BURHAN

La projection dans le plan : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La projection dans le plan	Application	7

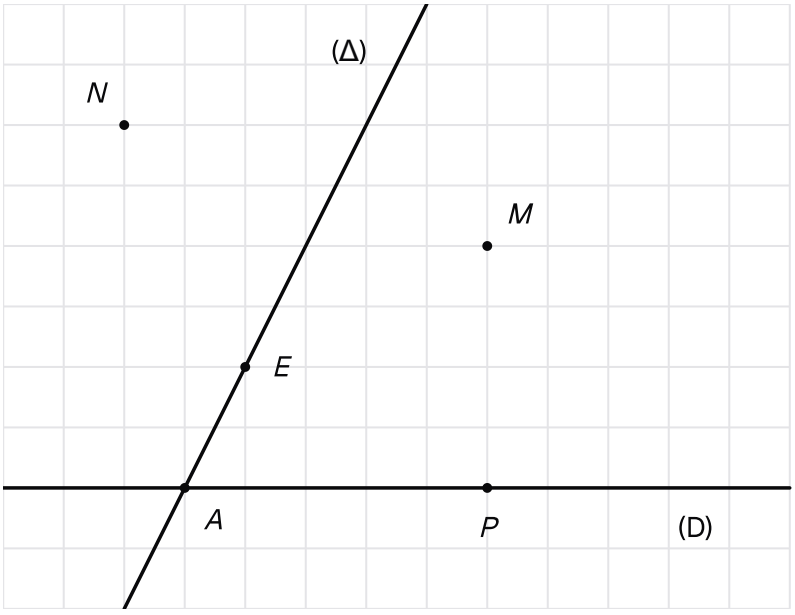
Exercice 1

Quatre projetés sur un quadrillage

Sur un quadrillage, on place un point A. La droite (D) est la ligne horizontale du quadrillage qui passe par A.

La droite (Δ) passe par A et par le point E situé un carreau à droite de A et deux carreaux au-dessus.

On projette sur (D) parallèlement à (Δ). Reproduis la figure sur ton cahier.



La figure à reproduire : la droite (D) horizontale par A, la direction (Δ) qui passe par A et E, et les points M, N et P dont on cherche les projetés.

1.

Le point M est à cinq carreaux à droite de A et quatre carreaux au-dessus. Construire son projeté M' et le situer par rapport à A.

INDICE

Outil : la parallèle à (Δ) menée par M. Sur le quadrillage, elle descend de deux carreaux chaque fois qu'elle recule d'un carreau.

CORRIGÉ

Parallèle à (Δ). Les droites (D) et (Δ) sont sécantes en A : le projeté existe. La parallèle à (Δ) menée par M descend de deux carreaux pour chaque carreau parcouru vers la gauche.

Arrivée sur (D). Le point M est quatre carreaux au-dessus de (D) : deux pas de ce type suffisent pour l'atteindre. On recule ainsi de deux carreaux, et l'on arrive à $5 - 2 = 3$ carreaux à droite de A.

Conclusion. Le projeté M' de M sur (D) parallèlement à (Δ) est à trois carreaux à droite de A.

2.

Le point N est à un carreau à gauche de A et six carreaux au-dessus. Construire son projeté N'.

INDICE

Début : combien de pas « deux carreaux vers le bas, un carreau vers la gauche » faut-il pour descendre de six carreaux ?

CORRIGÉ

Parallèle à (Δ). On mène par N la parallèle à (Δ). Le point N est six carreaux au-dessus de (D) : il faut trois pas « deux carreaux vers le bas, un carreau vers la gauche », donc reculer de trois carreaux.

Arrivée sur (D). Le point atteint est sur (D), à $1+3=4$ carreaux à gauche de A.

Conclusion. Le projeté N' de N sur (D) parallèlement à (Δ) est à quatre carreaux à gauche de A.

3.

Déterminer le projeté du point E, puis celui du point P de (D) situé cinq carreaux à droite de A.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté. Quelle est la parallèle à (Δ) qui passe par E ?

