BURHAN

La projection dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

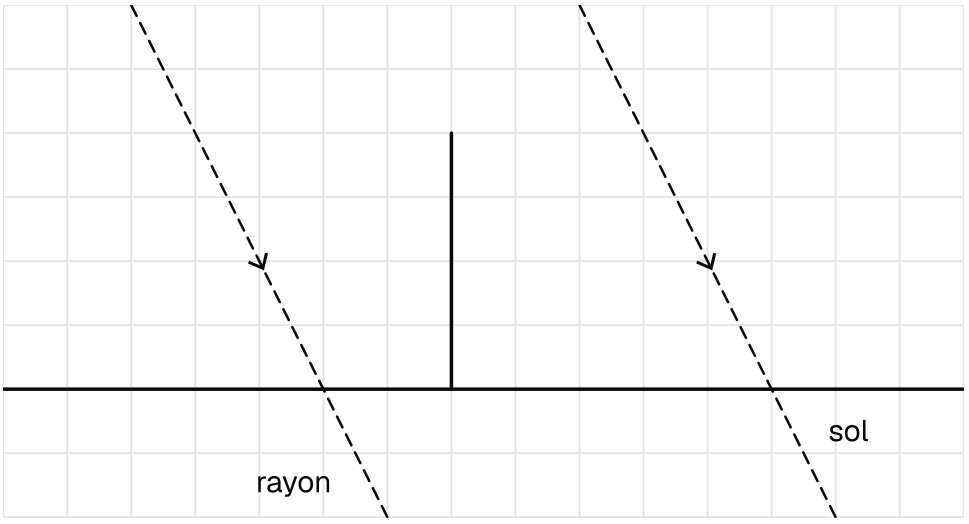
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/projection-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
La projection dans le plan	Semestre 1

L'ombre d'un bâton au soleil

Un bâton est planté bien droit dans un sol plat. Le soleil de fin d'après-midi l'éclaire. Ses rayons arrivent tous dans la même direction : ils sont **parallèles**.

Sur ton cahier, le sol est une ligne du quadrillage et le bâton monte de 4 carreaux. Chaque rayon descend de 2 carreaux quand il avance d'un carreau vers la droite.



Le bâton dressé sur le sol quadrillé, sous des rayons de soleil qui descendent tous de deux carreaux pour un carreau parcouru vers la droite.

Devine : Une prédiction

Où tombe l'ombre du sommet du bâton ?

A. À 4 carreaux du pied du bâton.

Faux.

Tu as reporté la hauteur du bâton sur le sol : l'ombre dépend aussi de la pente des rayons.

B. À 2 carreaux du pied du bâton.

Juste.

Juste : pour descendre de 4 carreaux, le rayon avance de 2 carreaux.

C. À 8 carreaux du pied du bâton.

Faux.

Tu as multiplié par 2 au lieu de diviser : le rayon descend vite, il avance peu.

D. Au pied du bâton.

Faux.

Ce serait le cas avec des rayons verticaux ; ici, ils sont inclinés.

Correction

Suis le rayon qui passe par le sommet : il descend de 2 carreaux pour chaque carreau parcouru vers la droite. Le sommet est à 4 carreaux du sol : pour l'atteindre, il avance donc de 2 carreaux.

L'ombre du sommet tombe ainsi à 2 carreaux du pied du bâton.

Ce point d'ombre est un **projeté** : le sommet a été envoyé sur le sol en suivant une direction fixe.

Dans ce chapitre, tu construis des projetés, puis tu écris le théorème de Thalès avec des vecteurs. Tu transportes ensuite des égalités de vecteurs sur une droite, enfin sur un axe gradué.

