BURHAN

La projection dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

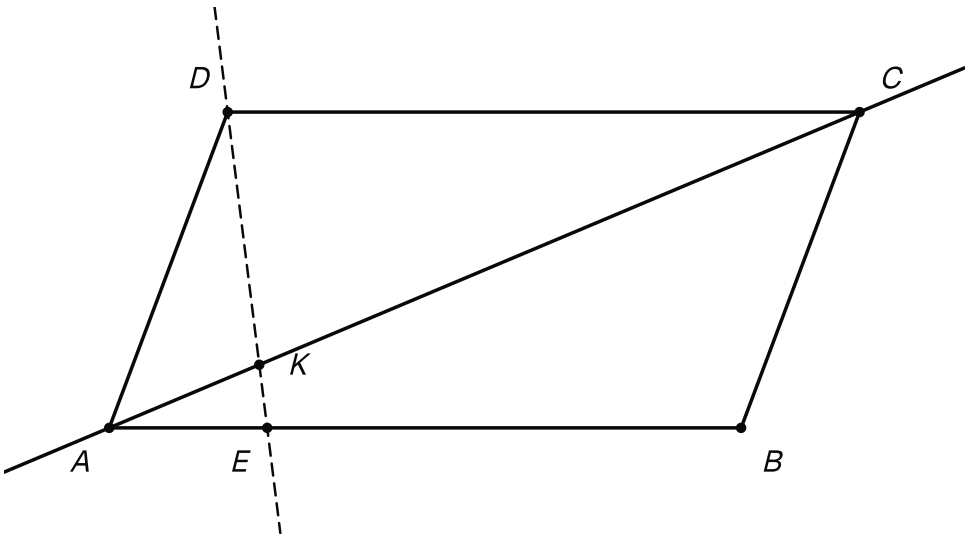
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La projection dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Une droite qui coupe la diagonale d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point E vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. La droite (DE) coupe la diagonale (AC) en un point K. Fais la figure sur ton cahier.



Le parallélogramme ABCD, le point E au quart de [AB] depuis A, et la droite (DE) qui rencontre la diagonale (AC) au point K.

1. — 0,75 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{EA}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$. b) En déduire que $(EA) \parallel (DC)$.

INDICE

Début : dans un parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. — 1,25 pts

On se place dans le triangle KDC. a) Justifier que $E \in (KD)$, que $A \in (KC)$ et que $E \neq K$. b) À l'aide de la forme vectorielle du théorème de Thalès de sommet K, exprimer $\overrightarrow{KA}$ en fonction de $\overrightarrow{KC}$. c) En déduire $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Pour a) : E est sur (AB) et distinct de A. **Pour b) :** le réel k se lit avec la question 1. **Pour c) :** exprime $\overrightarrow{KC}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$, puis utilise la relation de Chasles.

3. — 1 pts

On projette sur (AB) parallèlement à (AD), et l'on note X' le projeté de chaque point X. a) Déterminer A' et D'. b) Déterminer C'.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** quelle droite passant par C est parallèle à (AD) ?

4. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{AK'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. b) Placer K' sur la figure.

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité, appliquée à l'égalité de la question 2. c).

5. 1 pts

La droite (AB) est munie de l'axe $(A, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{AB} = 10\,\vec{i}$. On note J le milieu de $[EC]$. a) Donner les abscisses de E et de B. b) En déduire l'abscisse de J'.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4} \times 10\,\vec{i}$. **Pour b) :** quels sont les projetés de E et de C ?

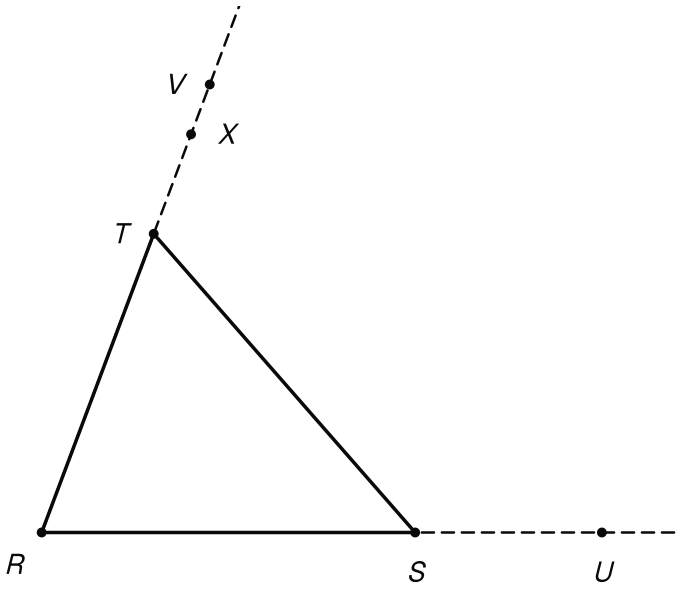
Exercice 2 5 pts

Des points sur les prolongements des côtés d'un triangle

RST est un triangle. On place les points U, V et X tels que :

$$\overrightarrow{RU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS},$$
$$\overrightarrow{RV} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{RX} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RT}.$$

