal peut-il retenir ? Comparer ce temps au temps moyen.

INDICE

Outil : la médiane partage la série en deux groupes de même effectif.

CORRIGÉ

Temps maximal. La médiane partage les coureurs en deux groupes de même effectif : environ 40 élèves, la moitié de 80, ont un temps inférieur à M_e. Le professeur peut donc retenir un temps maximal d'environ $16{,}86$ minutes.

Comparaison. Ce temps est légèrement inférieur au temps moyen, environ 17 minutes. La classe $[20;24[$, plus large, contient des temps longs qui relèvent la moyenne. Les deux valeurs sont approchées : l'écart entre elles reste faible.

Conclusion. Le professeur peut retenir un temps maximal d'environ $16{,}86$ minutes, un peu en dessous du temps moyen.

Exercice 2 — 5 pts

Des bus en retard

Une association d'usagers compte, pendant 40 jours, le nombre de bus arrivés en retard à un arrêt :

Bus en retard x_i	0	1	2	3	4
Nombre de jours n_i	6	10	12	8	4

1. — 1 pts

a) Préciser le caractère étudié et sa nature. b) Calculer les fréquences et vérifier que leur somme vaut 1.

INDICE

Outil : la définition du caractère, puis $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ avec $N = 40$.

CORRIGÉ

a) Le caractère étudié est le nombre de bus arrivés en retard en un jour. Il ne prend que des valeurs entières : il est quantitatif discret.

b) D'après la définition de la fréquence, $f_i = \dfrac{n_i}{40}$: $0{,}15$; $0{,}25$; $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}1$. Leur somme vaut :

$$\begin{aligned} &0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}3 \\ &\quad + 0{,}2 + 0{,}1 = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Le caractère est quantitatif discret, et la somme des fréquences vaut bien 1.

2. — 1 pts

a) Écrire le nombre moyen de bus en retard par jour à l'aide des fréquences. b) Effectuer le calcul.

INDICE

Outil : la propriété de la moyenne par les fréquences : $\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_p x_p$.

CORRIGÉ

a) D'après la propriété de la moyenne par les fréquences, $\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_5 x_5$, donc :

$$\begin{aligned} \overline{x} = {} & 0{,}15 \times 0 + 0{,}25 \times 1 \\ & + 0{,}3 \times 2 + 0{,}2 \times 3 \\ & + 0{,}1 \times 4. \end{aligned}$$

b) On effectue les produits, puis la somme :

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 0 + 0{,}25 + 0{,}6 \\ &\quad + 0{,}6 + 0{,}4 \\ &= 1{,}85. \end{aligned}$$

Conclusion. En moyenne, $1{,}85$ bus arrivent en retard par jour.

3. 1 pts

a) Compléter le tableau par la ligne des effectifs cumulés croissants. b) Quelle est la médiane ? Donner aussi le mode.

INDICE

Début : $N = 40$ est pair ; les rangs du milieu sont 20 et 21. **Ensuite :** cherche la première valeur dont le cumul atteint chaque rang.

CORRIGÉ

a) En additionnant les effectifs de proche en proche, les cumuls croissants sont 6 ; 16 ; 28 ; 36 ; 40.

b) $N = 40$ est pair : d'après la définition de la médiane, M_e est la moyenne des valeurs de rangs 20 et 21. Le cumul vaut 16 à la valeur 1 et 28 à la valeur 2 : les rangs 17 à 28 portent la valeur 2. Les valeurs de rangs 20 et 21 valent donc toutes deux 2, et $M_e = 2$.

Le plus grand effectif est 12, celui de la valeur 2 : d'après la définition du mode, le mode vaut aussi 2.

Conclusion. La médiane et le mode valent tous deux 2 bus en retard.

4. 1,25 pts

a) Calculer $n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_5x_5^2$. b) En déduire V grâce à la formule de la variance, et donner σ arrondi au centième.

INDICE

Outil : la formule de la variance, avec la moyenne de la question 2. **Attention :** on retranche le carré de la moyenne.

