BURHAN

La projection dans le plan : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La projection dans le plan	Entraînement	6

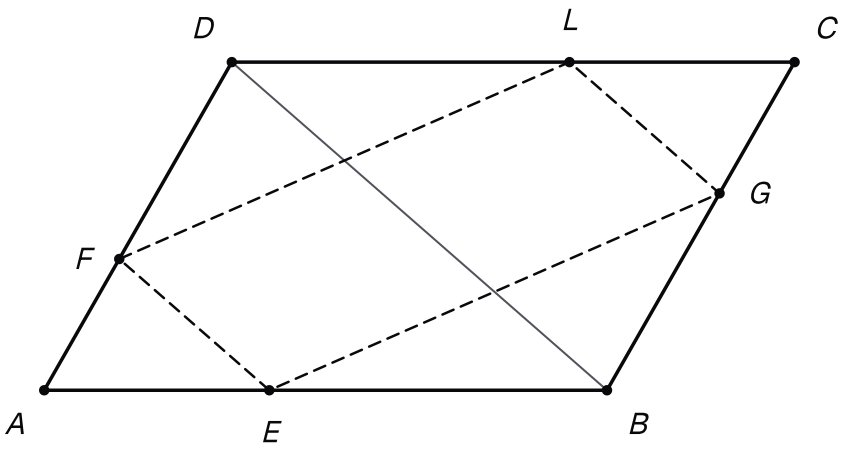
Exercice 1

Un parallélogramme dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. On place les points E, F, G et L tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}.$$

Fais la figure sur ton cahier.



Dans le parallélogramme ABCD, les points E, F, G et L placés aux deux cinquièmes des côtés depuis A et depuis C, et le quadrilatère EFLG qu'ils forment.

1.

Dans le triangle ABD, exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$. Que peut-on dire des droites (EF) et (BD) ?

INDICE

Outil : la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès. **Début :** quel est le sommet, et le même réel apparaît-il deux fois ?

CORRIGÉ

Sommet A. Dans le triangle ABD, le point E est sur (AB) et F sur (AD). Les égalités $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ portent le même réel non nul.

Thalès, sens réciproque. D'après la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès, de sommet A :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$, donc les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

2.

Dans le triangle CBD, exprimer de même $\overrightarrow{GL}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$.

INDICE

Outil : le même théorème, avec cette fois le sommet C. Respecte l'ordre des lettres : de G vers L comme de B vers D.

CORRIGÉ

Sommet C. Dans le triangle CBD, le point G est sur (CB) et L sur (CD). Les égalités $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$ portent le même réel non nul.

Thalès, sens réciproque. Le même théorème, de sommet C, donne :

$$\overrightarrow{GL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{GL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$.

3.

En déduire la nature du quadrilatère $EFLG$.

INDICE

Rappel : un quadrilatère $EFLG$ est un parallélogramme lorsque $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GL}$.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{GL}.\end{aligned}$$

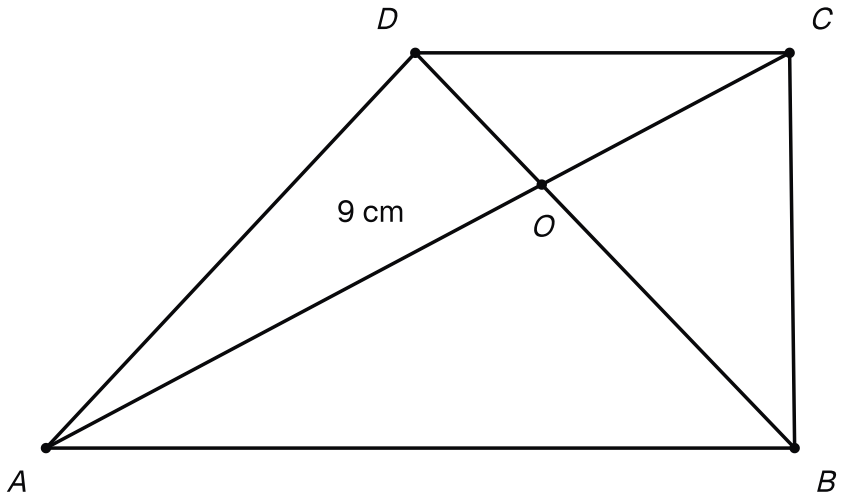
L'égalité $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GL}$ signifie que $EFLG$ est un parallélogramme.