CORRIGÉ

Le point E. Comme E appartient à (Δ), la parallèle à (Δ) menée par E est la droite (Δ) elle-même. Elle coupe (D) en A : le projeté de E est A.

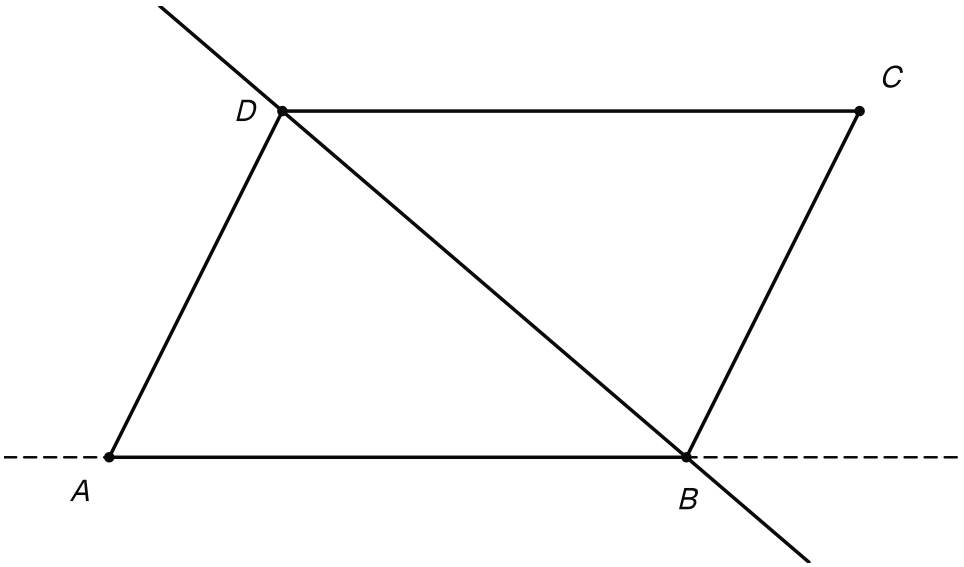
Le point P. Il appartient à (D). D'après les propriétés immédiates du projeté, P est son propre projeté : $P'=P$.

Conclusion. Le point E se projette en A, et le point P en lui-même.

Exercice 2

Des points de même projeté dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. On projette sur sa diagonale (BD) parallèlement au côté (AB). Fais la figure sur ton cahier.



Le parallélogramme ABCD avec sa diagonale (BD), droite sur laquelle on projette, et le côté (AB), qui donne la direction.

1.

Déterminer le projeté de B, puis celui de A.

INDICE

Outil : un point de la droite de projection est son propre projeté. Pour A, quelle est la parallèle à (AB) qui passe par A ?

CORRIGÉ

Le point B. Il appartient à la droite de projection (BD). D'après les propriétés immédiates du projeté, c'est son propre projeté.

Le point A. La parallèle à (AB) menée par A est la droite (AB) elle-même. Elle coupe (BD) en B : le projeté de A est B.

Conclusion. Les points B et A ont tous deux pour projeté B. Ces deux points distincts ont le même projeté parce que la droite (AB) est parallèle à la direction.

2.

Déterminer le projeté de C. On place ensuite le point F tel que $\overrightarrow{CF} = -3\,\overrightarrow{AB}$: quel est son projeté ?

INDICE

Outil : dans un parallélogramme, $(DC) \parallel (AB)$. **Ensuite :** que dit l'égalité $\overrightarrow{CF} = -3\,\overrightarrow{AB}$ de la droite (CF) ?

CORRIGÉ

Le point C. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $(DC) \parallel (AB)$. La parallèle à (AB) menée par C est ainsi (DC), qui coupe (BD) en D.

Le point F. L'égalité $\overrightarrow{CF} = -3\,\overrightarrow{AB}$ montre que $\overrightarrow{CF}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et non nul : la droite (CF) est parallèle à (AB). D'après les propriétés immédiates du projeté, F et C ont le même projeté, c'est D.

Conclusion. Le projeté de C est D, et celui de F est encore D.

3.