Les points U, V et X sont sur les prolongements des côtés, au-delà de S ou de T. Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle RST et les trois points placés sur les prolongements des côtés issus de R : U au-delà de S, puis X et V au-delà de T.

1. 1 pts

a) Comparer les réels des deux égalités issues de R qui définissent U et V. b) En déduire $\overrightarrow{UV}$ en fonction de $\overrightarrow{ST}$, et la position des droites (UV) et (ST).

INDICE

Outil : la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès, de sommet R.

2. 1 pts

On projette sur (RS) parallèlement à (ST) ; Y' désigne le projeté de chaque point Y. a) Déterminer R' et T'. b) Déterminer V'.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** utilise la question 1.

3. 1 pts

On note J le milieu de $[TV]$. a) Situer J' sur (RS). b) Exprimer $\overrightarrow{RX'}$ en fonction de $\overrightarrow{RS}$.

INDICE

Pour a) : la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ». **Pour b) :** la conservation du coefficient de colinéarité.

4. 1 pts

La droite (RS) est munie de l'axe $(R, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{RS} = 6\,\vec{i}$. a) Donner les abscisses de S et de U. b) En déduire les abscisses de J' et de X'.

INDICE

Début : $\overrightarrow{RU} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{RS}$. **Pour b) :** utilise la question 3.

5. 1 pts

a) Les points U et X ont-ils le même projeté ? b) En déduire si les droites (UX) et (ST) sont parallèles.

INDICE

Pour a) : quel est le projeté de U ? **Pour b) :** deux points distincts ont le même projeté exactement quand la droite qui les joint est parallèle à la direction.

Exercice 3 — 5 pts

Une droite graduée et un segment partagé en sept

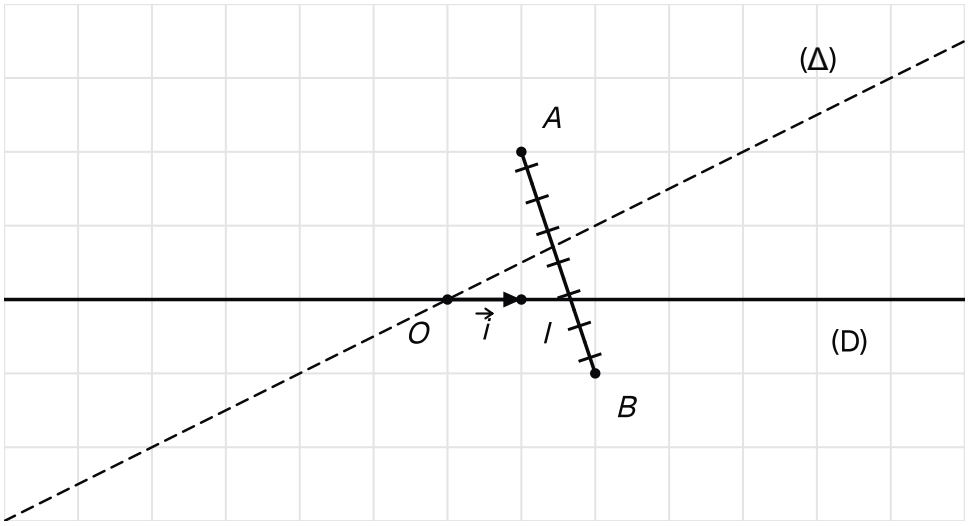
Sur un quadrillage, on gradue la ligne horizontale (D) qui passe par un point O : elle est munie de l'axe $(O, \vec{i})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, où I est un carreau à droite de O.

On projette sur (D) parallèlement à la droite (Δ) qui monte d'un carreau quand elle avance de deux carreaux.

Le point A est à un carreau à droite de O et deux au-dessus. Le point B est à deux carreaux à droite de O et un en dessous. Les points P_1, P_2, ..., P_6 partagent $[AB]$ en sept parts égales : pour tout entier j de 1 à 6,

$$\overrightarrow{AP_j} = \frac{j}{7}\,\overrightarrow{AB}.$$

Fais un schéma sur ton cahier.