Conclusion. Le quadrilatère $EFLG$ est un parallélogramme.

Exercice 2

Les diagonales d'un trapèze

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, avec $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. On donne $AC = 9$ cm. Fais la figure sur ton cahier.



Le trapèze ABCD, dont la petite base [DC] mesure la moitié de [AB], avec ses diagonales sécantes en O et la diagonale [AC] de 9 cm.

1.

Justifier que la figure formée par O, A, B, C, D est une configuration de Thalès de sommet O, puis exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Début : sur quelles droites issues de O se trouvent C et D ? **Ensuite :** $\overrightarrow{CD}$ est l'opposé de $\overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

Triangle OAB. Les points O, A, B ne sont pas alignés. Sinon O, qui est sur (AC), serait aussi sur (AB) ; ces deux droites n'ayant que A en commun, on aurait $O = A$, et A serait sur (BD). C'est impossible : trois sommets du trapèze ne sont jamais alignés.

Configuration. C appartient à (OA) et D à (OB). De plus $C \neq O$, car O est sur (BD) et C n'y est pas, puisque B, C, D ne sont pas alignés. Les bases d'un trapèze sont parallèles : $(CD) \parallel (AB)$.

Vecteur. D'après l'énoncé, $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{DC} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. La figure est une configuration de Thalès de sommet O, et $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2.

En déduire le réel k de cette configuration, puis exprimer $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$.

INDICE

Outil : la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens direct) donne $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec le même k que pour les deux autres égalités.

CORRIGÉ

Thalès, sens direct. Appliquons en O la forme vectorielle du théorème de Thalès : on obtient un réel k vérifiant

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= k\,\overrightarrow{OA},\\ \overrightarrow{OD} &= k\,\overrightarrow{OB},\\ \overrightarrow{CD} &= k\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Valeur de k. La question 1 donne $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, on obtient $k = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Le réel est $k = -\dfrac{1}{2}$, et $\overrightarrow{OC} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$.

3.

Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis calculer AO et OC.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, et l'égalité $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AO}$.

CORRIGÉ

Vecteur. D'après la question 2, $\overrightarrow{OC} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AO}$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\\ &= \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AO}\\ &= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AO}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AO} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

Longueurs. Le réel $\dfrac{2}{3}$ est compris entre 0 et 1 : O est sur le segment $[AC]$. Ainsi $AO = \dfrac{2}{3} \times 9 = 6$ cm et $OC = 9 - 6 = 3$ cm.

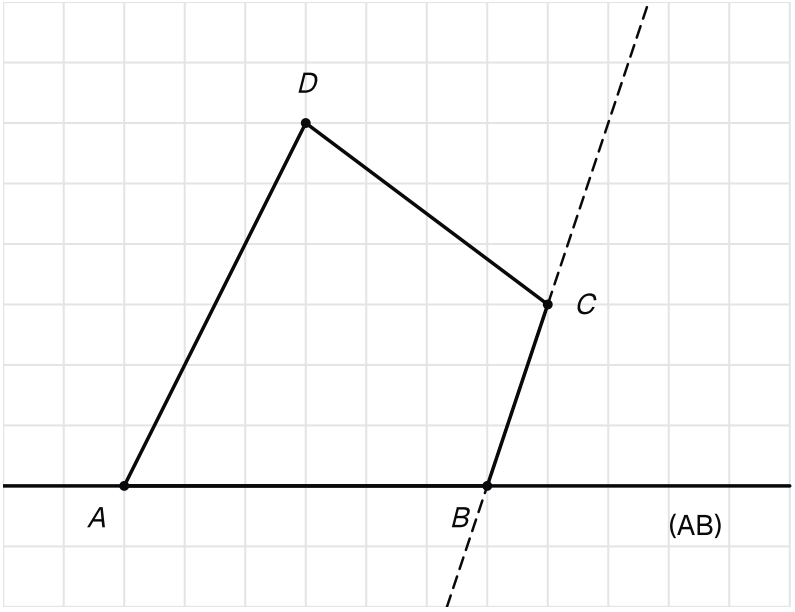
Conclusion. $\overrightarrow{AO} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$, $AO = 6$ cm et $OC = 3$ cm.