CORRIGÉ

a) Les carrés des valeurs sont 0, 1, 4, 9 et 16 :

$$\begin{aligned} &6 \times 0 + 10 \times 1 \\ &\quad + 12 \times 4 + 8 \times 9 \\ &\quad + 4 \times 16 \\ &= 0 + 10 + 48 + 72 + 64 \\ &= 194. \end{aligned}$$

b) Par la formule de la variance, avec $\overline{x} = 1{,}85$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{194}{40} - 1{,}85^2 \\ &= 4{,}85 - 3{,}4225 \\ &= 1{,}4275. \end{aligned}$$

Donc $\sigma = \sqrt{1{,}4275} \approx 1{,}19$ bus, arrondi au centième.

Conclusion. La somme vaut 194, la variance $V = 1{,}4275$ et l'écart type $\sigma \approx 1{,}19$ bus.

5. `0,75 pts`

Après un changement d'horaires, un nouveau relevé de 40 jours donne une moyenne de $1{,}2$ bus en retard par jour et un écart type de $0{,}9$. Le service s'est-il amélioré ? Justifier avec les deux paramètres.

INDICE

Méthode : compare d'abord les moyennes, puis les écarts types, puis conclus dans les mots de la situation.

CORRIGÉ

Position. $1{,}2 < 1{,}85$: il y a en moyenne moins de bus en retard par jour.

Dispersion. $0{,}9 < 1{,}19$: le nombre de retards varie moins d'un jour à l'autre.

Conclusion. Le service s'est amélioré : moins de retards en moyenne, et des journées plus régulières.

Exercice 3 — 5 pts

Les pains d'une boulangerie

Une boulangerie vend des pains annoncés à 250 g. Le boulanger pèse 30 pains d'une même fournée, mais une case de son relevé est effacée :

Masse x_i (g)	245	248	250	252	255
Effectif n_i	3	6	9	8	n_5

1. — 0,75 pts

a) Calculer l'effectif n_5. b) Calculer la fréquence des pains de moins de 250 g.

INDICE

Outil : la définition de l'effectif total, $N = 30$.

CORRIGÉ

a) D'après la définition de l'effectif total, la somme des effectifs vaut $N = 30$:

$$3 + 6 + 9 + 8 + n_5 = 30,$$

donc $n_5 = 30 - 26 = 4$.

b) Les pains de moins de 250 g sont ceux de 245 g et de 248 g, soit $3 + 6 = 9$ pains. Leur fréquence vaut $\dfrac{9}{30} = 0{,}3$.

Conclusion. L'effectif effacé vaut $n_5 = 4$, et la fréquence des pains de moins de 250 g vaut $0{,}3$.

2. — 0,75 pts

a) Dresser la liste des cumuls croissants des effectifs. b) Déterminer alors la masse médiane.

INDICE

Début : $N = 30$ est pair ; les rangs du milieu sont 15 et 16.

CORRIGÉ

a) En cumulant les effectifs de proche en proche : 3 ; 9 ; 18 ; 26 ; 30.

b) $N = 30$ est pair : d'après la définition de la médiane, M_e est la moyenne des valeurs de rangs 15 et 16. Le cumul passe de 9 à 18 à la valeur 250 : les rangs 10 à 18 portent la valeur 250. Les valeurs de rangs 15 et 16 valent donc toutes deux 250, et $M_e = 250$ g.

Conclusion. La masse médiane vaut 250 g, la masse annoncée.

3. 1 pts

On pose $y_i = x_i - 250$. a) Calculer les valeurs y_i, puis leur moyenne $\overline{y}$. b) En déduire la masse moyenne $\overline{x}$.

INDICE

Outil : la définition de la moyenne pour $\overline{y}$, puis la propriété du changement affine avec $a = 1$ et $b = -250$.

CORRIGÉ

a) Les valeurs $y_i = x_i - 250$ sont -5, -2, 0, 2 et 5. La somme des produits $n_i y_i$ vaut :

$$\begin{aligned} &3 \times (-5) + 6 \times (-2) \\ &\quad + 9 \times 0 + 8 \times 2 \\ &\quad + 4 \times 5 \\ &= -15 - 12 + 0 + 16 + 20 \\ &= 9. \end{aligned}$$

D'après la définition de la moyenne, avec $N = 30$:

$$\overline{y} = \frac{9}{30} = 0{,}3.$$

b) D'après la propriété du changement affine, avec $a = 1$ et $b = -250$, on a $\overline{y} = \overline{x} - 250$. Donc $\overline{x} = 0{,}3 + 250$, soit $\overline{x} = 250{,}3$ g.

