BURHAN

La projection dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

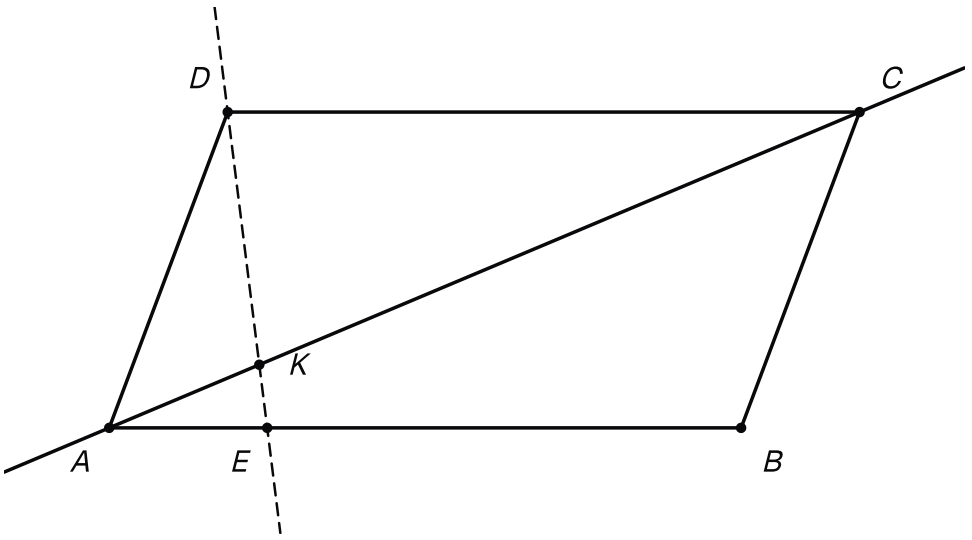
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La projection dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une droite qui coupe la diagonale d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Le point E vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. La droite (DE) coupe la diagonale (AC) en un point K. Fais la figure sur ton cahier.



Le parallélogramme ABCD, le point E au quart de [AB] depuis A, et la droite (DE) qui rencontre la diagonale (AC) au point K.

1. 0,75 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{EA}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$. b) En déduire que $(EA) \parallel (DC)$.

INDICE

Début : dans un parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

a) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} &= -\overrightarrow{AE} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

b) D'après a), les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, et ils sont non nuls. Les droites (EA) et (DC) sont donc parallèles.

Conclusion. $\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, et $(EA) \parallel (DC)$.

2. 1,25 pts

On se place dans le triangle KDC. a) Justifier que $E \in (KD)$, que $A \in (KC)$ et que $E \neq K$. b) À l'aide de la forme vectorielle du théorème de Thalès de sommet K, exprimer $\overrightarrow{KA}$ en fonction de $\overrightarrow{KC}$. c) En déduire $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Pour a) : E est sur (AB) et distinct de A. **Pour b) :** le réel k se lit avec la question 1. **Pour c) :** exprime $\overrightarrow{KC}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$, puis utilise la relation de Chasles.

CORRIGÉ

a) Le point K est sur (DE) et sur (AC). Comme D n'est pas sur (AC), $K \neq D$ et la droite (KD) est (DE) : $E \in (KD)$. Comme C n'est pas sur (DE), qui ne coupe (DC) qu'en D, $K \neq C$ et la droite (KC) est (AC) : $A \in (KC)$.

Les droites (AB) et (AC) n'ont que A en commun. Or E est sur (AB) et $E \neq A$, car $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$: E n'est donc pas sur (AC). Comme K est sur (AC), $E \neq K$.

b) On a $E \in (KD)$, $E \neq K$, $A \in (KC)$, et $(EA) \parallel (DC)$ d'après la question 1. La forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet K, donne un réel k tel que :

$$\overrightarrow{KA} = k\,\overrightarrow{KC},$$
$$\overrightarrow{EA} = k\,\overrightarrow{DC}.$$

D'après la question 1 a), $\overrightarrow{EA} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$. Comme $\overrightarrow{DC} \neq \vec{0}$, $k = -\dfrac{1}{4}$, donc $\overrightarrow{KA} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}$.

c) De b), on tire $\overrightarrow{KC} = -4\,\overrightarrow{KA} = 4\,\overrightarrow{AK}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} \\ &= 5\,\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{KA} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}$, et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

3. 1 pts

On projette sur (AB) parallèlement à (AD), et l'on note X' le projeté de chaque point X. a) Déterminer A' et D'. b) Déterminer C'.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** quelle droite passant par C est parallèle à (AD) ?