Exercice 3

Projeter un quadrilatère quelconque

Sur un quadrillage, on place un point A. Le point B est à six carreaux à droite de A. Le point C est à sept carreaux à droite de A et trois au-dessus. Le point D est à trois carreaux à droite de A et six au-dessus.

On projette sur (AB) parallèlement à (BC), et l'on note X' le projeté de chaque point X.



Le quadrilatère ABCD sur le quadrillage, la droite (AB) sur laquelle on projette et la droite (BC) qui fixe la direction.

1.

Déterminer B' et C', puis construire D' sur le quadrillage.

INDICE

Début : la direction (BC) monte de trois carreaux quand elle avance d'un carreau. **Ensuite :** depuis D, descends le long de cette direction jusqu'à (AB).

CORRIGÉ

Les points B et C. B est sur (AB) : $B' = B$. La parallèle à (BC) menée par C est (BC), qui coupe (AB) en B : $C' = B$.

Le point D. Le point D est six carreaux au-dessus de (AB). Depuis D, deux pas « trois carreaux vers le bas, un carreau vers la gauche » mènent sur (AB), en reculant de deux carreaux. Donc D' est à un carreau à droite de A.

Conclusion. $B' = B$, $C' = B$, et D' est sur (AB) à $3 - 2 = 1$ carreau à droite de A.

2.

Le point M vérifie $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$. Situer son projeté M' sur (AB).

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité, appliquée aux points D, M, D, C.

CORRIGÉ

Conservation. Les points D, M et C se projettent en D', M' et $C' = B$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$ devient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D'M'} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{D'C'} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{D'B}.\end{aligned}$$

Position. B est à cinq carreaux à droite de D', donc M' est à $\frac{2}{5} \times 5 = 2$ carreaux à droite de D'.

Conclusion. Le projeté M' est sur (AB), à trois carreaux à droite de A.

3.

On note N le milieu de $[AC]$. Situer N', puis en déduire que $(MN) \parallel (BC)$.

INDICE

Outil : la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection ». **Ensuite :** deux points distincts de même projeté.

CORRIGÉ

Projeté de N. N est le milieu de $[AC]$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », N' est le milieu de $[A'C'] = [AB]$: N' est à trois carreaux à droite de A. Ainsi $N' = M'$.

Points distincts. Si M et N étaient confondus, ce point serait sur (DC) et sur (AC), donc égal à C, ce qui contredit $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{DC}$. Donc $M \neq N$.

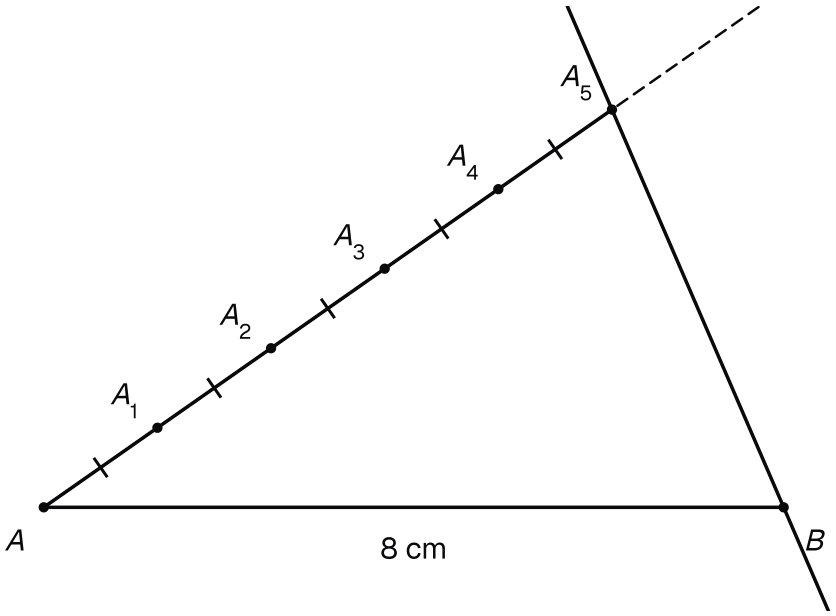
Parallélisme. Les points distincts M et N ont le même projeté. D'après les propriétés immédiates du projeté, la droite (MN) est parallèle à la direction (BC).