On note I le milieu de $[AD]$. Les points I et A ont-ils le même projeté ?

INDICE

Outil : deux points distincts ont le même projeté seulement si la droite qui les joint est parallèle à (AB).

CORRIGÉ

Deux points distincts. Le milieu I de $[AD]$ est distinct de A, puisque $A \neq D$. La droite (IA) est donc la droite (AD).

Direction. La droite (AD) n'est pas parallèle à (AB) : ces deux droites sont sécantes en A. D'après les propriétés immédiates du projeté, les points I et A n'ont donc pas le même projeté : le projeté de I n'est pas B.

Conclusion. Non, les points I et A n'ont pas le même projeté.

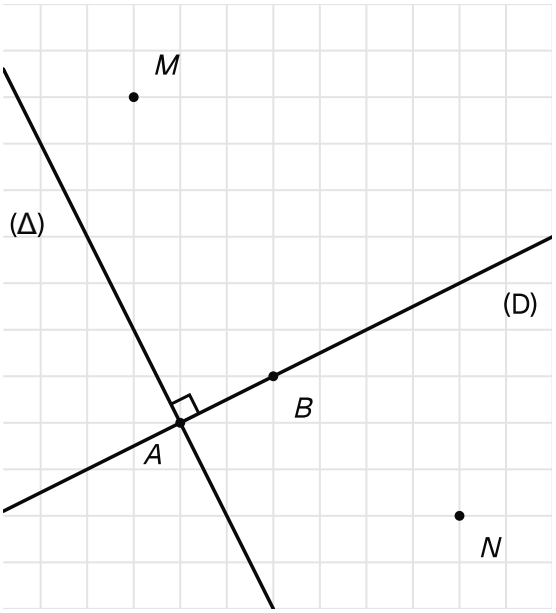
Exercice 3

Projetés orthogonaux sur une droite oblique

Sur un quadrillage, on place un point A. Le point B est à deux carreaux à droite de A et un carreau au-dessus ; (D) est la droite (AB).

La droite (Δ) passe par A et par le point situé un carreau à gauche de A et deux carreaux au-dessus. On admet que $(\Delta) \perp (D)$: fais la figure sur ton cahier et contrôle l'angle droit à l'équerre.

On projette sur (D) parallèlement à (Δ).



Sur le quadrillage, la droite oblique (D) passe par A et B, la droite (Δ) lui est perpendiculaire en A, et les points M et N attendent leurs projetés.

1.

Quel nom donne-t-on à cette projection ? Comment construit-on le projeté d'un point M ?

INDICE

Outil : la définition de la projection orthogonale.

CORRIGÉ

Nom. La direction (Δ) est perpendiculaire à la droite (D) : il s'agit de la **projection orthogonale** sur (D).

Construction. On trace la perpendiculaire à (D) passant par M. Le projeté orthogonal H de M est le point où elle coupe (D).

Conclusion. C'est la projection orthogonale sur (D), et le projeté de M s'obtient avec la perpendiculaire à (D) menée par M.

2.

Le point M est à un carreau à gauche de A et sept carreaux au-dessus. Construire son projeté orthogonal H sur (D).

INDICE

Début : la perpendiculaire à (D) menée par M descend de deux carreaux chaque fois qu'elle avance d'un carreau vers la droite. **Ensuite :** compte les pas jusqu'à (D).

CORRIGÉ

Perpendiculaire. On mène par M la parallèle à (Δ), c'est-à-dire la perpendiculaire à (D) passant par M. Elle descend de deux carreaux pour chaque carreau vers la droite.

Arrivée sur (D). Après trois pas, on a avancé de trois carreaux et descendu de six. On est alors à $3-1=2$ carreaux à droite de A et $7-6=1$ carreau au-dessus : c'est le point B, qui est sur (D). Donc $H=B$.

Conclusion. Le projeté orthogonal de M sur (D) est le point B.

3.

Le point N est à six carreaux à droite de A et deux carreaux en dessous. Construire son projeté orthogonal K sur (D) et exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Début : cette fois, la perpendiculaire menée par N monte de deux carreaux pour chaque carreau vers la gauche.