La droite (D) graduée par le vecteur i, la direction (Δ) qui monte d'un carreau pour deux, et le segment [AB] découpé en sept parts égales par les points P1 à P6.

1. — 1 pts

a) Construire les projetés A' et B' sur le quadrillage, puis donner leurs abscisses a' et b'. b) Exprimer $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\vec{i}$, puis en déduire que la droite (AB) n'est pas parallèle à (Δ).

INDICE

Pour a) : depuis A, suis la direction de (Δ) vers le bas jusqu'à (D). **Pour b) :** si (AB) était parallèle à (Δ), que diraient les propriétés immédiates du projeté sur A' et B' ?

2. — 1 pts

a) Exprimer l'abscisse p'_j du projeté de P_j en fonction de j. b) Lequel des points P_j se projette en O ?

INDICE

Pour a) : traduis l'égalité de vecteurs par les abscisses des projetés. **Pour b) :** quelle est l'abscisse de O ?

3. 0,75 pts

On note L le milieu de $[P_2P_5]$. a) Donner les abscisses des projetés de P_2 et de P_5. b) En déduire l'abscisse du projeté de L.

INDICE

Pour a) : utilise la question 2. **Pour b) :** la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ».

4. 1,25 pts

La droite (AB) coupe (D) en un point S. a) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{BB'}$, à l'aide du quadrillage. b) Justifier que $A \in (SB)$, $A \neq S$, $A' \in (SB')$ et $(AA') \parallel (BB')$. c) En déduire $\overrightarrow{SA'}$ en fonction de $\overrightarrow{SB'}$ par la forme vectorielle du théorème de Thalès de sommet S.

INDICE

Pour a) : compare les pas faits à la question 1 depuis A et depuis B. **Pour b) :** quelle est la direction des droites (AA') et (BB') ? **Pour c) :** le réel k se lit avec a).

5. 1 pts

On note s l'abscisse de S. a) Traduire l'égalité de la question 4. c) avec les abscisses, puis calculer s. b) En déduire le réel t tel que $\overrightarrow{AS} = t\,\overrightarrow{AB}$.

INDICE

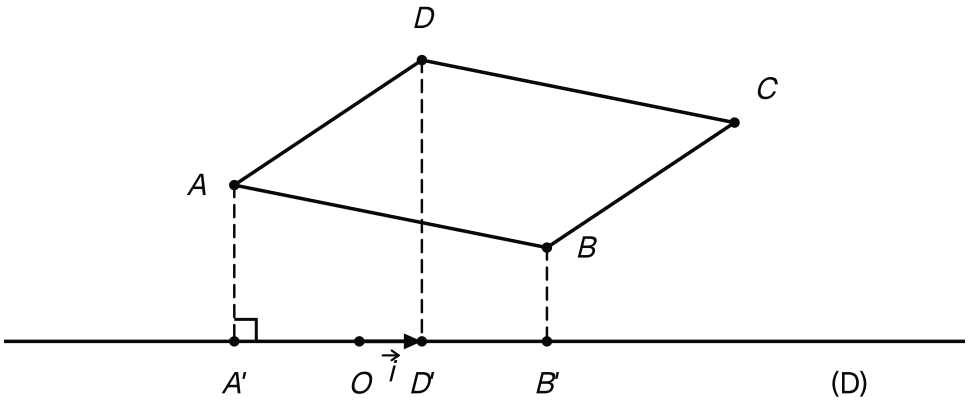
Pour a) : les points S, A' et B' sont sur l'axe. **Pour b) :** S est son propre projeté.

Exercice 4 5 pts

Les projetés orthogonaux des sommets d'un parallélogramme

La droite (D) est munie de l'axe $(O, \vec{i})$. $ABCD$ est un parallélogramme. On projette orthogonalement sur (D), et l'on note X' le projeté orthogonal de chaque point X.

Les projetés A', B' et D' ont pour abscisses $a' = -2$, $b' = 3$ et $d' = 1$. Le point N vérifie $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$. Fais un schéma sur ton cahier.



Un schéma possible : le parallélogramme ABCD au-dessus de l'axe (D), et les projetés orthogonaux A', B' et D' aux abscisses moins deux, trois et un.

1. 1 pts

a) Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. b) En déduire l'abscisse c' de C'.

INDICE

Pour a) : dans un parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **Pour b) :** traduis l'égalité de a) avec les abscisses.

