BURHAN

Statistique : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/statistique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Statistique	Application	8

Exercice 1

Les arbres d'un parc

Le service des espaces verts d'une commune étudie les 30 arbres d'un parc. Pour chaque arbre, il relève cinq renseignements :

- l'espèce (pin, chêne, eucalyptus…) ;
- le nombre de branches maîtresses ;
- la hauteur, en mètres ;
- l'état sanitaire : bon, moyen ou mauvais ;
- le diamètre du tronc, en centimètres.

1.

Quelle est la population étudiée ? Qu'est-ce qu'un individu de cette étude ? Donner l'effectif total.

INDICE

Outil : la définition de la population et de l'individu. Demande-toi sur quoi portent les relevés.

CORRIGÉ

Population. D'après la définition de la population, c'est l'ensemble sur lequel portent les relevés : ici, les arbres du parc.

Individu. Chaque relevé concerne un arbre : un individu est un arbre de ce parc.

Conclusion. La population étudiée est l'ensemble des arbres du parc, un individu est un arbre de ce parc, et l'effectif total vaut $N = 30$.

2.

Donner la nature de chacun des cinq caractères relevés.

INDICE

Outil : la définition du caractère. Regarde d'abord si les réponses sont des nombres ; si oui, demande-toi si toutes les valeurs d'un intervalle sont possibles.

CORRIGÉ

D'après la définition du caractère, on regarde d'abord si les modalités sont des nombres, puis si toutes les valeurs d'un intervalle sont possibles :

- l'espèce est un caractère **qualitatif** : ses modalités sont des noms ;
- le nombre de branches maîtresses est **quantitatif discret** : il ne prend que des valeurs entières ;
- la hauteur est **quantitative continue** : elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle ;
- l'état sanitaire est **qualitatif** : ses modalités sont des mots, même si on peut les ordonner ;
- le diamètre du tronc est **quantitatif continu**, pour la même raison que la hauteur.

Conclusion. Deux caractères sont qualitatifs (l'espèce et l'état sanitaire), un est quantitatif discret (le nombre de branches maîtresses), et deux sont quantitatifs continus (la hauteur et le diamètre du tronc).

3.

Pour quels caractères est-il naturel de regrouper les valeurs en classes ? Justifier.

INDICE

Outil : la définition des classes. On regroupe quand les valeurs distinctes sont très nombreuses.

CORRIGÉ

La hauteur et le diamètre sont des caractères continus. Sur 30 arbres, on obtient presque 30 valeurs différentes : un tableau valeur par valeur serait long et illisible.

D'après la définition des classes, on regroupe alors ces valeurs en intervalles, par exemple de 5 m en 5 m pour la hauteur.

Conclusion. Il est naturel de regrouper en classes la hauteur et le diamètre du tronc, parce que ces caractères continus prennent presque autant de valeurs que d'arbres.

Exercice 2

Des graines qui germent

En SVT, on sème 4 graines de haricot dans chacun de 25 pots. Une semaine plus tard, on compte les graines germées dans chaque pot :

$2\ ;\ 3\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 2\ ;\ 0\ ;\ 3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 3\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 2\ ;\ 0\ ;\ 3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 3\ ;\ 2.$

1.

Quel est le caractère étudié et quelle est sa nature ? Dresser le tableau des effectifs.

INDICE

Outil : la définition de l'effectif. Raye chaque valeur de la liste au fur et à mesure que tu la comptes.

CORRIGÉ

Caractère. Le caractère étudié est le nombre de graines germées dans un pot. Il ne prend que les valeurs entières 0, 1, 2, 3 et 4 : il est quantitatif discret.

Tableau. D'après la définition de l'effectif, on compte combien de pots portent chaque valeur :

Graines germées x_i	0	1	2	3	4
Effectif n_i	2	4	9	6	4

Conclusion. Le caractère, quantitatif discret, est le nombre de graines germées par pot ; le tableau ci-dessus donne l'effectif de chacune de ses cinq valeurs.

2.

Vérifier l'effectif total.

INDICE

Outil : la définition de l'effectif total ; compare avec le nombre de pots.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'effectif total, on additionne les effectifs du tableau :

$$N = 2 + 4 + 9 + 6 + 4 = 25.$$

On retrouve le nombre de pots : aucune valeur n'a été oubliée ni comptée deux fois.