CORRIGÉ

a) A est sur (AB) : $A' = A$. La parallèle à (AD) menée par D est (AD), qui coupe (AB) en A : $D' = A$.

b) Dans le parallélogramme, $(BC) \parallel (AD)$. La parallèle à (AD) menée par C est donc (BC), qui coupe (AB) en B : $C' = B$.

Conclusion. $A' = A$, $D' = A$ et $C' = B$.

4. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{AK'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. b) Placer K' sur la figure.

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité, appliquée à l'égalité de la question 2. c).

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Les points A et C se projettent en $A' = A$ et $C' = B$. Par la conservation du coefficient de colinéarité :

$$\overrightarrow{A'K'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{A'C'},$$

soit $\overrightarrow{AK'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Le réel $\dfrac{1}{5}$ est compris entre 0 et 1 : K' est sur le segment $[AB]$, au cinquième de sa longueur à partir de A.

Conclusion. $\overrightarrow{AK'} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, et l'on place K' sur $[AB]$ au cinquième à partir de A.

5. 1 pts

La droite (AB) est munie de l'axe $(A, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{AB} = 10\,\vec{i}$. On note J le milieu de $[EC]$. a) Donner les abscisses de E et de B. b) En déduire l'abscisse de J'.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4} \times 10\,\vec{i}$. **Pour b) :** quels sont les projetés de E et de C ?

CORRIGÉ

a) De $\overrightarrow{AB} = 10\,\vec{i}$, on tire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \frac{1}{4} \times 10\,\vec{i} \\ &= \frac{5}{2}\,\vec{i}.\end{aligned}$$

L'abscisse de E est $\dfrac{5}{2}$; celle de B est 10.

b) J est le milieu de $[EC]$. Le point E est sur (AB), donc $E' = E$; d'après la question 3, $C' = B$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », J' est le milieu de $[EB]$. Son abscisse est la moyenne de celles de E et de B :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + 10\right) = \frac{25}{4}.$$

Conclusion. E et B ont pour abscisses $\dfrac{5}{2}$ et 10, et J' a pour abscisse $\dfrac{25}{4}$.

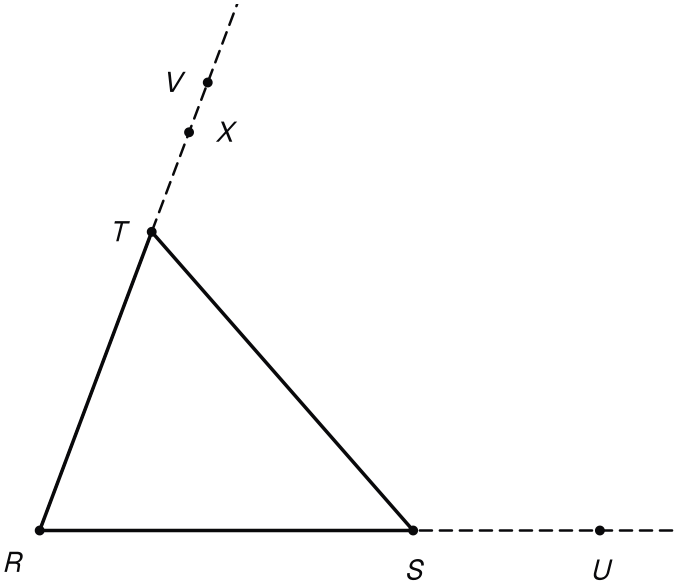
Exercice 2 5 pts

Des points sur les prolongements des côtés d'un triangle

RST est un triangle. On place les points U, V et X tels que :

$$\overrightarrow{RU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS},$$
$$\overrightarrow{RV} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{RX} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RT}.$$

Les points U, V et X sont sur les prolongements des côtés, au-delà de S ou de T. Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle RST et les trois points placés sur les prolongements des côtés issus de R : U au-delà de S, puis X et V au-delà de T.

1. 1 pts

a) Comparer les réels des deux égalités issues de R qui définissent U et V. b) En déduire $\overrightarrow{UV}$ en fonction de $\overrightarrow{ST}$, et la position des droites (UV) et (ST).

INDICE

Outil : la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès, de sommet R.

CORRIGÉ

a) Les points U et V sont définis à partir de R par $\overrightarrow{RU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RV} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RT}$: les deux égalités portent le même réel non nul $\frac{3}{2}$.

b) Par la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès, de sommet R :

$$\overrightarrow{UV} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ST}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires : les droites (UV) et (ST) sont parallèles.