2. 1 pts

On note K le centre du parallélogramme $ABCD$. a) Calculer l'abscisse de K' à l'aide de la diagonale $[AC]$. b) Contrôler ce résultat à l'aide de la diagonale $[BD]$.

INDICE

Outil : les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu K, et la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ».

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{D'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{D'C'}$. b) En déduire l'abscisse n' de N'.

INDICE

Pour a) : la conservation du coefficient de colinéarité. **Pour b) :** $\overrightarrow{D'C'} = 5\,\vec{i}$ d'après la question 1.

4. 1 pts

a) Les points N et B ont-ils le même projeté orthogonal ? Justifier que $N \neq B$. b) En déduire la position de la droite (NB) par rapport à (D).

INDICE

Pour a) : N est sur la droite (DC) ; le point B y est-il ? **Pour b) :** les propriétés immédiates du projeté, avec une direction perpendiculaire à (D).

5. 1 pts

La droite (NB) coupe la diagonale (AC) en un point P, et t est le réel tel que $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$. a) Déterminer le projeté orthogonal P' de P. b) En déduire la valeur de t.

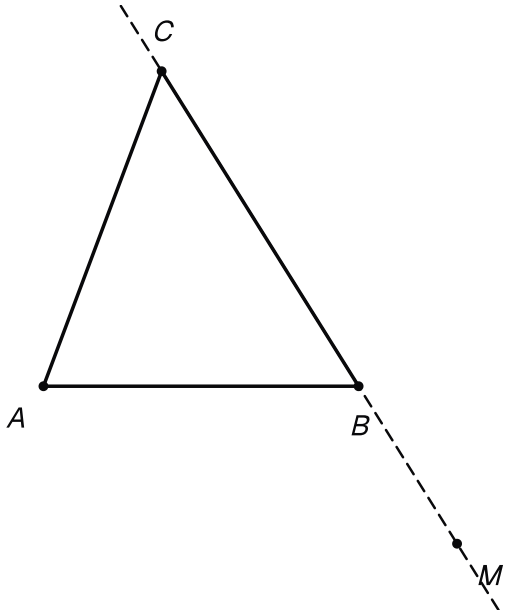
INDICE

Pour a) : quelle est la perpendiculaire à (D) menée par P ? **Pour b) :** traduis $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$ avec les abscisses des projetés.

Exercice 5 — 5 pts

Un même point projeté sur deux côtés selon deux directions

ABC est un triangle. Le point M vérifie $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: il est sur la droite (BC), au-delà de B. On note P le projeté de M sur (AB) parallèlement à (AC), et Q le projeté de M sur (AC) parallèlement à (AB). Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC et le point M de la droite (BC), placé au-delà de B à la moitié de la longueur BC ; ses deux projetés P et Q restent à construire.

1. — 1 pts

On projette sur (AB) parallèlement à (AC). a) Déterminer les projetés de B et de C. b) En déduire $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$, puis $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Pour a) : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** la conservation du coefficient de colinéarité, puis la relation de Chasles.

2. — 0,75 pts

On projette maintenant sur (AC) parallèlement à (AB). a) Déterminer les projetés de B et de C. b) En déduire $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : le même raisonnement qu'à la question 1, avec la nouvelle direction.

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles, en passant par B. b) En déduire $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis la nature du quadrilatère $APMQ$.

INDICE

Pour a) : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. **Pour b) :** $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}$.

4. 1 pts

On revient à la projection sur (AB) parallèlement à (AC). La droite (AB) est munie de l'axe $(A, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, et I est le milieu de $[QM]$. a) Donner les abscisses de B et de P. b) Déterminer le projeté de Q, puis en déduire l'abscisse du projeté de I.

INDICE

Pour a) : utilise la question 1. **Pour b) :** Q est sur (AC) ; le projeté de M est connu.

5. 1,25 pts

Le point R de la droite (BC) vérifie $\overrightarrow{BR} = r\,\overrightarrow{BC}$. Son projeté R' sur (AB) parallèlement à (AC) a pour abscisse -3 sur l'axe de la question 4. a) Calculer r, puis situer R par rapport au segment $[BC]$. b) En déduire le projeté R_2 de R sur (AC) parallèlement à (AB), en exprimant $\overrightarrow{AR_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. c) Exprimer $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles, puis comparer avec $\overrightarrow{AR'} + \overrightarrow{AR_2}$.

INDICE

Pour a) : traduis $\overrightarrow{BR} = r\,\overrightarrow{BC}$ avec les projetés, puis avec les abscisses. **Pour b) :** les projetés de B et de C trouvés à la question 2. **Pour c) :** procède comme à la question 3 a).