BURHAN

Résumé : La projection dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
La projection dans le plan	Semestre 1

Le projeté d'un point

À retenir : Projeter, c'est glisser dans une direction fixée

Projeter, c'est faire glisser un point jusqu'à une droite, toujours dans la même direction.

Il faut deux droites sécantes : la droite (D) qui reçoit les projetés, et la droite (Δ) qui donne la direction du glissement. Le projeté d'un point dépend donc de ces deux droites.

Définition : Projeté d'un point sur une droite parallèlement à une autre

Soit (D) et (Δ) deux droites **sécantes** du plan, et M un point du plan. La droite qui passe par M et qui est parallèle à (Δ) coupe la droite (D) en un point unique M'.

Le point M' s'appelle le **projeté** de M sur (D) **parallèlement à** (Δ). On dit aussi que M' est l'image de M par la **projection** sur (D) parallèlement à (Δ).

Méthode : construire un projeté

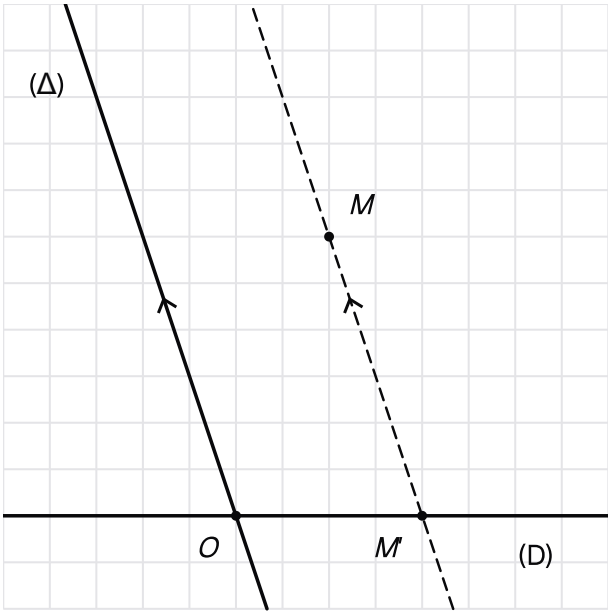
1. **Nomme** les deux droites : celle qui reçoit le projeté et celle qui fixe la direction. Elles doivent se couper.
2. **Mène** par le point la parallèle à la direction. Un point déjà situé sur la droite de projection ne bouge pas.
3. **Lis** le projeté là où cette parallèle rencontre la droite de projection.

Exemple

Énoncé. Sur un quadrillage, (D) est la ligne horizontale qui passe par un point O. La direction (Δ) recule d'un carreau quand elle monte de trois carreaux. Le point M est à deux carreaux à droite de O et six carreaux au-dessus. Place son projeté M' sur (D) parallèlement à (Δ).

Construction. Depuis M, descends de trois carreaux en avançant d'un carreau vers la droite : tu restes sur la parallèle à (Δ). Recommence une fois : tu arrives sur (D).

Conclusion. Le projeté M' est sur (D), à quatre carreaux à droite de O.



Deux pas d'un carreau vers la droite pour trois carreaux de descente mènent de M jusqu'à son projeté M', placé sur (D) quatre carreaux après O.

Propriété : Propriétés immédiates du projeté

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes. On projette sur (D) parallèlement à (Δ).

- Un point M est son propre projeté si et seulement si M appartient à (D).
- Deux points **distincts** M et N ont le même projeté si et seulement si la droite (MN) est parallèle à (Δ).

Exemple

Énoncé. Dans la figure précédente, N est à trois carreaux à droite de O et trois au-dessus, et P est sur (D), deux carreaux à gauche de O. Trouve leurs projetés.

Le point N. Pour aller de M à N, on avance d'un carreau et on descend de trois : la droite (MN) est parallèle à (Δ). Donc N et M ont le même projeté : $N' = M'$.

Le point P. Il appartient à (D) : il est son propre projeté, $P' = P$.

Attention : Deux points distincts peuvent avoir un seul projeté

Dans l'exemple ci-dessus, les points distincts M et N ont le même projeté. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ n'est pas nul, mais $\overrightarrow{M'N'} = \vec{0}$.

Avant de chercher un milieu projeté ou de diviser par un écart entre projetés, contrôle que ces projetés sont distincts.

La projection orthogonale

Définition : Projection orthogonale

Soit (D) une droite et (Δ) une droite **perpendiculaire** à (D). La projection sur (D) parallèlement à (Δ) s'appelle la **projection orthogonale** sur (D).