Conclusion. L'effectif total vaut bien 25, le nombre de pots.

3.

Calculer les fréquences sous forme décimale, puis contrôler leur somme. Quelle est la fréquence des pots où toutes les graines ont germé ?

INDICE

Outil : $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ avec $N = 25$. **Contrôle :** la propriété de la somme des fréquences.

CORRIGÉ

Fréquences. D'après la définition de la fréquence, on divise chaque effectif par $N = 25$:

Graines germées x_i	0	1	2	3	4
Fréquence f_i	$0{,}08$	$0{,}16$	$0{,}36$	$0{,}24$	$0{,}16$

Contrôle. D'après la propriété de la somme des fréquences, le total doit valoir 1 :

$$0{,}08 + 0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}16 = 1.$$

Conclusion. Toutes les graines ont germé dans les pots de valeur 4 : la fréquence de ces pots vaut $\dfrac{4}{25} = 0{,}16$.

Exercice 3

Passagers au péage

À un péage d'autoroute, un agent compte le nombre de personnes à bord de 50 voitures :

Personnes à bord x_i	1	2	3	4	5
Nombre de voitures n_i	18	14	9	6	3

1.

Calculer les effectifs cumulés croissants.

INDICE

Outil : la définition des effectifs cumulés. Ajoute chaque effectif au cumul précédent ; le dernier cumul doit valoir 50.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'effectif cumulé croissant, on ajoute chaque effectif au cumul précédent, de la valeur 1 à la valeur 5 :

- valeur 1 : 18 ;
- valeur 2 : $18 + 14 = 32$;
- valeur 3 : $32 + 9 = 41$;
- valeur 4 : $41 + 6 = 47$;
- valeur 5 : $47 + 3 = 50$.

Contrôle. Le dernier cumul, 50, est bien l'effectif total.

Conclusion. Les effectifs cumulés croissants sont 18, 32, 41, 47 et 50.

2.

Calculer les effectifs cumulés décroissants.

INDICE

Outil : même définition, en partant de la plus grande valeur.

CORRIGÉ

On cumule cette fois en partant de la plus grande valeur, 5 :

- valeur 5 : 3 ;
- valeur 4 : $3 + 6 = 9$;
- valeur 3 : $9 + 9 = 18$;
- valeur 2 : $18 + 14 = 32$;
- valeur 1 : $32 + 18 = 50$.

Conclusion. Rangés dans l'ordre des valeurs 1 à 5, les effectifs cumulés décroissants sont 50, 32, 18, 9 et 3.

3.

Combien de voitures transportent au plus 2 personnes ? au moins 4 personnes ?

INDICE

Outil : « au plus » se lit sur les cumuls croissants, « au moins » sur les cumuls décroissants.

CORRIGÉ

- **Au plus 2 personnes.** L'effectif cumulé croissant de la valeur 2 vaut 32 : 32 voitures transportent au plus 2 personnes.
- **Au moins 4 personnes.** L'effectif cumulé décroissant de la valeur 4 vaut 9 : 9 voitures transportent au moins 4 personnes.

Conclusion. Sur les 50 voitures, 32 ont au plus 2 personnes à bord et 9 en ont au moins 4.

4.

Calculer la fréquence cumulée croissante de la valeur 3 et l'interpréter.

INDICE

Outil : divise l'effectif cumulé croissant par $N = 50$.

CORRIGÉ

D'après la définition de la fréquence cumulée croissante, on divise l'effectif cumulé croissant de la valeur 3 par $N = 50$:

$$\frac{41}{50} = 0{,}82.$$

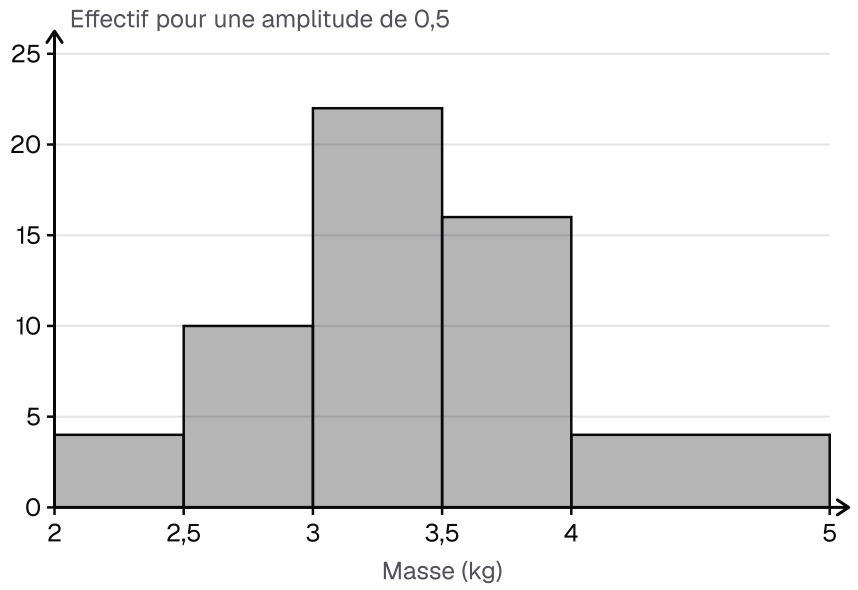
Conclusion. La fréquence cumulée croissante de la valeur 3 vaut $0{,}82$. Ainsi, 41 voitures sur 50 transportent au plus 3 personnes : c'est une proportion de $0{,}82$, soit 82 sur 100.

Exercice 4

Lire l'histogramme des nouveau-nés

Une maternité a tracé l'histogramme des masses de ses nouveau-nés d'un mois, en kilogrammes. L'amplitude de référence est $0{,}5$ kg. Unité d'aire : un rectangle de base $0{,}5$ kg et de hauteur 1 représente un nouveau-né. On lit les hauteurs suivantes :

Masse (kg)	$[2;2{,}5[$	$[2{,}5;3[$	$[3;3{,}5[$	$[3{,}5;4[$	$[4;5[$
Hauteur du rectangle	4	10	22	16	4



L'histogramme de la maternité, tel qu'il est tracé : cinq rectangles dont on lit les hauteurs, la dernière classe allant de 4 à 5 kg.

1.

Calculer l'amplitude de chaque classe.

INDICE

Outil : l'amplitude de $[a;b[$ est $b-a$.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'amplitude, la classe $[a;b[$ a pour amplitude $b-a$:

- les quatre premières classes ont pour amplitude $0{,}5$ kg, par exemple $2{,}5-2=0{,}5$;
- la dernière, $[4;5[$, a pour amplitude $5-4=1$ kg.

Conclusion. Les quatre premières classes ont pour amplitude $0{,}5$ kg, la dernière 1 kg.

2.

En déduire l'effectif de chaque classe, puis le nombre total de nouveau-nés.

INDICE

Outil : dans un histogramme, c'est l'aire du rectangle qui représente l'effectif. **Attention** à la dernière classe, deux fois plus large.

CORRIGÉ

Dans un histogramme, c'est l'aire de chaque rectangle qui représente l'effectif de sa classe.

Classes d'amplitude $0{,}5$ kg. Leur base est l'amplitude de référence : l'effectif est égal à la hauteur, soit 4, 10, 22 et 16.

Classe $[4;5[$. Sa base vaut deux amplitudes de référence. Pour une même hauteur, l'aire est double, et l'effectif vaut $4 \times 2 = 8$.

Total.

$$\begin{aligned} N &= 4 + 10 + 22 + 16 + 8 \\ &= 60. \end{aligned}$$

Conclusion. Les effectifs des classes sont 4, 10, 22, 16 et 8 ; l'étude porte sur 60 nouveau-nés.

3.

Quelle est la fréquence des nouveau-nés de moins de 3 kg ? Donner la valeur exacte, puis un arrondi au centième.

INDICE

Outil : additionne les effectifs des classes situées sous 3 kg, puis divise par N.

CORRIGÉ

Les nouveau-nés de moins de 3 kg sont ceux des classes $[2;2{,}5[$ et $[2{,}5;3[$, soit $4 + 10 = 14$ nouveau-nés. D'après la définition de la fréquence :

$$f = \frac{14}{60} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23,$$

arrondi au centième.