Conclusion. Les deux réels sont égaux, $\overrightarrow{UV} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ST}$, et $(UV) \parallel (ST)$.

2. 1 pts

On projette sur (RS) parallèlement à (ST) ; Y' désigne le projeté de chaque point Y. a) Déterminer R' et T'. b) Déterminer V'.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** utilise la question 1.

CORRIGÉ

a) R est sur (RS) : $R' = R$. La parallèle à (ST) menée par T est (ST), qui coupe (RS) en S : $T' = S$.

b) D'après la question 1, $(UV) \parallel (ST)$: la parallèle à (ST) menée par V est (UV). Elle coupe (RS) en U, donc $V' = U$.

Conclusion. $R' = R$, $T' = S$ et $V' = U$.

3. 1 pts

On note J le milieu de $[TV]$. a) Situer J' sur (RS). b) Exprimer $\overrightarrow{RX'}$ en fonction de $\overrightarrow{RS}$.

INDICE

Pour a) : la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ». **Pour b) :** la conservation du coefficient de colinéarité.

CORRIGÉ

a) J est le milieu de $[TV]$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », J' est le milieu de $[T'V'] = [SU]$.

b) Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{RX} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RT}$ devient :

$$\overrightarrow{R'X'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{R'T'}.$$

Avec $R' = R$ et $T' = S$, on obtient $\overrightarrow{RX'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RS}$.

Conclusion. J' est le milieu de $[SU]$, et $\overrightarrow{RX'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RS}$.

4. 1 pts

La droite (RS) est munie de l'axe $(R, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{RS} = 6\,\vec{i}$. a) Donner les abscisses de S et de U. b) En déduire les abscisses de J' et de X'.

INDICE

Début : $\overrightarrow{RU} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}$. **Pour b) :** utilise la question 3.

CORRIGÉ

a) De $\overrightarrow{RS} = 6\,\vec{i}$, le point S a pour abscisse 6. Ensuite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RU} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}\\ &= \frac{3}{2}\times 6\,\vec{i}\\ &= 9\,\vec{i},\end{aligned}$$

donc U a pour abscisse 9.

b) D'après la question 3, J' est le milieu de $[SU]$: son abscisse est $\frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}$.

Toujours d'après la question 3, $\overrightarrow{RX'} = \frac{4}{3}\times 6\,\vec{i} = 8\,\vec{i}$: X' a pour abscisse 8.

Conclusion. S et U ont pour abscisses 6 et 9 ; J' et X' ont pour abscisses $\frac{15}{2}$ et 8.

5. 1 pts

a) Les points U et X ont-ils le même projeté ? b) En déduire si les droites (UX) et (ST) sont parallèles.

INDICE

Pour a) : quel est le projeté de U ? **Pour b) :** deux points distincts ont le même projeté exactement quand la droite qui les joint est parallèle à la direction.

CORRIGÉ

a) U est sur (RS), donc $U' = U$, d'abscisse 9. Le projeté X' a pour abscisse 8. Comme $8 \neq 9$, $X' \neq U'$: U et X n'ont pas le même projeté, et en particulier $X \neq U$.

b) Les points distincts U et X n'ont pas le même projeté. D'après les propriétés immédiates du projeté, la droite (UX) n'est pas parallèle à la direction : (UX) et (ST) ne sont pas parallèles.

Conclusion. U et X n'ont pas le même projeté, donc les droites (UX) et (ST) ne sont pas parallèles.

Exercice 3 5 pts

Une droite graduée et un segment partagé en sept

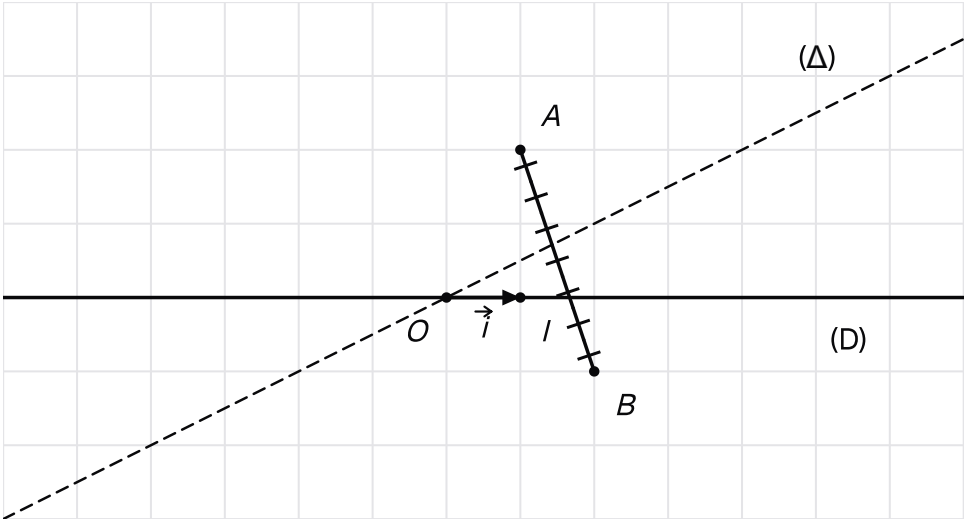
Sur un quadrillage, on gradue la ligne horizontale (D) qui passe par un point O : elle est munie de l'axe $(O, \vec{i})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, où I est un carreau à droite de O.