Conclusion. N' est à trois carreaux à droite de A, confondu avec M', et $(MN) \parallel (BC)$.

Exercice 4

Partager un segment de 8 cm en cinq parts égales

Le segment $[AB]$ mesure 8 cm. On trace une demi-droite d'origine A, non portée par (AB), et l'on y place, à partir de A, cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 espacés de $1{,}5$ cm. On projette sur (AB) parallèlement à (A_5B) : A_j se projette en B_j.



Le segment [AB] de 8 cm, la demi-droite issue de A graduée par cinq points régulièrement espacés et la droite (A5B) qui donne la direction.

1.

Quels sont les projetés de A et de A_5 ? Exprimer $\overrightarrow{AA_j}$ en fonction de $\overrightarrow{AA_5}$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté ; puis la régularité des graduations sur la demi-droite.

CORRIGÉ

Projetés. A est sur (AB) : c'est son propre projeté. La parallèle à (A_5B) menée par A_5 est (A_5B), qui coupe (AB) en B : A_5 se projette en B.

Graduations. Les points A_1, …, A_5 sont sur la même demi-droite d'origine A, et A_j est à $1{,}5\,j$ cm de A. Comme $AA_5 = 7{,}5$ cm et $\dfrac{1{,}5\,j}{7{,}5} = \dfrac{j}{5}$, on a, pour $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\overrightarrow{AA_j} = \frac{j}{5}\,\overrightarrow{AA_5}.$$

Conclusion. A se projette en A et A_5 en B ; pour $j = 1, 2, 3, 4$, $\overrightarrow{AA_j} = \dfrac{j}{5}\,\overrightarrow{AA_5}$.

2.

En déduire $\overrightarrow{AB_j}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis calculer AB_2.

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité.

CORRIGÉ

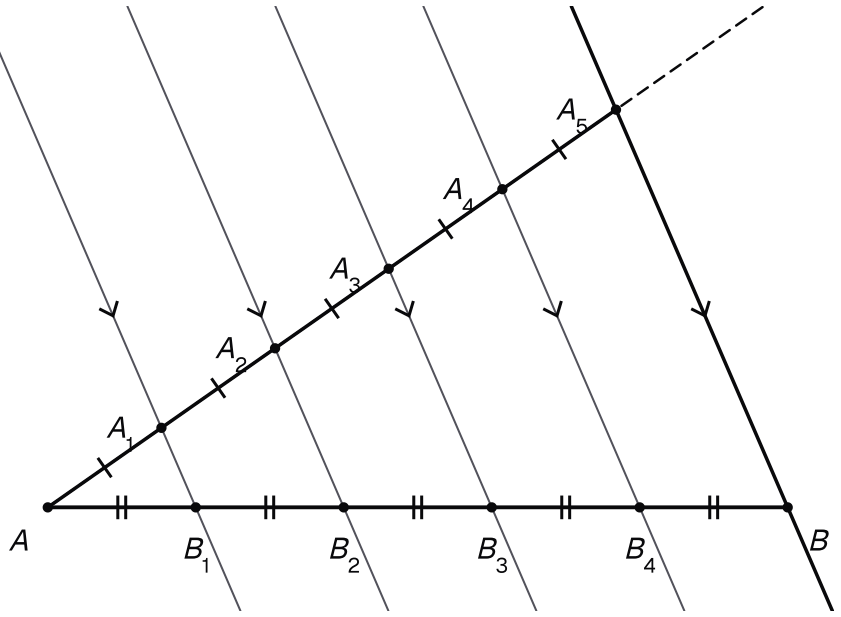
Conservation. Les points A et A_5 se projettent en A et B, et A_j en B_j. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité de la question 1 devient :

$$\overrightarrow{AB_j} = \frac{j}{5}\,\overrightarrow{AB}.$$

Les points B_1, …, B_4 partagent donc $[AB]$ en cinq parts égales.

Longueur. $AB_2 = \dfrac{2}{5} \times 8 = 3{,}2$ cm.