Conclusion. La moyenne des y_i vaut $0{,}3$, et la masse moyenne des pains vaut $250{,}3$ g.

4. 1 pts

a) Calculer $n_1 y_1^2 + n_2 y_2^2 + \cdots + n_5 y_5^2$. b) En déduire la variance V_y de la série des y_i par la formule.

INDICE

Outil : la formule de la variance, appliquée à la série des y_i, avec $\overline{y} = 0{,}3$.

CORRIGÉ

a) Les carrés y_i^2 valent 25, 4, 0, 4 et 25 :

$$\begin{aligned} &3 \times 25 + 6 \times 4 \\ &\quad + 9 \times 0 + 8 \times 4 \\ &\quad + 4 \times 25 \\ &= 75 + 24 + 0 + 32 + 100 \\ &= 231. \end{aligned}$$

b) Par la formule de la variance, appliquée à la série des y_i avec $\overline{y} = 0{,}3$:

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{231}{30} - 0{,}3^2 \\ &= 7{,}7 - 0{,}09 \\ &= 7{,}61. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme vaut 231, et la variance de la série des y_i vaut $V_y = 7{,}61$.

5. 0,75 pts

a) Comparer $x_i - \overline{x}$ et $y_i - \overline{y}$. b) En déduire la variance des masses, puis leur écart type arrondi au centième.

INDICE

Début : écris $x_i - \overline{x} = (y_i + 250) - (\overline{y} + 250)$, puis simplifie. **Ensuite :** les deux séries ont alors les mêmes carrés des écarts et les mêmes effectifs ; applique la définition de la variance à chacune.

CORRIGÉ

a) Pour chaque valeur, $x_i = y_i + 250$, et $\overline{x} = \overline{y} + 250$:

$$\begin{aligned} x_i - \overline{x} &= (y_i + 250) \\ &\quad - (\overline{y} + 250) \\ &= y_i - \overline{y}. \end{aligned}$$

Les écarts à la moyenne sont les mêmes pour les deux séries.

b) Les deux séries ont les mêmes effectifs et les mêmes carrés des écarts. D'après la définition de la variance, elles ont donc la même variance : $V_x = 7{,}61$. L'écart type vaut $\sigma = \sqrt{7{,}61} \approx 2{,}76$ g, arrondi au centième.

Conclusion. $x_i - \overline{x} = y_i - \overline{y}$; la variance des masses vaut $7{,}61$, et leur écart type environ $2{,}76$ g.

6. 0,75 pts

Une seconde boulangerie annonce, pour ses pains de 250 g, une masse moyenne de $250{,}1$ g et un écart type de $4{,}5$ g. Laquelle des deux produit les pains les plus réguliers ?

INDICE

Méthode : compare la position, puis la dispersion, puis conclus dans les mots de la situation.

CORRIGÉ

Position. Les moyennes, $250{,}3$ g et $250{,}1$ g, sont toutes deux très proches de la masse annoncée.

Dispersion. $2{,}76 < 4{,}5$: les masses de la première boulangerie s'écartent moins de leur moyenne.

Conclusion. La première boulangerie produit les pains les plus réguliers.

Exercice 4 5 pts

Les vitesses devant l'école

Un radar pédagogique, placé devant une école, enregistre la vitesse de 50 véhicules, en km/h :

Vitesse (km/h)	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;80[$
Nombre de véhicules	4	11	18	12	5

1. 0,75 pts

a) Donner les fréquences des cinq classes, puis vérifier que leur total vaut 1. b) Cumuler ces fréquences dans l'ordre croissant des vitesses.

INDICE

Outil : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ avec $N = 50$, puis additionne les fréquences de proche en proche ; la dernière vaut 1.