On projette sur (D) parallèlement à la droite (Δ) qui monte d'un carreau quand elle avance de deux carreaux.

Le point A est à un carreau à droite de O et deux au-dessus. Le point B est à deux carreaux à droite de O et un en dessous. Les points P_1, P_2, …, P_6 partagent $[AB]$ en sept parts égales : pour tout entier j de 1 à 6,

$$\overrightarrow{AP_j} = \frac{j}{7}\,\overrightarrow{AB}.$$

Fais un schéma sur ton cahier.



La droite (D) graduée par le vecteur i, la direction (Δ) qui monte d'un carreau pour deux, et le segment [AB] découpé en sept parts égales par les points P1 à P6.

1. 1 pts

a) Construire les projetés A' et B' sur le quadrillage, puis donner leurs abscisses a' et b'. b) Exprimer $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\vec{i}$, puis en déduire que la droite (AB) n'est pas parallèle à (Δ).

INDICE

Pour a) : depuis A, suis la direction de (Δ) vers le bas jusqu'à (D). **Pour b) :** si (AB) était parallèle à (Δ), que diraient les propriétés immédiates du projeté sur A' et B' ?

CORRIGÉ

a) On mène par A la parallèle à (Δ). Depuis A, deux pas « un carreau vers le bas, deux vers la gauche » mènent sur (D), trois carreaux à gauche de O : $a' = -3$.

Depuis B, un pas « un carreau vers le haut, deux vers la droite » mène sur (D), quatre carreaux à droite de O : $b' = 4$.

b) D'après les abscisses et la projection sur un axe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= \big(4-(-3)\big)\,\vec{i}\\ &= 7\,\vec{i}.\end{aligned}$$

Ce vecteur n'est pas nul, donc $A' \neq B'$. Si (AB) était parallèle à (Δ), les points distincts A et B auraient le même projeté, d'après les propriétés immédiates du projeté. Donc (AB) n'est pas parallèle à (Δ).

Conclusion. $a' = -3$, $b' = 4$, $\overrightarrow{A'B'} = 7\,\vec{i}$, et la droite (AB) n'est pas parallèle à (Δ).

2. 1 pts

a) Exprimer l'abscisse p'_j du projeté de P_j en fonction de j. b) Lequel des points P_j se projette en O ?

INDICE

Pour a) : traduis l'égalité de vecteurs par les abscisses des projetés. **Pour b) :** quelle est l'abscisse de O ?

CORRIGÉ

a) D'après les abscisses et la projection sur un axe, la relation $\overrightarrow{AP_j} = \dfrac{j}{7}\,\overrightarrow{AB}$ donne $p'_j - a' = \dfrac{j}{7}\,(b' - a')$:

$$\begin{aligned}p'_j - (-3) &= \frac{j}{7} \times 7\\ &= j.\end{aligned}$$

Donc $p'_j = j - 3$.

b) Le projeté de P_j est O lorsque son abscisse est nulle, c'est-à-dire $j - 3 = 0$, soit $j = 3$: c'est P_3. Les projetés de P_1, …, P_6 sont espacés d'un carreau.

Conclusion. $p'_j = j - 3$, et le point P_3 se projette en O.

3. 0,75 pts

On note L le milieu de $[P_2P_5]$. a) Donner les abscisses des projetés de P_2 et de P_5. b) En déduire l'abscisse du projeté de L.

INDICE

Pour a) : utilise la question 2. **Pour b) :** la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ».

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, les projetés de P_2 et de P_5 ont pour abscisses $2-3=-1$ et $5-3=2$.

b) L est le milieu de $[P_2P_5]$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », son projeté est le milieu du segment formé par les projetés de P_2 et de P_5. Son abscisse vaut $\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les projetés de P_2 et P_5 ont pour abscisses -1 et 2, et celui de L a pour abscisse $\dfrac{1}{2}$.