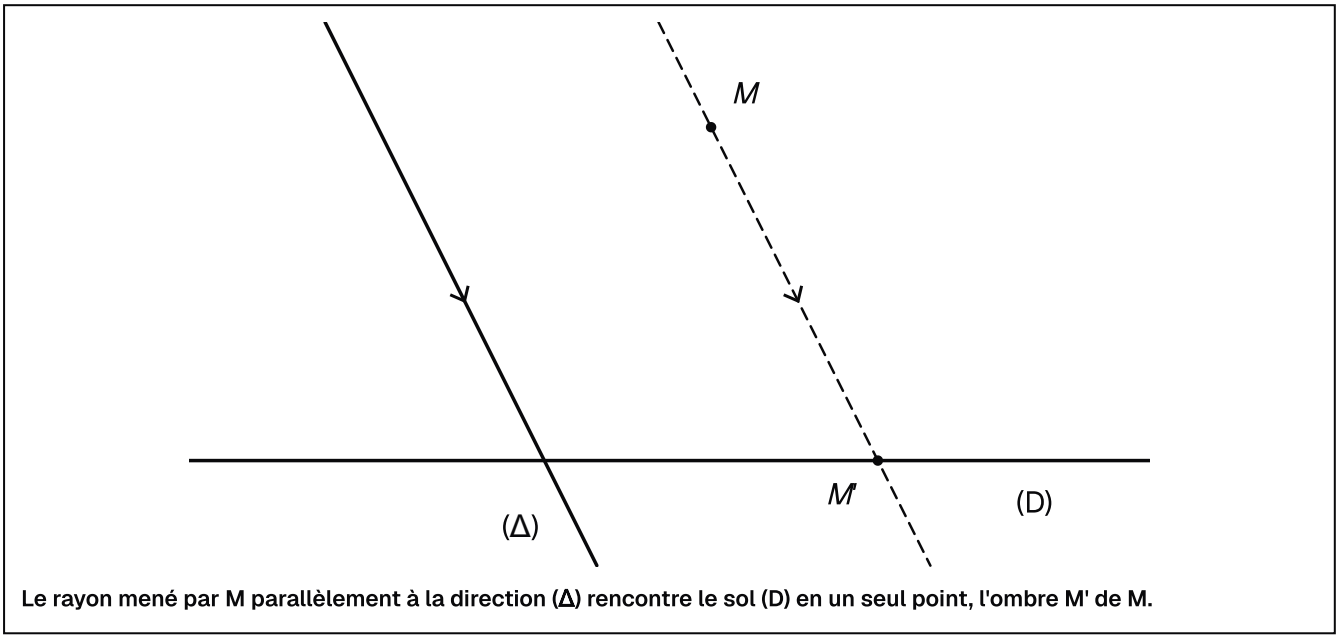
Tes outils : le chapitre « Calcul vectoriel dans le plan » et la géométrie du collège.

Projeté d'un point sur une droite parallèlement à une droite

Des rayons parallèles

En clair. Le sol est une droite (D). La direction des rayons est une droite (Δ), qui coupe le sol. Pour trouver l'ombre d'un point M, on trace le rayon qui passe par M : c'est la parallèle à (Δ) menée par M. Ce rayon coupe le sol en un point.

Rappel du collège. Par un point passe une seule droite parallèle à une droite donnée. Deux droites non parallèles sont **sécantes** : elles ont un seul point commun.



Le rayon mené par M parallèlement à la direction (Δ) rencontre le sol (D) en un seul point, l'ombre M' de M.

Devine : Le soleil se couche

Au coucher du soleil, imagine des rayons parallèles au sol. Que devient l'ombre du sommet du bâton ?

A. Elle tombe au pied du bâton.

Faux.
Le rayon qui passe par le sommet reste à la hauteur du sommet : il n'atteint pas le pied.

B. Elle tombe très loin, mais on peut encore la placer.

Faux.
Aussi loin que tu ailles, ce rayon reste au-dessus du sol : aucun point ne convient.

C. Elle n'existe plus : ce rayon ne rencontre jamais le sol.

Juste.
Juste : le rayon et le sol sont parallèles et distincts.

D. Elle tombe à une distance égale à la hauteur du bâton.

Faux.
Cette distance correspond à une autre inclinaison des rayons, pas à des rayons parallèles au sol.

Correction
Le rayon qui passe par le sommet est parallèle au sol, sans le toucher. Deux droites parallèles et distinctes n'ont aucun point commun : il n'y a pas d'ombre.

Conclusion. Pour projeter, il faut une direction (Δ) **sécante** à la droite (D).

Le projeté d'un point

Définition : Projeté d'un point sur une droite parallèlement à une autre

Soit (D) et (Δ) deux droites **sécantes** du plan, et M un point du plan. La droite qui passe par M et qui est parallèle à (Δ) coupe la droite (D) en un point unique M'.

Le point M' s'appelle le **projeté** de M sur (D) **parallèlement à** (Δ). On dit aussi que M' est l'image de M par la **projection** sur (D) parallèlement à (Δ).