Conclusion. La fréquence des nouveau-nés de moins de 3 kg vaut exactement $\dfrac{7}{30}$, soit environ $0{,}23$.

4.

Donner la classe modale.

INDICE

Outil : la définition de la classe modale : le rectangle le plus haut.

CORRIGÉ

D'après la définition de la classe modale, on cherche le rectangle le plus haut. Toutes les hauteurs sont rapportées à la même amplitude de référence : on peut donc les comparer directement.

Conclusion. La classe modale est $[3;3{,}5[$, de hauteur 22.

Exercice 5

Pointures d'un club de basket

Un club de basket relève la pointure de ses 40 joueurs :

Pointure x_i	40	41	42	43	44	45
Effectif n_i	2	5	9	12	8	4

1.

Calculer les produits $n_i x_i$ et leur somme.

INDICE

Début : $2 \times 40 = 80$. Continue colonne par colonne.

CORRIGÉ

Produits. Pour chaque pointure, on multiplie la valeur x_i par son effectif n_i, par exemple $9 \times 42 = 378$. De la pointure 40 à la pointure 45, les produits $n_i x_i$ sont 80, 205, 378, 516, 352 et 180.

Somme.

$$\begin{aligned} &80 + 205 + 378 \\ &\quad + 516 + 352 + 180 \\ &= 1711. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme des produits $n_i x_i$ vaut 1711.

2.

Calculer la pointure moyenne, arrondie au dixième. Contrôler le résultat.

INDICE

Outil : la définition de la moyenne, avec $N = 40$.

CORRIGÉ

D'après la définition de la moyenne, on divise la somme des produits par l'effectif total $N = 40$:

$$\overline{x} = \frac{1711}{40} = 42{,}775,$$

soit $\overline{x} \approx 42{,}8$, arrondi au dixième.

Contrôle. La moyenne est bien comprise entre la plus petite pointure, 40, et la plus grande, 45.

Conclusion. La pointure moyenne des joueurs du club vaut environ $42{,}8$.

3.

Un joueur propose le calcul $\dfrac{40+41+42+43+44+45}{6}$. Que vaut-il ? Pourquoi ne donne-t-il pas la moyenne de la série ?

INDICE

Outil : dans la définition de la moyenne, chaque valeur est multipliée par son effectif.

CORRIGÉ

Valeur du calcul. La somme des six pointures vaut 255, donc ce calcul vaut $\dfrac{255}{6} = 42{,}5$.

Ce qui ne va pas. Ce calcul donne le même poids à chaque pointure, comme si chacune ne concernait qu'un joueur. Or 12 joueurs chaussent du 43 et seulement 2 du 40 : la définition de la moyenne multiplie chaque valeur par son effectif.

Conclusion. Le calcul proposé vaut $42{,}5$. Il ignore les effectifs, alors que la moyenne de la série en tient compte : elle vaut $42{,}775$, plus élevée.

Exercice 6

Temps de trajet de douze élèves

Douze élèves indiquent leur temps de trajet entre leur domicile et le lycée, en minutes :

14 ; 8 ; 25 ; 10 ; 18 ; 12 ; 30 ; 9 ; 15 ; 22 ; 12 ; 20.

1.

Ranger ces temps dans l'ordre croissant.

INDICE

Méthode : cherche la plus petite valeur, raye-la, et recommence. Il doit rester 12 valeurs.

CORRIGÉ

On cherche la plus petite valeur, on la raye, et l'on recommence jusqu'à épuiser la liste. Dans l'ordre croissant :

8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 15 ; 18 ; 20 ; 22 ; 25 ; 30.

Contrôle. La liste rangée compte bien 12 valeurs, et le temps 12 y figure deux fois, comme dans la liste de départ.

2.

Déterminer la médiane de cette série et l'interpréter.

INDICE

Outil : la définition de la médiane ; $N = 12$ est pair.

CORRIGÉ

Rangs du milieu. L'effectif $N = 12$ est pair. D'après la définition de la médiane, M_e est la moyenne des valeurs de rangs 6 et 7 de la série rangée, c'est-à-dire 14 et 15.

Calcul. Ainsi $M_e = \dfrac{14 + 15}{2} = 14{,}5$ min.