CORRIGÉ

Perpendiculaire. La perpendiculaire à (D) menée par N monte de deux carreaux pour chaque carreau vers la gauche.

Arrivée sur (D). Depuis N, deux pas « un carreau à gauche, deux vers le haut » mènent au point situé quatre carreaux à droite de A et deux au-dessus. Ce point est sur (D), qui monte d'un carreau tous les deux carreaux : c'est le projeté orthogonal K de N.

Vecteur. De A à B, on avance de deux carreaux et l'on monte d'un. De A à K, on fait deux fois ce trajet :

$$\overrightarrow{AK}=2\,\overrightarrow{AB}.$$

Conclusion. K est à quatre carreaux à droite de A et deux au-dessus, et $\overrightarrow{AK}=2\,\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4

Thalès en vecteurs, de l'autre côté du sommet

RST est un triangle tel que $ST = 9$ cm. Le point U vérifie $\overrightarrow{RU} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RS}$. La parallèle à (ST) menée par U coupe la droite (RT) en V. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Où se trouve U par rapport à R et S ? Quel est le sommet de la configuration de Thalès, et quel est le réel k ?

INDICE

Outil : le signe du réel dans $\overrightarrow{RU} = k\,\overrightarrow{RS}$.

CORRIGÉ

Position de U. Le réel $-\frac{2}{3}$ est non nul et négatif : U est sur la droite (RS), de l'autre côté de R par rapport à S, et $U \neq R$.

Configuration. Les droites (RS) et (RT) se coupent en R. Le point U est sur (RS) et distinct de R, le point V est sur (RT), et $(UV) \parallel (ST)$: c'est une configuration de Thalès de sommet R. Le réel k est celui de l'égalité qui définit U :

$$k = -\frac{2}{3}.$$

Conclusion. U est sur (RS), de l'autre côté de R par rapport à S ; le sommet est R et le réel est $k = -\frac{2}{3}$.

2.

Écrire les deux autres égalités vectorielles de cette configuration.

INDICE

Outil : la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens direct) : le même réel k figure dans les trois égalités.

CORRIGÉ

D'après la question 1, la configuration a pour sommet R et pour réel $k = -\frac{2}{3}$. La forme vectorielle du théorème de Thalès (sens direct) donne, avec ce même réel :

$$\overrightarrow{RV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{UV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{ST}.$$

Conclusion. Les deux autres égalités sont $\overrightarrow{RV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{UV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{ST}$.

3.

Calculer la longueur UV, puis situer V par rapport à R et T.

INDICE

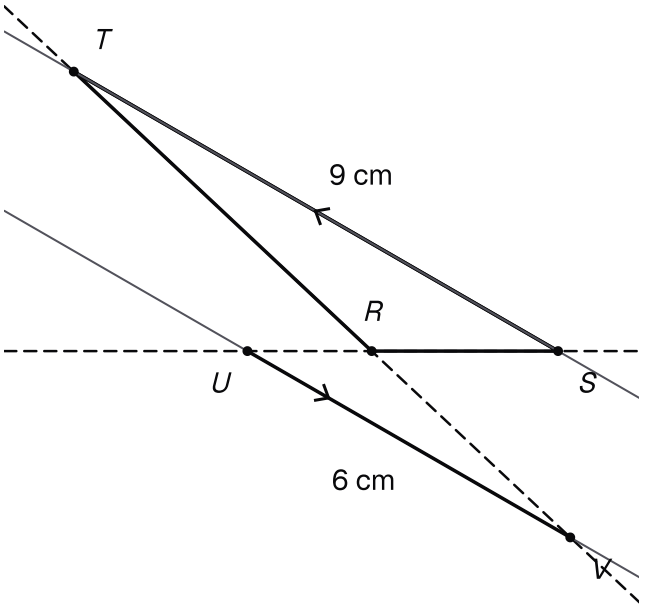
Outil : la longueur UV est la longueur du vecteur $\overrightarrow{UV}$; le signe de k ne change pas la longueur.