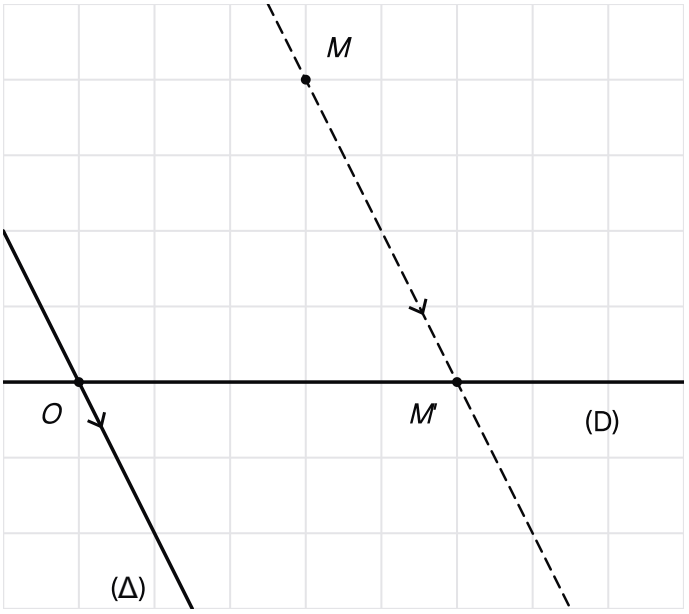
Exemple : un projeté sur le quadrillage

Fais la figure sur ton quadrillage au fur et à mesure. La droite (D) est une ligne horizontale du quadrillage, et O un point de (D).

La droite (Δ) descend de 2 carreaux quand elle avance d'un carreau vers la droite. Le point M est à 3 carreaux à droite de O et à 4 carreaux au-dessus.

On projette M sur (D) parallèlement à (Δ). La parallèle à (Δ) menée par M doit descendre de 4 carreaux : elle avance donc de 2 carreaux.

Le projeté M' est sur (D), à 5 carreaux à droite de O.



Sur le quadrillage, la parallèle à (Δ) menée par M descend de quatre carreaux en avançant de deux, et coupe (D) en M', cinq carreaux à droite de O.

Méthode : construire le projeté d'un point

1. **Nomme** la droite de projection (D) et la direction (Δ) ; vérifie qu'elles sont sécantes.
2. **Mène** par le point M la parallèle à (Δ).
3. **Place** M' au point où cette parallèle coupe (D).
4. **Rédige** : « M' est le projeté de M sur (D) parallèlement à (Δ) ».

Vérifie : Un point sous la droite

Même quadrillage, même droite (D), même direction (Δ). Le point N est à 2 carreaux à gauche de O et à 2 carreaux **au-dessous** de (D). Où est son projeté N' ?

A. À 2 carreaux à gauche de O.

Faux.
C'est le point de (D) juste au-dessus de N : tu as suivi une verticale, pas la direction (Δ).

B. À 1 carreau à gauche de O.

Faux.
Tu es parti vers la droite en remontant : cette direction n'est pas parallèle à (Δ).

C. À 3 carreaux à droite de O.

Faux.

Erreur de côté : N est à gauche de O, et la parallèle recule encore vers la gauche en remontant.

D. À 3 carreaux à gauche de O.

Juste.

Juste : en remontant de 2 carreaux, la parallèle recule d'un carreau.

Correction

La parallèle à (Δ) descend de 2 carreaux par carreau vers la droite. Lue dans l'autre sens, elle monte de 2 carreaux par carreau vers la gauche.

Partant de N, elle doit monter de 2 carreaux pour atteindre (D) : elle recule d'un carreau.

Conclusion. Le projeté N' de N sur (D) parallèlement à (Δ) est à 3 carreaux à gauche de O.

Points fixes et points de même projeté

En clair. Un caillou posé sur le sol est sa propre ombre. Deux points d'un même rayon ont la même ombre.

Pourquoi est-ce vrai ? Tout repose sur l'unicité de la parallèle menée par un point.

Propriété : Propriétés immédiates du projeté

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes. On projette sur (D) parallèlement à (Δ).

- Un point M est son propre projeté si et seulement si M appartient à (D).
- Deux points **distincts** M et N ont le même projeté si et seulement si la droite (MN) est parallèle à (Δ).

Démonstration

Étape 1. Si M appartient à (D), la parallèle à (Δ) passant par M coupe (D) en M : donc $M' = M$. Réciproquement, si $M' = M$, alors M appartient à (D), car un projeté est, par définition, situé sur (D).