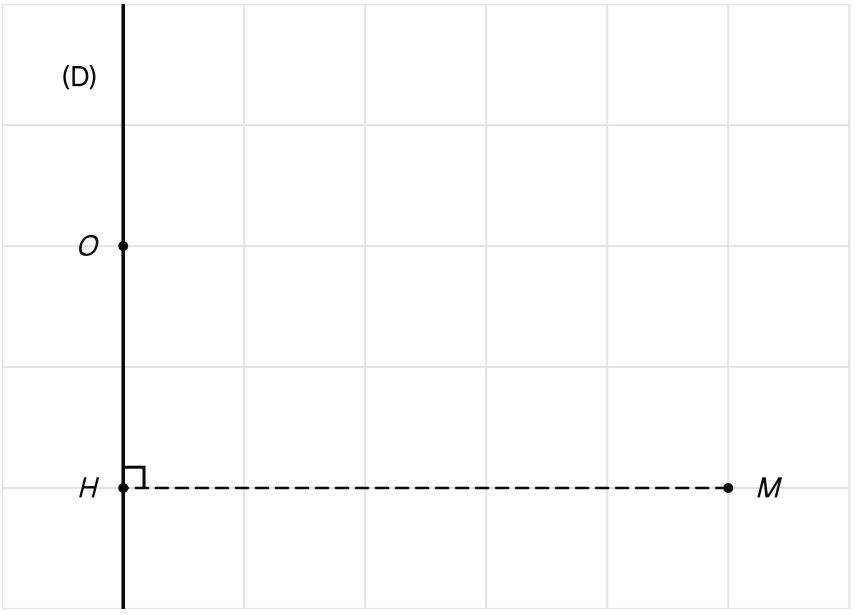
Le projeté H d'un point M est alors le point d'intersection de (D) et de la perpendiculaire à (D) passant par M : on l'appelle le **projeté orthogonal** de M sur (D).

Exemple

Énoncé. Sur un quadrillage, (D) est la ligne verticale qui passe par un point O. Le point M est à cinq carreaux à droite de O et deux carreaux en dessous. Place son projeté orthogonal H sur (D).

Construction. La perpendiculaire à (D) passant par M est la ligne horizontale du quadrillage qui passe par M.

Conclusion. Le projeté orthogonal H est sur (D), deux carreaux en dessous de O.



La ligne horizontale qui passe par M est perpendiculaire à la droite verticale (D) : elle la rencontre en H, deux carreaux sous O.

Remarque : Un cas particulier de projection

Une projection orthogonale reste une projection : les propriétés de ce chapitre s'y appliquent toutes.

En particulier, un point de (D) est son propre projeté orthogonal. Deux points distincts ont le même projeté orthogonal lorsque la droite qui les joint est perpendiculaire à (D).

Le théorème de Thalès en vecteurs

À retenir : Des longueurs aux vecteurs

Au collège, le théorème de Thalès donne des rapports de longueurs égaux. La forme vectorielle dit davantage : un seul réel k relie trois paires de vecteurs.

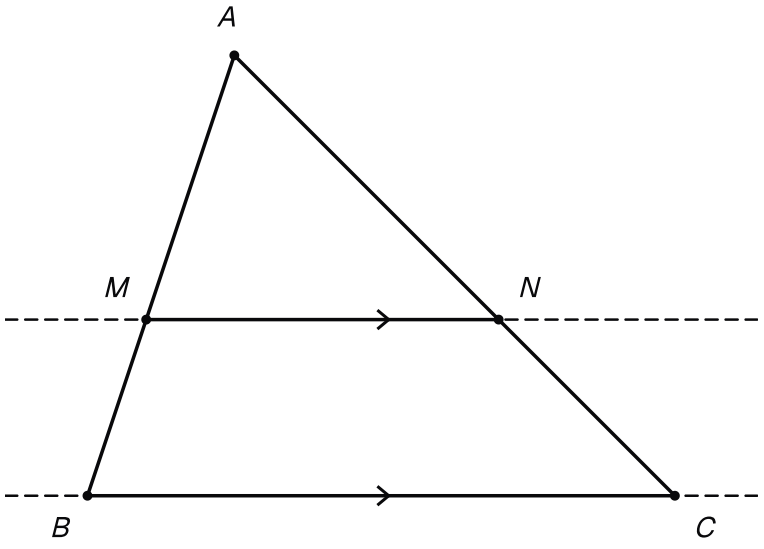
Son signe indique de quel côté du sommet se trouve le point. Si $k < 0$, les points M et B sont de part et d'autre du sommet commun A.