Conclusion. Pour $j = 1, 2, 3, 4$, $\overrightarrow{AB_j} = \dfrac{j}{5}\,\overrightarrow{AB}$, et $AB_2 = 3{,}2$ cm.



Les parallèles à (A5B) menées par A1, A2, A3 et A4 coupent [AB] en B1, B2, B3 et B4, qui découpent le segment en cinq morceaux de même longueur.

3.

Exprimer $\overrightarrow{B_1B_4}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis calculer B_1B_4.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, $\overrightarrow{B_1B_4} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_4}$.

CORRIGÉ

Vecteur. Par la relation de Chasles et la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1B_4} &= \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB_4} \\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Longueur. $B_1B_4 = \dfrac{3}{5} \times 8 = 4{,}8$ cm.

Remarque. L'écart de $1{,}5$ cm entre les graduations de la demi-droite n'intervient pas : seul le réel $\dfrac{j}{5}$ compte.

Conclusion. $\overrightarrow{B_1B_4} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $B_1B_4 = 4{,}8$ cm.

Exercice 5

Abscisses de projetés et équations

La droite (D) est munie d'un axe $(O, \vec{i})$. On projette sur (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D). Trois points M, N et P d'une même droite (L) ont des projetés d'abscisses $m' = -2$, $n' = 1$ et $p' = 7$.

1.

Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{MP} = x\,\overrightarrow{MN}$. Écrire l'équation que vérifie x, puis la résoudre.

INDICE

Outil : l'égalité $\overrightarrow{MP} = x\,\overrightarrow{MN}$ se transporte en $p' - m' = x\,(n' - m')$. **Attention :** vérifie que $n' - m'$ n'est pas nul avant de diviser.

CORRIGÉ

Équation. D'après les abscisses et la projection sur un axe, la relation $\overrightarrow{MP} = x\,\overrightarrow{MN}$ se traduit par $p' - m' = x\,(n' - m')$:

$$7 - (-2) = x\,\big(1 - (-2)\big),$$

soit $9 = 3x$.

Résolution. Comme $3 \neq 0$, on obtient $x = 3$.

Conclusion. Le réel x vérifie $9 = 3x$, donc $x = 3$: $\overrightarrow{MP} = 3\,\overrightarrow{MN}$.

2.

Le point Q de (L) se projette en O. Trouver le réel t tel que $\overrightarrow{MQ} = t\,\overrightarrow{MN}$.

INDICE

Début : l'abscisse du projeté de Q est 0, celle de l'origine.

CORRIGÉ

Équation. Le projeté de Q est l'origine O, d'abscisse 0. D'après les abscisses et la projection sur un axe, la relation $\overrightarrow{MQ} = t\,\overrightarrow{MN}$ donne :

$$0 - (-2) = t \times 3,$$

soit $2 = 3t$.

Conclusion. $t = \dfrac{2}{3}$: $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{MN}$.

3.

Le point S vérifie $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. Calculer l'abscisse s' de son projeté, puis dire si S est entre M et N ou non.

INDICE

Outil : même traduction, avec le réel $-\frac{1}{2}$. **Ensuite :** regarde le signe de ce réel.

CORRIGÉ

Abscisse. D'après les abscisses et la projection sur un axe, la relation $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ se traduit par :

$$s' - (-2) = -\frac{1}{2} \times 3.$$

Donc $s' = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$.

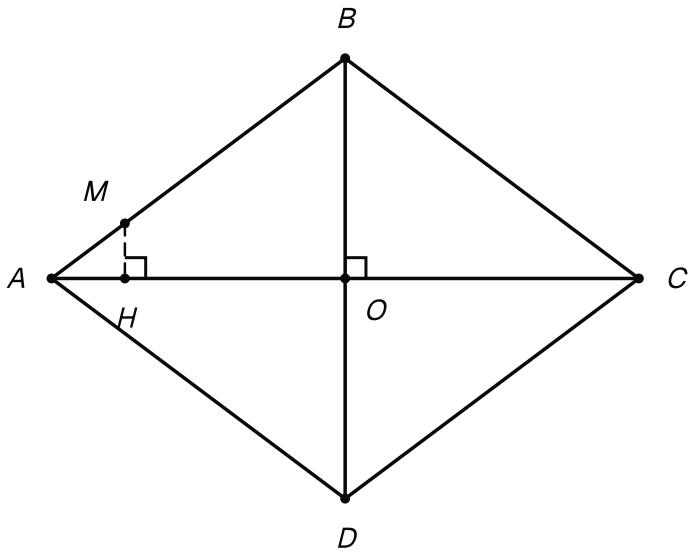
Position. Le réel $-\frac{1}{2}$ est négatif : S est sur (L), de l'autre côté de M par rapport à N. Il n'est donc pas entre M et N. Les projetés le confirment : $-\frac{7}{2} < -2 < 1$.