4. 1,25 pts

La droite (AB) coupe (D) en un point S. a) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{BB'}$, à l'aide du quadrillage. b) Justifier que $A\in(SB)$, $A\neq S$, $A'\in(SB')$ et $(AA')\parallel(BB')$. c) En déduire $\overrightarrow{SA'}$ en fonction de $\overrightarrow{SB'}$ par la forme vectorielle du théorème de Thalès de sommet S.

INDICE

Pour a) : compare les pas faits à la question 1 depuis A et depuis B. **Pour b) :** quelle est la direction des droites (AA') et (BB') ? **Pour c) :** le réel k se lit avec a).

CORRIGÉ

a) De A à A', on fait deux pas « un carreau vers le bas, deux vers la gauche ». De B à B', on fait un pas « un carreau vers le haut, deux vers la droite », dans le sens contraire. Donc $\overrightarrow{AA'}=-2\,\overrightarrow{BB'}$.

b) On vérifie les quatre conditions.

- S et B sont deux points distincts de (AB), car B n'est pas sur (D) : la droite (SB) est (AB), qui contient A.
- $A\neq S$, car A n'est pas sur (D).
- $S\neq B'$: sinon (AB) serait la droite (BB'), parallèle à (Δ), ce que la question 1 exclut. Donc (SB') est la droite (D), qui contient A'.
- A et B ne sont pas sur (D), donc $A\neq A'$ et $B\neq B'$; les droites (AA') et (BB') sont parallèles à (Δ), donc parallèles entre elles.

c) Comme B n'est pas sur (D) et $S\neq B'$, SBB' est un triangle. La forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet S, donne un réel k tel que :

$$\overrightarrow{SA'}=k\,\overrightarrow{SB'},$$
$$\overrightarrow{AA'}=k\,\overrightarrow{BB'}.$$

Avec a) et $\overrightarrow{BB'}\neq\vec{0}$, $k=-2$: $\overrightarrow{SA'}=-2\,\overrightarrow{SB'}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AA'}=-2\,\overrightarrow{BB'}$, les hypothèses du théorème sont réunies, et $\overrightarrow{SA'}=-2\,\overrightarrow{SB'}$.

5. 1 pts

On note s l'abscisse de S. a) Traduire l'égalité de la question 4. c) avec les abscisses, puis calculer s. b) En déduire le réel t tel que $\overrightarrow{AS} = t\,\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Pour a) : les points S, A' et B' sont sur l'axe. **Pour b) :** S est son propre projeté.

CORRIGÉ

a) D'après les abscisses et la projection sur un axe, $\overrightarrow{SA'} = (-3 - s)\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{SB'} = (4 - s)\,\vec{i}$. Comme $\vec{i} \neq \vec{0}$, l'égalité $\overrightarrow{SA'} = -2\,\overrightarrow{SB'}$ donne :

$$-3 - s = -2\,(4 - s),$$

soit $-3 - s = -8 + 2s$. Donc $3s = 5$ et $s = \dfrac{5}{3}$.

b) S est sur (D) : c'est son propre projeté, d'abscisse $\dfrac{5}{3}$. D'après les abscisses et la projection sur un axe, $\overrightarrow{AS} = t\,\overrightarrow{AB}$ donne :

$$\frac{5}{3} - (-3) = 7t,$$

soit $\dfrac{14}{3} = 7t$. Donc $t = \dfrac{2}{3}$.

Conclusion. $s = \dfrac{5}{3}$, et $\overrightarrow{AS} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$.

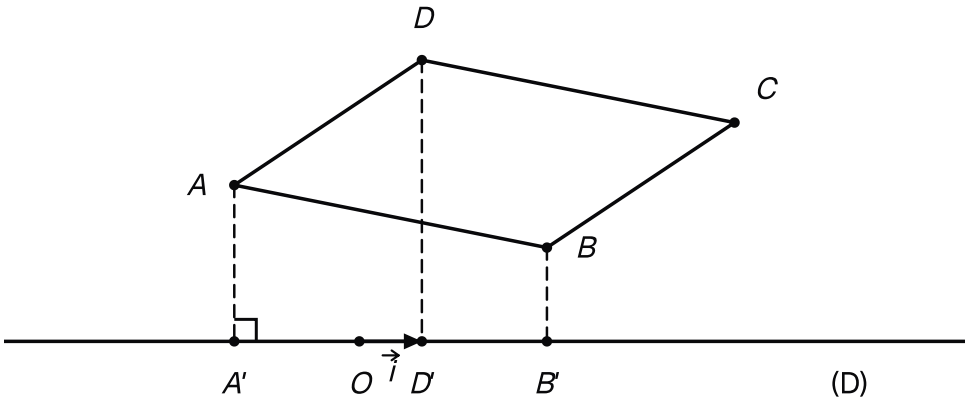
Exercice 4 5 pts

Les projetés orthogonaux des sommets d'un parallélogramme

La droite (D) est munie de l'axe $(O, \vec{i})$. $ABCD$ est un parallélogramme. On projette orthogonalement sur (D), et l'on note X' le projeté orthogonal de chaque point X.