Théorème : Théorème de Thalès : forme vectorielle (sens direct)

Soit ABC un triangle, M un point de la droite (AB) distinct de A, et N un point de la droite (AC). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors il existe un réel k non nul tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}.$$

Le **même** réel k figure dans les trois égalités.



Le triangle ABC coupé par une parallèle à (BC) : M sur (AB) et N sur (AC) correspondent par le même réel k.

Méthode : écrire les trois égalités vectorielles

1. **Repère** le sommet commun aux deux droites sécantes et la paire de droites parallèles.
2. **Calcule** le réel k sur l'une des deux droites, en partant du sommet, sans oublier son signe.

3. **Recopie** ce même réel dans les deux autres égalités, en gardant l'ordre des lettres.

Exemple

Énoncé. EFG est un triangle et P le point tel que $\overrightarrow{EP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. La parallèle à (FG) menée par P coupe (EG) en Q. On donne $FG = 7$ cm.

Égalités. Le sommet commun est E, avec $k = -\frac{1}{2}$. Par la forme vectorielle du théorème de Thalès :

$$\overrightarrow{EQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EG},$$
$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}.$$

Longueur. La seconde égalité donne $PQ = \frac{1}{2} \times 7 = 3{,}5$ cm. Comme $k < 0$, Q est de l'autre côté de E par rapport à G.

Attention : Partir du sommet, garder l'ordre

Dans l'exemple précédent, écrire $\overrightarrow{PE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ serait faux : on a en réalité $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

Les deux vecteurs d'une égalité partent du sommet E. Pour le troisième, l'ordre se suit : de P vers Q comme de F vers G.

Théorème : Théorème de Thalès : forme vectorielle (sens réciproque)

Soit ABC un triangle et k un réel non nul. Si M et N sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC},$$

alors :

$$\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}.$$

Les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles (confondues lorsque $k = 1$).

Méthode : décider d'un parallélisme

1. **Exprime** $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$, issus du sommet commun A, à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
2. **Compare** les deux réels obtenus. S'ils sont égaux et non nuls, la forme réciproque donne le parallélisme.
3. **Conclus** avec soin : si les deux réels diffèrent et $M \neq A$, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles, car la forme directe imposerait le même réel.

Exemple

Énoncé. UVW est un triangle. On place X tel que $\overrightarrow{UX} = \frac{5}{2}\overrightarrow{UV}$, Y tel que $\overrightarrow{UY} = \frac{5}{2}\overrightarrow{UW}$ et Z tel que $\overrightarrow{UZ} = 2\overrightarrow{UW}$.

Avec Y. Le même réel $\frac{5}{2}$ apparaît deux fois. Par la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès :

$$\overrightarrow{XY} = \frac{5}{2}\overrightarrow{VW},$$

donc $(XY) \parallel (VW)$.

Avec Z. Les réels $\frac{5}{2}$ et 2 diffèrent, et $X \neq U$: (XZ) n'est pas parallèle à (VW).

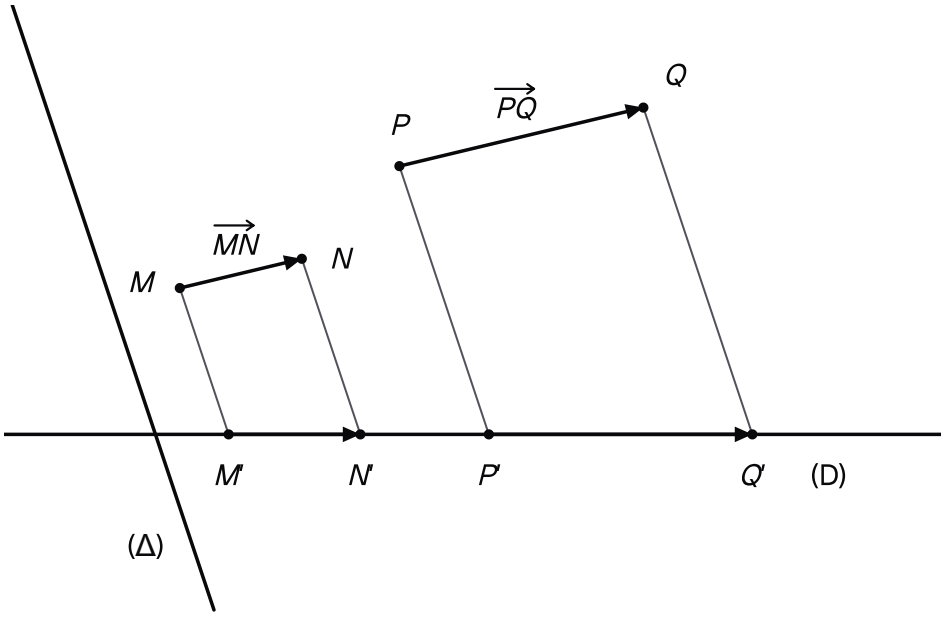
La conservation du coefficient

Propriété : Conservation du coefficient de colinéarité

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes. On note M', N', P' et Q' les projetés respectifs de quatre points M, N, P et Q sur (D) parallèlement à (Δ). Si k est un réel tel que $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{MN}$, alors

$$\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{M'N'}.$$

On dit que la projection **conserve le coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.