CORRIGÉ

a) D'après la définition de la fréquence, $f_i = \dfrac{n_i}{50}$: $0{,}08$; $0{,}22$; $0{,}36$; $0{,}24$; $0{,}1$. Contrôle :

$$0{,}08 + 0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}1 = 1.$$

b) En additionnant ces fréquences de proche en proche, les fréquences cumulées croissantes sont $0{,}08$; $0{,}3$; $0{,}66$; $0{,}9$; 1.

Conclusion. Les fréquences ont pour somme 1, et la dernière fréquence cumulée vaut bien 1.

2. 0,75 pts

a) Donner les coordonnées des points du polygone des fréquences cumulées croissantes. b) En déduire la proportion des véhicules dont la vitesse est dans $[30;60[$.

INDICE

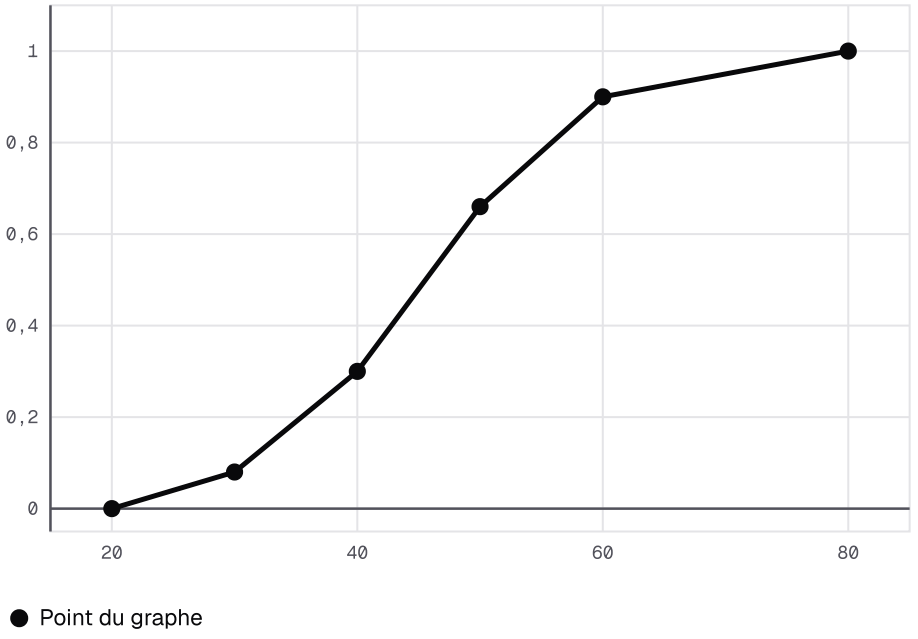
Début : le polygone part de la borne gauche 20 avec la fréquence 0, puis associe à chaque borne droite la fréquence cumulée de sa classe. **Ensuite :** les véhicules sous 60 km/h, moins ceux sous 30 km/h.

CORRIGÉ

a) D'après la définition du polygone, on part de la borne gauche 20 avec la fréquence 0, puis on associe à chaque borne droite la fréquence cumulée de sa classe. Les points sont $(20,0)$, $(30,0{,}08)$, $(40,0{,}3)$, $(50,0{,}66)$, $(60,0{,}9)$ et $(80,1)$.

b) Une proportion $0{,}9$ des véhicules roule à moins de 60 km/h, et une proportion $0{,}08$ à moins de 30 km/h. On retranche : $0{,}9 - 0{,}08 = 0{,}82$.

Conclusion. Une proportion $0{,}82$ des véhicules roule à une vitesse comprise dans $[30;60[$.



Les fréquences cumulées des vitesses relevées par le radar, sous forme de ligne brisée qui monte de 0 à 1.

3. `0,75 pts`

a) Pour chaque borne gauche a (20, 30, 40, 50, 60), calculer le nombre de véhicules qui roulent à au moins a km/h. b) En déduire la proportion des véhicules qui roulent à 50 km/h ou plus.

INDICE

Méthode : ce sont les effectifs cumulés décroissants ; additionne en partant de la dernière classe.

Contrôle : le premier vaut 50.