CORRIGÉ

Longueur UV. D'après la question 2, $\overrightarrow{UV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{ST}$. Le signe moins change le sens du vecteur, pas sa longueur : $UV = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm.

Position de V. On a $\overrightarrow{RV} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{RT}$ avec un réel négatif : V est sur (RT), de l'autre côté de R par rapport à T, et $RV = \frac{2}{3}RT$.

Conclusion. $UV = 6$ cm, et V est de l'autre côté de R par rapport à T.



Le point U est de l'autre côté de R par rapport à S ; la parallèle à (ST) menée par U coupe (RT) en V, lui aussi de l'autre côté de R, et UV vaut 6 cm.

Exercice 5

Parallèles ou non : comparer deux réels

KLM est un triangle tel que $LM = 8$ cm. On place les points P, Q et W tels que :

$$\overrightarrow{KP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KL},$$
$$\overrightarrow{KQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KM},$$
$$\overrightarrow{KW} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KM}.$$

Fais la figure sur ton cahier.

1.

Justifier que les droites (PQ) et (LM) sont parallèles, puis calculer PQ.

INDICE

Outil : la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens réciproque), avec le sommet K.

CORRIGÉ

Le même réel. Les égalités issues du sommet K qui définissent P et Q portent le même réel non nul $\frac{5}{4}$.

Parallélisme. D'après la forme vectorielle réciproque du théorème de Thalès, de sommet K :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{LM}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires, donc $(PQ) \parallel (LM)$.

Longueur. $PQ = \frac{5}{4} \times 8 = 10$ cm.

Conclusion. Les droites (PQ) et (LM) sont parallèles, et $PQ = 10$ cm.

2.

Les droites (PW) et (LM) sont-elles parallèles ?

INDICE

Début : si elles l'étaient, quel réel la forme directe du théorème de Thalès donnerait-elle pour $\overrightarrow{KW}$?

CORRIGÉ

Supposition. Supposons $(PW) \parallel (LM)$. Le point P est sur (KL) et distinct de K, le point W est sur (KM). La forme directe du théorème de Thalès, de sommet K, donnerait alors pour W le réel de P :

$$\overrightarrow{KW} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KM}.$$

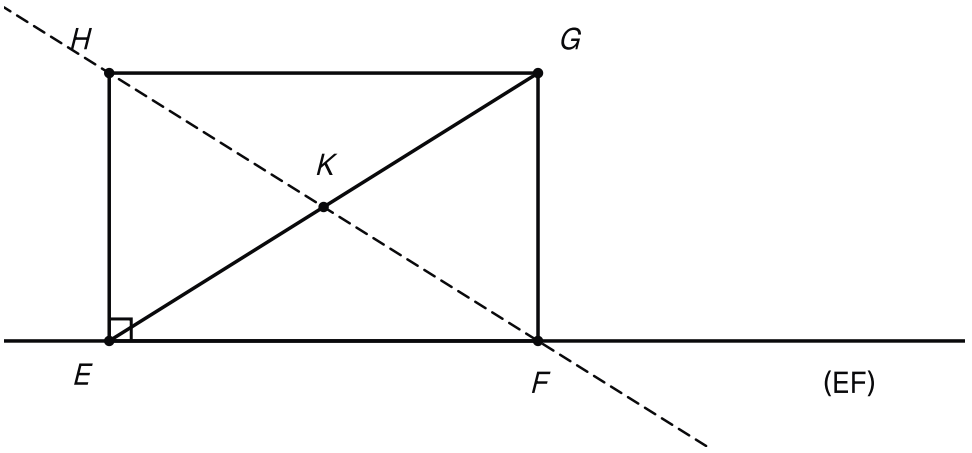
Contradiction. Or $\overrightarrow{KW} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KM}$, avec $\overrightarrow{KM} \neq \vec{0}$ et $\frac{3}{2} \neq \frac{5}{4}$. La supposition est donc fausse.

Conclusion. Les droites (PW) et (LM) ne sont pas parallèles.

Exercice 6

Un milieu projeté dans un rectangle

$EFGH$ est un rectangle de centre K. On projette sur la droite (EF) parallèlement à la diagonale (FH), et l'on note X' le projeté de chaque point X. Fais la figure sur ton cahier.