Les projetés A', B' et D' ont pour abscisses $a' = -2$, $b' = 3$ et $d' = 1$. Le point N vérifie $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$.

Fais un schéma sur ton cahier.



Un schéma possible : le parallélogramme ABCD au-dessus de l'axe (D), et les projetés orthogonaux A', B' et D' aux abscisses moins deux, trois et un.

1. 1 pts

a) Justifier que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$. b) En déduire l'abscisse c' de C'.

INDICE

Pour a) : dans un parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **Pour b) :** traduis l'égalité de a) avec les abscisses.

CORRIGÉ

a) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$.

b) D'après les abscisses et la projection sur un axe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= \big(3 - (-2)\big)\,\vec{i} \\ &= 5\,\vec{i},\end{aligned}$$

et $\overrightarrow{D'C'} = (c' - 1)\,\vec{i}$. Comme $\vec{i} \neq \vec{0}$, l'égalité de a) donne $c' - 1 = 5$, donc $c' = 6$.

Conclusion. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$, et l'abscisse de C' est $c' = 6$.

2. 1 pts

On note K le centre du parallélogramme $ABCD$. a) Calculer l'abscisse de K' à l'aide de la diagonale $[AC]$. b) Contrôler ce résultat à l'aide de la diagonale $[BD]$.

INDICE

Outil : les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu K, et la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ».

CORRIGÉ

a) K est le milieu de $[AC]$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », K' est le milieu de $[A'C']$. Son abscisse vaut $\dfrac{-2+6}{2} = 2$.

b) K est aussi le milieu de $[BD]$, donc K' est le milieu de $[B'D']$. Son abscisse vaut $\dfrac{3+1}{2} = 2$: les deux calculs donnent la même valeur.

Conclusion. L'abscisse de K' est 2, par l'une comme par l'autre diagonale.

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{D'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{D'C'}$. b) En déduire l'abscisse n' de N'.

INDICE

Pour a) : la conservation du coefficient de colinéarité. **Pour b) :** $\overrightarrow{D'C'} = 5\,\vec{i}$ d'après la question 1.

CORRIGÉ

a) Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{DN} = \dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{DC}$ devient :

$$\overrightarrow{D'N'} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{D'C'}.$$

b) D'après la question 1, $\overrightarrow{D'C'} = 5\,\vec{i}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D'N'} &= \frac{2}{5} \times 5\,\vec{i} \\ &= 2\,\vec{i}.\end{aligned}$$

D'après les abscisses et la projection sur un axe, $n' - 1 = 2$, donc $n' = 3$.

Conclusion. $\overrightarrow{D'N'} = \dfrac{2}{5}\,\overrightarrow{D'C'}$, et l'abscisse de N' est $n' = 3$.

4. 1 pts

a) Les points N et B ont-ils le même projeté orthogonal ? Justifier que $N \neq B$. b) En déduire la position de la droite (NB) par rapport à (D).

INDICE

Pour a) : N est sur la droite (DC) ; le point B y est-il ? **Pour b) :** les propriétés immédiates du projeté, avec une direction perpendiculaire à (D).

CORRIGÉ

a) N' et B' ont la même abscisse 3 : $N' = B'$. Le point N est sur la droite (DC). Dans le parallélogramme, les droites (DC) et (AB) sont parallèles et distinctes ; B est sur (AB), donc B n'est pas sur (DC), et $N \neq B$.

b) Les points distincts N et B ont le même projeté. D'après les propriétés immédiates du projeté, la droite (NB) est parallèle à la direction de projection, qui est perpendiculaire à (D) : $(NB) \perp (D)$.

Conclusion. N et B ont le même projeté orthogonal, et la droite (NB) est perpendiculaire à (D).

5. 1 pts

La droite (NB) coupe la diagonale (AC) en un point P, et t est le réel tel que $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$. a) Déterminer le projeté orthogonal P' de P. b) En déduire la valeur de t.

INDICE

Pour a) : quelle est la perpendiculaire à (D) menée par P ? **Pour b) :** traduis $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$ avec les abscisses des projetés.