CORRIGÉ

a) Ce sont les effectifs cumulés décroissants. En cumulant depuis la dernière classe :

- au moins 60 km/h : 5 ;
- au moins 50 km/h : $5 + 12 = 17$;
- au moins 40 km/h : $17 + 18 = 35$;
- au moins 30 km/h : $35 + 11 = 46$;
- au moins 20 km/h : $46 + 4 = 50$.

Pour $a = 20, 30, 40, 50$ et 60, on trouve donc 50, 46, 35, 17 et 5 véhicules.

b) 17 véhicules roulent à 50 km/h ou plus, soit une proportion de $\dfrac{17}{50} = 0{,}34$. Contrôle par la question 1 : $1 - 0{,}66 = 0{,}34$.

Conclusion. Une proportion $0{,}34$ des véhicules roule à 50 km/h ou plus.

4. 1 pts

Sur $[40;50]$, le polygone est le segment qui joint $(40,0{,}3)$ et $(50,0{,}66)$. a) Lire, par interpolation sur ce segment, une valeur approchée de la proportion des véhicules qui roulent à moins de 45 km/h. b) En déduire que la médiane dépasse 45 km/h, puis calculer une valeur approchée de la médiane, arrondie au centième.

INDICE

Début : 45 est au milieu de $[40;50]$: la fréquence cumulée augmente de la moitié de $0{,}66-0{,}3$. **Ensuite :** la médiane est la vitesse dont la fréquence cumulée vaut $0{,}5$; interpole de même entre $0{,}3$ et $0{,}66$.

CORRIGÉ

a) Sur ce segment, la fréquence cumulée augmente proportionnellement à la vitesse. En 45, elle vaut :

$$\begin{aligned} &0{,}3+\frac{45-40}{50-40}\\ &\quad\times(0{,}66-0{,}3)\\ &=0{,}3+0{,}5\times 0{,}36\\ &=0{,}48. \end{aligned}$$

Environ $0{,}48$ des véhicules roulent à moins de 45 km/h ; c'est une valeur approchée.

b) $0{,}48<0{,}5$: moins de la moitié des véhicules roule à moins de 45 km/h. Le polygone est croissant et atteint l'ordonnée $0{,}5$ en M_e, donc la médiane dépasse 45 km/h. Comme $0{,}3<0{,}5\le 0{,}66$, elle est dans $[40;50[$. Par interpolation :

$$\begin{aligned} M_e&=40+10\times\frac{0{,}5-0{,}3}{0{,}66-0{,}3}\\ &=40+10\times\frac{0{,}2}{0{,}36}\\ &=40+\frac{50}{9}\\ &\approx 45{,}56\ \text{km/h}, \end{aligned}$$

arrondi au centième. Contrôle : $45<45{,}56\le 50$.

Conclusion. Environ $0{,}48$ des véhicules roulent à moins de 45 km/h ; la médiane dépasse donc 45 km/h et vaut environ $45{,}56$ km/h.

5. 1 pts

a) Donner le centre de chaque classe. b) En déduire une valeur approchée de la vitesse moyenne, calculée à l'aide des fréquences.

INDICE

Outil : la propriété de la moyenne par les fréquences, en remplaçant chaque classe par son centre : $\overline{x} \approx f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_5 x_5$.

CORRIGÉ

a) Le centre de $[a;b[$ est $\dfrac{a+b}{2}$: les centres sont 25, 35, 45, 55 et 70.

b) D'après la propriété de la moyenne par les fréquences, en remplaçant chaque classe par son centre :

$$\begin{aligned}\overline{x} &\approx 0{,}08 \times 25 + 0{,}22 \times 35 \\ &\quad + 0{,}36 \times 45 + 0{,}24 \times 55 \\ &\quad + 0{,}1 \times 70 \\ &= 2 + 7{,}7 + 16{,}2 \\ &\quad + 13{,}2 + 7 \\ &= 46{,}1 \text{ km/h}.\end{aligned}$$

C'est une valeur approchée, car chaque vitesse est remplacée par le centre de sa classe.

Conclusion. La vitesse moyenne vaut environ $46{,}1$ km/h.