Le rectangle EFGH, ses diagonales qui se coupent en son centre K, la droite (EF) de projection et la diagonale (FH) qui donne la direction.

1.

Déterminer E', F' et H'.

INDICE

Outil : les propriétés immédiates du projeté.

CORRIGÉ

Points de (EF). E et F appartiennent à (EF) : $E' = E$ et $F' = F$.

Le point H. La parallèle à (FH) menée par H est la droite (FH) elle-même. Elle coupe (EF) en F : $H' = F$.

Conclusion. $E' = E$, $F' = F$ et $H' = F$.

2.

Justifier que $K' = F$.

INDICE

Outil : le centre d'un rectangle est le milieu de ses diagonales ; sur quelle droite se trouve K ?

CORRIGÉ

Le centre K du rectangle est le milieu de la diagonale $[FH]$: il appartient à la droite (FH). La parallèle à (FH) menée par K est donc (FH) elle-même, qui coupe (EF) en F.

On retrouve le milieu projeté : K' est le milieu de $[F'H']$, segment réduit au point F.

Conclusion. Le projeté de K est F : $K' = F$.

3.

En utilisant la diagonale $[EG]$, exprimer $\overrightarrow{EG'}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$, puis placer G'.

INDICE

Outil : si I est le milieu de $[MN]$, alors I' est le milieu de $[M'N']$.

CORRIGÉ

Milieu projeté. K est aussi le milieu de l'autre diagonale $[EG]$. D'après la propriété « vecteurs égaux et milieu par projection », K' est le milieu de $[E'G']$. Comme $K' = F$ et $E' = E$, le point F est le milieu de $[EG']$.

Vecteur. Le milieu F de $[EG']$ vérifie $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG'}$, donc :

$$\overrightarrow{EG'} = 2\,\overrightarrow{EF}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{EG'} = 2\,\overrightarrow{EF}$: G' est sur (EF), au-delà de F, à la distance EF de F.

Exercice 7

Abscisses de projetés sur un axe

La droite (D) est munie d'un axe $(O, \vec{i})$. On projette sur (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D). Les projetés A' et B' de deux points A et B ont pour abscisses $a' = -1$ et $b' = 3$.

1.

Exprimer $\overrightarrow{A'B'}$ en fonction de $\vec{i}$.

INDICE

Outil : pour deux points de l'axe, le vecteur vaut la différence des abscisses multipliée par $\vec{i}$.

CORRIGÉ

Les points A' et B' sont sur l'axe, d'abscisses -1 et 3. D'après les abscisses et la projection sur un axe, $\overrightarrow{A'B'}$ est la différence des abscisses multipliée par $\vec{i}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= \big(3 - (-1)\big)\,\vec{i} \\ &= 4\,\vec{i}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{A'B'} = 4\,\vec{i}$.

2.

Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$. Calculer l'abscisse m' de son projeté.

INDICE

Outil : l'égalité $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ se transporte en $m' - a' = k\,(b' - a')$.

CORRIGÉ

Traduction. Le point M se projette en M'. D'après les abscisses et la projection sur un axe, la relation $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$ se traduit sur les abscisses des projetés :

$$m' - a' = \frac{3}{2}\,(b' - a').$$

Calcul. Avec $a' = -1$ et $b' = 3$:

$$\begin{aligned}m' + 1 &= \frac{3}{2} \times 4 \\ &= 6.\end{aligned}$$

Conclusion. L'abscisse du projeté de M est $m' = 5$.

3.

On note I le milieu de $[AB]$. Calculer l'abscisse de son projeté I'.

INDICE

Outil : la définition vectorielle du milieu donne $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Vecteur. D'après la définition vectorielle du milieu, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Traduction. D'après les abscisses et la projection sur un axe, l'abscisse i' de I' vérifie :

$$\begin{aligned} i' - (-1) &= \frac{1}{2} \times 4 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion. L'abscisse de I' est $i' = 1$, la moyenne de -1 et 3.