CORRIGÉ

a) P est sur (NB), perpendiculaire à (D) d'après la question 4. La perpendiculaire à (D) menée par P est donc (NB), qui coupe (D) en B' : $P' = B'$, d'abscisse 3.

b) Par la conservation du coefficient de colinéarité, $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AC}$ devient $\overrightarrow{A'P'} = t\,\overrightarrow{A'C'}$. D'après les abscisses et la projection sur un axe :

$$3 - (-2) = t\,\big(6 - (-2)\big),$$

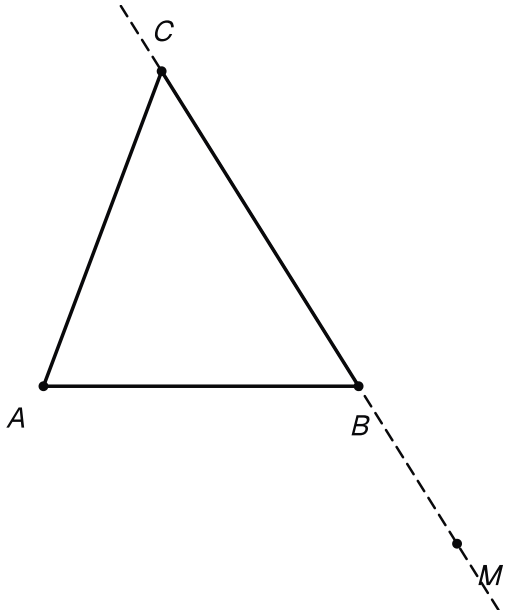
soit $5 = 8t$. Donc $t = \dfrac{5}{8}$.

Conclusion. $P' = B'$, et $t = \dfrac{5}{8}$.

Exercice 5 — 5 pts

Un même point projeté sur deux côtés selon deux directions

ABC est un triangle. Le point M vérifie $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: il est sur la droite (BC), au-delà de B. On note P le projeté de M sur (AB) parallèlement à (AC), et Q le projeté de M sur (AC) parallèlement à (AB). Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC et le point M de la droite (BC), placé au-delà de B à la moitié de la longueur BC ; ses deux projetés P et Q restent à construire.

1. — 1 pts

On projette sur (AB) parallèlement à (AC). a) Déterminer les projetés de B et de C. b) En déduire $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$, puis $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Pour a) : les propriétés immédiates du projeté. **Pour b) :** la conservation du coefficient de colinéarité, puis la relation de Chasles.

CORRIGÉ

a) B est sur (AB) : il est son propre projeté. La parallèle à (AC) menée par C est (AC), qui coupe (AB) en A : le projeté de C est A.

b) Le projeté de M est P. Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ devient $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, soit $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. B se projette en B et C en A ; $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. 0,75 pts

On projette maintenant sur (AC) parallèlement à (AB). a) Déterminer les projetés de B et de C. b) En déduire $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : le même raisonnement qu'à la question 1, avec la nouvelle direction.

CORRIGÉ

a) La parallèle à (AB) menée par B est (AB), qui coupe (AC) en A : le projeté de B est A. C est sur (AC) : il est son propre projeté.

b) Le projeté de M est Q. Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ devient :

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Conclusion. B se projette en A et C en C ; $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, donc Q est sur la droite (AC), au-delà de A.

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles, en passant par B. b) En déduire $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis la nature du quadrilatère $APMQ$.

INDICE

Pour a) : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, avec $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. **Pour b) :** $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}$.

CORRIGÉ

a) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

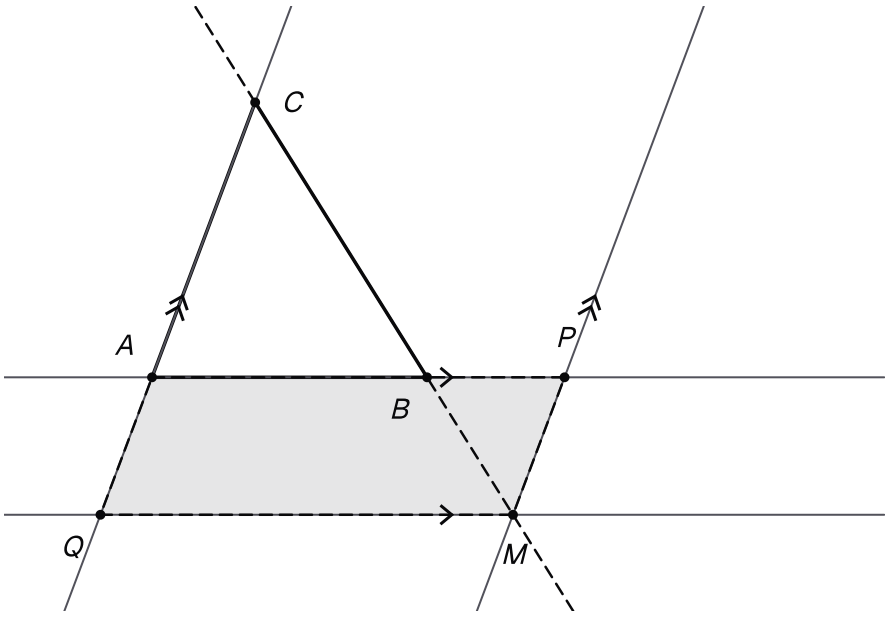
D'après les questions 1 et 2, $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}$ et $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$: ainsi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.