6. 0,75 pts

La commune installe un ralentisseur si plus d'un tiers des véhicules roulent à 50 km/h ou plus. a) Comparer $0{,}34$ et $\dfrac{1}{3}$, puis dire ce que décide la commune. b) Un habitant affirme : « La vitesse moyenne est inférieure à 50 km/h, le ralentisseur est donc inutile. » Que lui répondre ?

INDICE

Début : écris les deux nombres avec le dénominateur 300. **Ensuite :** une moyenne inférieure à 50 dit-elle combien de véhicules roulent à 50 km/h ou plus ?

CORRIGÉ

a) $0{,}34 = \dfrac{102}{300}$ et $\dfrac{1}{3} = \dfrac{100}{300}$, donc $0{,}34 > \dfrac{1}{3}$. Plus d'un tiers des véhicules roulent à 50 km/h ou plus : la commune installe le ralentisseur.

b) La moyenne, environ $46{,}1$ km/h, est un paramètre de position : elle ne dit pas combien de véhicules roulent vite. Ici, elle est inférieure à 50 km/h alors qu'une proportion $0{,}34$ des véhicules roule à 50 km/h ou plus.

Conclusion. La commune installe le ralentisseur, et l'argument de l'habitant ne suffit pas : une moyenne sous 50 km/h n'empêche pas plus d'un tiers des véhicules de rouler à 50 km/h ou plus.

Exercice 5 5 pts

Le pouls après un effort

En SVT, les élèves d'une classe mesurent leur pouls après un même effort, en battements par minute. Une case du relevé est effacée :

Pouls x_i	100	110	120	130	140
Effectif n_i	2	5	4	n_4	3

Le professeur sait que le pouls moyen de la classe vaut $\overline{x} = 121{,}5$ battements par minute.

1. 0,75 pts

On pose $y_i = \dfrac{x_i - 120}{10}$. a) Calculer les valeurs y_i et exprimer x_i en fonction de y_i. b) En déduire la moyenne $\overline{y}$ de la série des y_i.

INDICE

Outil : isole x_i dans la relation qui définit y_i, puis applique la propriété du changement affine à la série des y_i.

CORRIGÉ

a) Pour $x_1 = 100$, $y_1 = \dfrac{100 - 120}{10} = -2$; de même, les valeurs y_i sont -2, -1, 0, 1 et 2.

De $y_i = \dfrac{x_i - 120}{10}$, on tire $10y_i = x_i - 120$, donc $x_i = 10y_i + 120$.

b) D'après la propriété du changement affine, $\overline{x} = 10\,\overline{y} + 120$. Avec $\overline{x} = 121{,}5$:

$$121{,}5 = 10\,\overline{y} + 120,$$

donc $10\,\overline{y} = 1{,}5$ et $\overline{y} = \dfrac{1{,}5}{10} = 0{,}15$.

Conclusion. Pour chaque valeur, $x_i = 10y_i + 120$, et la moyenne de la série des y_i vaut $0{,}15$.

2. 1 pts

a) Exprimer $n_1y_1 + n_2y_2 + \cdots + n_5y_5$ et l'effectif total N en fonction de n_4. b) En déduire n_4 et N, puis contrôler la valeur de $\overline{x}$.

INDICE

Début : écris $\overline{y}$ comme un quotient qui dépend de n_4. **Ensuite :** égale ce quotient à $0{,}15$ et résous l'équation du premier degré obtenue.

CORRIGÉ

a) La somme des produits n_iy_i vaut :

$$\begin{aligned} &2\times(-2)+5\times(-1)\\ &\quad+4\times0+n_4\times1\\ &\quad+3\times2\\ &=n_4-3, \end{aligned}$$

et l'effectif total vaut :

$$\begin{aligned} N&=2+5+4+n_4+3\\ &=14+n_4. \end{aligned}$$

b) D'après la définition de la moyenne, $\overline{y}$ est le quotient de ces deux expressions ; il vaut $0{,}15$:

$$\overline{y}=\frac{n_4-3}{14+n_4}=0{,}15.$$

On multiplie les deux membres par $14+n_4$, qui n'est pas nul :

$$n_4-3=2{,}1+0{,}15\,n_4.$$

En regroupant les termes en n_4, on obtient $0{,}85\,n_4=5{,}1$, d'où $n_4=6$, car $0{,}85\times6=5{,}1$. L'effectif total vaut alors $N=20$.