Conclusion. $s' = -\frac{7}{2}$, et S n'est pas entre M et N.

Exercice 6

Projection orthogonale dans un losange

$ABCD$ est un losange de centre O, avec $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm. Ses diagonales sont perpendiculaires. On projette orthogonalement sur la droite (AC). Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, et H est son projeté orthogonal. Fais la figure sur ton cahier.



Le losange ABCD de centre O, de diagonales 8 cm et 6 cm perpendiculaires, avec le point M de [AB] et son projeté orthogonal H sur (AC).

1.

Déterminer les projetés orthogonaux de A, de B et de D sur (AC).

INDICE

Outil : la définition du projeté orthogonal ; où se coupent les diagonales ?

CORRIGÉ

Le point A. Il est sur (AC) : c'est son propre projeté.

Les points B et D. Les diagonales du losange sont perpendiculaires : la droite (BD) est perpendiculaire à (AC) et la coupe en O. C'est donc la perpendiculaire à (AC) menée par B, et aussi celle menée par D.

Conclusion. Le projeté orthogonal de A est A ; celui de B et celui de D sont égaux à O.

2.

Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AO}$, puis calculer AH.

INDICE

Outil : la conservation du coefficient de colinéarité ; une projection orthogonale est une projection.

CORRIGÉ

Conservation. Une projection orthogonale est une projection. Les points A, B et M se projettent en A, O et H. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ devient :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AO}.$$

Longueur. Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu, donc $AO = \frac{8}{2} = 4$ cm. Ainsi $AH = \frac{1}{4} \times 4 = 1$ cm.

Conclusion. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AO}$ et $AH = 1$ cm.

3.

Justifier que $(MH) \parallel (BO)$, puis calculer MH.

INDICE

Rappel du collège : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. **Ensuite :** la forme vectorielle du théorème de Thalès dans le triangle ABO.

CORRIGÉ

La droite (MH). M est sur (AB) et distinct de A, donc il n'est pas sur (AC) : $M \neq H$ et la droite (MH) existe.

Parallélisme. (MH) et (BO) sont toutes deux perpendiculaires à (AC) : elles sont parallèles.

Thalès. Dans le triangle ABO, $M \in (AB)$, $M \neq A$, $H \in (AO)$ et $(MH) \parallel (BO)$. Le réel est celui de $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. La forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet A, donne :

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BO}.$$

Longueur. $BO = \frac{6}{2} = 3$ cm, donc $MH = \frac{1}{4} \times 3$, soit $MH = \frac{3}{4}$ cm.

Conclusion. Les droites (MH) et (BO) sont parallèles, et $MH = \frac{3}{4}$ cm.

4.

Le point N vérifie $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Quel est son projeté orthogonal ? En déduire la position de la droite (MN) par rapport à (AC).

INDICE

Début : recommence le raisonnement de la question 2 avec D. **Ensuite :** deux points distincts de même projeté.

CORRIGÉ

Projeté de N. A se projette en A et D en O. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ devient, pour le projeté N' de N :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN'} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{AH}.\end{aligned}$$

Donc $N' = H$.

Points distincts. M appartient à (AB) et N à (AD), tous deux distincts de A ; comme (AB) et (AD) n'ont que A en commun, $M \neq N$.

Position de (MN). Les points distincts M et N ont le même projeté orthogonal H. D'après les propriétés immédiates du projeté, (MN) est parallèle à la direction de projection, qui est perpendiculaire à (AC).

Conclusion. Le projeté orthogonal de N est H, et $(MN) \perp (AC)$.