b) Par la relation de Chasles et la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\quad - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

D'après la question 2, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AQ}$. L'égalité $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AQ}$ signifie que $APMQ$ est un parallélogramme.

Conclusion. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et $APMQ$ est un parallélogramme.



La parallèle à (AC) menée par M coupe (AB) en P, la parallèle à (AB) menée par M coupe (AC) en Q au-delà de A : APMQ est un parallélogramme.

4. 1 pts

On revient à la projection sur (AB) parallèlement à (AC). La droite (AB) est munie de l'axe $(A, \vec{i})$, avec $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, et I est le milieu de $[QM]$. a) Donner les abscisses de B et de P. b) Déterminer le projeté de Q, puis en déduire l'abscisse du projeté de I.

INDICE

Pour a) : utilise la question 1. **Pour b) :** Q est sur (AC) ; le projeté de M est connu.

CORRIGÉ

a) De $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, le point B a pour abscisse 2. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{3}{2} \times 2\vec{i} \\ &= 3\vec{i}.\end{aligned}$$

D'après les abscisses et la projection sur un axe, P a pour abscisse 3.

b) Q est sur (AC) : la parallèle à (AC) menée par Q est (AC), qui coupe (AB) en A ; le projeté de Q est A.

I est le milieu de $[QM]$, et les projetés de Q et de M sont A et P. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », le projeté de I est le milieu de $[AP]$. Son abscisse vaut $\dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Conclusion. B et P ont pour abscisses 2 et 3 ; Q se projette en A, et le projeté de I a pour abscisse $\dfrac{3}{2}$.

5. 1,25 pts

Le point R de la droite (BC) vérifie $\overrightarrow{BR} = r\,\overrightarrow{BC}$. Son projeté R' sur (AB) parallèlement à (AC) a pour abscisse -3 sur l'axe de la question 4. a) Calculer r, puis situer R par rapport au segment $[BC]$. b) En déduire le projeté R_2 de R sur (AC) parallèlement à (AB), en exprimant $\overrightarrow{AR_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. c) Exprimer $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles, puis comparer avec $\overrightarrow{AR'} + \overrightarrow{AR_2}$.

INDICE

Pour a) : traduis $\overrightarrow{BR} = r\,\overrightarrow{BC}$ avec les projetés, puis avec les abscisses. **Pour b) :** les projetés de B et de C trouvés à la question 2. **Pour c) :** procède comme à la question 3 a).

CORRIGÉ

a) Les projetés de B et de C sur (AB) sont B et A. Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BR} = r\,\overrightarrow{BC}$ devient $\overrightarrow{BR'} = r\,\overrightarrow{BA}$. D'après les abscisses et la projection sur un axe :

$$-3 - 2 = r\,(0 - 2),$$

soit $-5 = -2r$. Donc $r = \dfrac{5}{2}$.

Ainsi $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{BC}$: R est sur le prolongement de $[BC]$, au-delà de C.

b) D'après la question 2, sur (AC) parallèlement à (AB), le projeté de B est A et celui de C est C. Par la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BR} = \dfrac{5}{2}\,\overrightarrow{BC}$ devient :

$$\overrightarrow{AR_2} = \frac{5}{2}\,\overrightarrow{AC}.$$

c) Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

D'après les abscisses et la projection sur un axe, $\overrightarrow{AR'} = -3\,\vec{i} = -\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$. Avec b), $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AR'} + \overrightarrow{AR_2}$, comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ à la question 3.

Conclusion. $r = \dfrac{5}{2}$ et R est au-delà de C ; $\overrightarrow{AR_2} = \dfrac{5}{2}\,\overrightarrow{AC}$; enfin $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AR'} + \overrightarrow{AR_2}$.