Quatre points M, N, P, Q tels que le vecteur PQ vaut deux fois le vecteur MN, et leurs projetés sur (D) suivant (Δ) : la même relation lie P'Q' et M'N'.

Remarque : Une propriété admise

Cette propriété est admise dans ce chapitre. Tu l'as constatée sur des figures, puis tu l'emploies sans la redémontrer. Elle porte sur des vecteurs colinéaires, reliés par un réel k.

Méthode : transporter une égalité par projection

1. **Cherche** dans la figure deux vecteurs colinéaires et le réel k qui les relie.
2. **Construis** les projetés des quatre extrémités. Pense aux points déjà situés sur (D).
3. **Recopie** le réel k entre les deux vecteurs projetés, sans le modifier.

Exemple

Énoncé. Quatre points vérifient $\overrightarrow{PQ} = -3\,\overrightarrow{MN}$. Sur (D), N' est à deux carreaux à droite de M'. Situe Q' par rapport à P'.

Conservation. D'après la conservation du coefficient de colinéarité :

$$\overrightarrow{P'Q'} = -3\,\overrightarrow{M'N'}.$$

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{P'Q'}$ est trois fois plus long que $\overrightarrow{M'N'}$, de sens contraire : Q' est à six carreaux à gauche de P'.

Propriété : Vecteurs égaux et milieu par projection

On projette sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D), et l'on note X' le projeté de chaque point X.

- Si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$.
- Si I est le milieu du segment $[MN]$, alors I' est le milieu du segment $[M'N']$.

Exemple

Énoncé. I est le milieu d'un segment $[MN]$. Sur (D), les projetés M' et N' sont à un carreau et à sept carreaux à droite d'un point O. Place I'.

Milieu. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », I' est le milieu de $[M'N']$.

Conclusion. I' est à quatre carreaux à droite de O, car $\dfrac{1+7}{2} = 4$.

Attention : Les longueurs ne se conservent pas

Un segment et son projeté n'ont pas, en général, la même longueur : cela dépend de la direction choisie.

Dans le premier exemple, le segment $[OM]$ monte de six carreaux : il mesure plus de six côtés de carreau. Son projeté $[OM']$ n'en mesure que quatre.

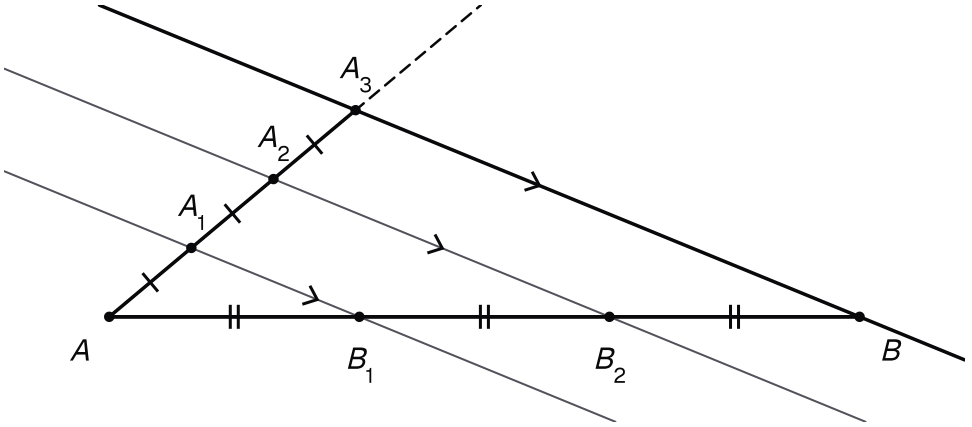
La projection garde le réel k entre vecteurs colinéaires, pas les distances.

Attention : Seulement pour des vecteurs colinéaires

Sans égalité $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$, rien ne se transporte. Pour deux vecteurs non colinéaires, le rapport des longueurs projetées peut être quelconque. Avant de projeter, écris donc l'égalité vectorielle qui relie les deux vecteurs.