Contrôle. $\dfrac{200+550+480+780+420}{20}=\dfrac{2430}{20}=121{,}5$, la moyenne annoncée.

Conclusion. L'effectif effacé vaut $n_4=6$, et la classe compte $N=20$ élèves.

3. 1 pts

a) Écrire, valeur par valeur, le nombre d'élèves dont le pouls est inférieur ou égal à cette valeur. b) En déduire la médiane de la série ; préciser son mode.

INDICE

Début : $N = 20$ est pair ; les rangs du milieu sont 10 et 11. **Ensuite :** le mode est la valeur de plus grand effectif.

CORRIGÉ

a) Ce sont les effectifs cumulés croissants : 2 ; 7 ; 11 ; 17 ; 20.

b) $N = 20$ est pair : d'après la définition de la médiane, M_e est la moyenne des valeurs de rangs 10 et 11. Le cumul passe de 7 à 11 à la valeur 120 : les rangs 8 à 11 portent la valeur 120. Les valeurs de rangs 10 et 11 valent donc toutes deux 120, et $M_e = 120$ battements par minute.

Le plus grand effectif est 6, celui de la valeur 130 : d'après la définition du mode, le mode vaut 130 battements par minute.

Conclusion. La médiane vaut 120 et le mode 130 battements par minute.

4. 1,25 pts

a) Calculer l'étendue de la série, puis les distances $|x_i - \overline{x}|$. b) En déduire l'écart moyen e.

INDICE

Outil : la définition de l'écart moyen, avec $\overline{x} = 121{,}5$: chaque distance compte autant de fois que son effectif.

CORRIGÉ

a) D'après la définition de l'étendue, elle vaut $140 - 100 = 40$ battements par minute. Avec $\overline{x} = 121{,}5$, les distances à la moyenne sont $21{,}5$; $11{,}5$; $1{,}5$; $8{,}5$ et $18{,}5$.

b) D'après la définition de l'écart moyen, chaque distance compte autant de fois que son effectif. La somme pondérée des distances vaut :

$$\begin{aligned} &2 \times 21{,}5 + 5 \times 11{,}5 \\ &\quad + 4 \times 1{,}5 + 6 \times 8{,}5 \\ &\quad + 3 \times 18{,}5 \\ &= 43 + 57{,}5 + 6 \\ &\quad + 51 + 55{,}5 \\ &= 213, \end{aligned}$$

donc :

$$e = \frac{213}{20} = 10{,}65.$$

Conclusion. L'étendue vaut 40 et l'écart moyen $e = 10{,}65$ battements par minute : en moyenne, le pouls d'un élève s'écarte de $10{,}65$ battements par minute du pouls moyen.

5. 1 pts

Un élève affirme : « La moitié de la classe a un pouls supérieur au pouls moyen. » a) Calculer la proportion des élèves dont le pouls est supérieur à $121{,}5$. b) L'affirmation est-elle exacte ? Quel paramètre partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif ?

INDICE

Méthode : compte les élèves dont le pouls vaut 130 ou 140, puis compare au rôle de la médiane.

CORRIGÉ

a) Les pouls supérieurs à $121{,}5$ sont 130 et 140 : $6 + 3 = 9$ élèves, soit une proportion de $\dfrac{9}{20} = 0{,}45$.

b) $0{,}45 < 0{,}5$: l'affirmation est fausse. C'est la médiane, 120, qui partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif : les 10 premières valeurs sont inférieures ou égales à 120, les 10 dernières supérieures ou égales à 120. La moyenne, qui tient compte de toutes les valeurs, est ici un peu au-dessus de la médiane.

Conclusion. Seule une proportion $0{,}45$ des élèves a un pouls supérieur au pouls moyen : l'affirmation est inexacte, et le paramètre qui partage la série en deux groupes de même effectif est la médiane.