Conclusion. La médiane vaut $14{,}5$ minutes : la moitié de ces élèves mettent moins de $14{,}5$ minutes pour venir au lycée, l'autre moitié davantage.

3.

Un treizième élève, qui met 16 minutes, rejoint le groupe. Quelle est la nouvelle médiane ?

INDICE

Début : place 16 dans la liste rangée. **Ensuite :** $N = 13$ est impair.

CORRIGÉ

Nouvelle liste. On place 16 entre 15 et 18 :

8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 25 ; 30.

Rang du milieu. Comme $N = 13$ est impair, la médiane est la valeur de rang $\dfrac{13 + 1}{2} = 7$.

Conclusion. Avec le treizième élève, la nouvelle médiane est $M_e = 15$ min.

Exercice 7

Buts marqués en vingt matchs

Une équipe de football de quartier note le nombre de buts qu'elle a marqués lors de ses 20 derniers matchs :

Buts marqués x_i	0	1	2	3	5
Nombre de matchs n_i	4	7	5	3	1

1.

Vérifier que le tableau compte bien 20 matchs, puis donner le mode de la série.

INDICE

Outil : la définition du mode : la valeur dont l'effectif est le plus grand.

CORRIGÉ

Effectif total. $4 + 7 + 5 + 3 + 1 = 20$: le tableau compte bien 20 matchs.

Mode. D'après la définition du mode, on cherche la valeur de plus grand effectif. Le plus grand effectif est 7, celui de la valeur 1.

Conclusion. Le tableau compte 20 matchs, et le mode est 1 but.

2.

Calculer l'étendue de la série.

INDICE

Outil : la définition de l'étendue.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'étendue, c'est la différence entre la plus grande valeur, 5, et la plus petite, 0 : elle vaut $5 - 0 = 5$ buts.

Conclusion. L'étendue de la série est de 5 buts.

3.

On retire le seul match à 5 buts, joué contre une équipe très faible. Que deviennent le mode et l'étendue ?

INDICE

Début : écris la nouvelle plus grande valeur. **Ensuite :** l'effectif de la valeur 1 a-t-il changé ?

CORRIGÉ

Étendue. Sans ce match, la plus grande valeur est 3 : l'étendue devient $3 - 0 = 3$ buts.

Mode. L'effectif de la valeur 1 reste 7, toujours le plus grand : le mode reste 1 but.

Conclusion. L'étendue passe de 5 à 3 buts, tandis que le mode ne change pas. L'étendue dépend des deux valeurs extrêmes, le mode non.

Exercice 8

Le pH de cinq échantillons d'eau

En chimie, on mesure le pH de cinq échantillons d'eau prélevés dans un même puits :

$6{,}8$; $7{,}0$; $7{,}4$; $7{,}2$; $7{,}1$.

1.

Calculer le pH moyen.

INDICE

Outil : la définition de la moyenne ; chaque valeur a pour effectif 1.

CORRIGÉ

D'après la définition de la moyenne, chaque valeur ayant pour effectif 1, on divise la somme des cinq pH par 5 :

$$\overline{x} = \frac{6{,}8 + 7{,}0 + 7{,}4 + 7{,}2 + 7{,}1}{5} = \frac{35{,}5}{5} = 7{,}1.$$

Conclusion. Le pH moyen des cinq échantillons vaut $7{,}1$.

2.

Calculer la variance par sa définition, puis l'écart type.

INDICE

Outil : la définition de la variance : la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

CORRIGÉ

Écarts à la moyenne. En retranchant $7{,}1$ à chaque valeur, on obtient $-0{,}3$; $-0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}1$ et 0. Leurs carrés valent $0{,}09$; $0{,}01$; $0{,}09$; $0{,}01$ et 0.

Variance. D'après la définition de la variance, V est la moyenne de ces carrés. Leur somme vaut :

$$\begin{aligned} &0{,}09 + 0{,}01 + 0{,}09 \\ &\quad + 0{,}01 + 0 = 0{,}2, \end{aligned}$$

donc :

$$V = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04.$$

Écart type. $\sigma = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$.

Conclusion. La variance vaut $0{,}04$ et l'écart type $0{,}2$: les pH s'écartent en général d'environ $0{,}2$ du pH moyen.