Méthode : partager un segment en n parts égales

1. **Trace** depuis A une demi-droite hors de (AB) et gradue-la en n pas égaux : A_1, A_2, ..., A_n.
2. **Joins** A_n à B, puis mène par chaque point A_j la parallèle à (A_nB) : elle coupe $[AB]$ en B_j.
3. **Justifie** par la conservation du coefficient de colinéarité : A reste en A, A_n va en B, donc $\overrightarrow{AB_j} = \frac{j}{n}\,\overrightarrow{AB}$.
4. **Exemple** : pour six parts égales, $\overrightarrow{AB_5} = \frac{5}{6}\,\overrightarrow{AB}$.



Le partage pour n égal à trois : graduation régulière A1, A2, A3 sur une demi-droite issue de A, droite (A3B), puis parallèles qui donnent B1 et B2.

Projeter sur un axe

Définition : Axe, abscisse et projection sur un axe

Un **axe** est une droite (D) munie d'un point O, appelé origine, et d'un vecteur non nul $\vec{i}$ qui dirige (D) ; on le note $(O, \vec{i})$. Pour tout point M de (D), il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$: c'est l'**abscisse** de M sur l'axe.

Projeter un point M sur l'axe parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D), ou orthogonalement, c'est construire son projeté M' sur (D). L'abscisse de M' s'appelle l'abscisse du projeté de M.

Propriété : Abscisses et projection sur un axe

Soit $(O, \vec{i})$ un axe porté par la droite (D).

- Si A et B sont deux points de (D) d'abscisses respectives a et b, alors $\overrightarrow{AB} = (b-a)\,\vec{i}$.
- On projette sur (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D). Si $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$ et si les projetés M', N', P', Q' ont pour abscisses respectives m', n', p', q', alors $q' - p' = k\,(n' - m')$.

Méthode : calculer avec les abscisses

1. **Note** l'abscisse de chaque projeté sur l'axe.
2. **Remplace** chaque vecteur porté par l'axe par l'abscisse de son extrémité moins celle de son origine, multipliée par $\vec{i}$.
3. **Transporte** l'égalité vectorielle de départ en une égalité entre réels, puis résous l'équation.

Exemple

Énoncé. On projette sur un axe $(O, \vec{i})$. Les projetés de M, N et P ont pour abscisses $m' = -2$, $n' = 3$ et $p' = 1$. Le point Q vérifie $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{MN}$. Calcule l'abscisse q' de son projeté.

Égalité entre réels. D'après la propriété des abscisses et de la projection sur un axe :

$$q' - p' = \frac{2}{5}\,(n' - m').$$

Calcul. $q' - 1 = \dfrac{2}{5} \times 5 = 2$, donc $q' = 3$: Q et N ont le même projeté.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Construire un projeté** : mener par le point une parallèle à (Δ), puis couper (D).
- **Reconnaître un même projeté** : la droite qui joint les deux points est parallèle à la direction.
- **Écrire des égalités vectorielles** : la forme directe du théorème de Thalès, avec un seul réel k.
- **Prouver un parallélisme** : la forme réciproque, avec deux réels égaux.
- **Transporter une égalité** : la conservation du coefficient de colinéarité.
- **Placer un milieu ou partager un segment** : la conservation, avec $k = \dfrac{1}{2}$ ou $k = \dfrac{j}{n}$.

- **Calculer sur un axe** : les différences d'abscisses.

Thalès, forme directe : ABC triangle, M sur (AB) distinct de A, N sur (AC), (MN) parallèle à (BC)

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$$

Thalès, forme réciproque : même réel k non nul

$$\text{si } \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$
$$\text{et } \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC},$$
$$\text{alors } (MN) \parallel (BC)$$

Conservation du coefficient par la projection

$$\text{si } \overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN},$$
$$\text{alors } \overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{M'N'}$$

Partage d'un segment en n parts égales

$$\text{si } \overrightarrow{AA_j} = \frac{j}{n}\,\overrightarrow{AA_n},$$
$$\text{alors } \overrightarrow{AB_j} = \frac{j}{n}\,\overrightarrow{AB}$$

Vecteur porté par un axe

$$\overrightarrow{AB} = (b-a)\,\vec{i}$$

Abscisses des projetés

$$\text{si } \overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN},$$
$$\text{alors } q' - p' = k\,(n' - m')$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour chaque projeté, écris sur quelle droite tu projettes et parallèlement à quelle droite. Quand tu transportes une égalité, cite la conservation du coefficient de colinéarité.

Avec le théorème de Thalès, nomme le sommet et donne le réel k. Trace la figure sur ton cahier : elle contrôle tes calculs.