Étape 2. Supposons $(MN) \parallel (\Delta)$. Par unicité de la parallèle menée par un point, (MN) est la parallèle à (Δ) passant par M, et aussi celle passant par N. Comme (Δ) est sécante à (D), cette droite coupe (D) en un seul point : $M' = N'$.

Étape 3. Réciproquement, supposons $M' = N'$. Par unicité, les parallèles à (Δ) passant par M et par N sont toutes deux celle qui passe par M'. Les points distincts M et N sont donc sur cette droite, qui est (MN) : $(MN) \parallel (\Delta)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'argument clé est l'**unicité de la parallèle** : par un point passe une seule parallèle à (Δ).

Si (MN) est parallèle à (Δ), cette droite est donc à la fois le rayon de M et celui de N. Elle coupe (D) en un seul point, car (Δ) est sécante à (D) : les deux projetés sont confondus.

Vérifie : L'argument de l'étape 2

Dans l'étape 2 de la preuve, quelle propriété permet d'affirmer que la parallèle à (Δ) passant par M est la droite (MN) ?

A. L'unicité de la parallèle menée par un point.

Juste.
Juste : (MN) est une parallèle à (Δ) passant par M, donc c'est la seule.

B. Deux droites sécantes ont un seul point commun.

Faux.
Elle sert juste après : comme (Δ) est sécante à (D), la droite (MN) coupe (D) en un seul point.

C. Le théorème de Thalès du collège.

Faux.
Aucun rapport de longueurs n'intervient dans cette preuve.

D. La relation de Chasles.

Faux.
La preuve n'emploie aucun vecteur : elle ne parle que de droites parallèles.

Indice 1
Relis l'argument clé annoncé juste au-dessus, dans « Ce qu'il faut retenir de la preuve ».

Correction
Par hypothèse, (MN) est parallèle à (Δ) et passe par M. Par unicité de la parallèle menée par M, c'est donc elle qui sert à construire M'.

Elle passe aussi par N : par la même unicité, c'est encore elle qui sert à construire N'.

Exemple : sur le quadrillage de l'exemple précédent

- Le point P est sur (D), à 4 carreaux à gauche de O. D'après les propriétés immédiates du projeté, $P' = P$.
- Le point Q est à 1 carreau à gauche de M et à 2 carreaux au-dessus. On passe de Q à M en avançant d'un carreau et en descendant de 2 : la droite (MQ) est parallèle à (Δ). Donc $Q' = M'$.

- **L'hypothèse compte.** Le point T est à 1 carreau à droite de M : (MT) n'est pas parallèle à (Δ). Son projeté est à 6 carreaux à droite de O, et non en M'.

Un piège, puis à toi

Attention : deux points distincts, un seul projeté

✗ « Le point L est à 1 carreau à droite de M et à 2 carreaux au-dessous. Comme $L \neq M$, on a $L' \neq M'$. »

✓ On passe de M à L en avançant d'un carreau et en descendant de 2 : (ML) est parallèle à (Δ). Donc $L' = M'$ et $\overrightarrow{M'L'} = \vec{0}$.

Avant d'employer le segment $[M'L']$, vérifie que les projetés sont distincts.

À toi : Trois projetés

Même quadrillage, même droite (D), même direction (Δ). On place trois points :

- A, à 1 carreau à droite de O et à 6 carreaux au-dessus ;
- B, à 3 carreaux à gauche de O et à 4 carreaux au-dessous ;
- C, à 3 carreaux à droite de O et à 2 carreaux au-dessus.

Construis A' et B', puis dis si C a le même projeté que A. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : pour chaque point, mène la parallèle à (Δ) jusqu'à (D).
Indice 2
Pour A, la parallèle descend de 6 carreaux : de combien de carreaux avance-t-elle ?
Indice 3
Point délicat : B est sous (D) ; sa parallèle remonte, donc elle recule vers la gauche.

Réponse
Le projeté de A. La parallèle à (Δ) menée par A descend de 6 carreaux, donc elle avance de 3 carreaux. Le projeté A' de A sur (D) parallèlement à (Δ) est à 4 carreaux à droite de O.

Le projeté de B. La parallèle remonte de 4 carreaux, donc elle recule de 2 carreaux. Le projeté B' est à 5 carreaux à gauche de O.

Le point C. On passe de A à C en avançant de 2 carreaux et en descendant de 4 : la droite (AC) est parallèle à (Δ).

Conclusion. D'après les propriétés immédiates du projeté, $C' = A'$: le point C a le même projeté que A.

La projection orthogonale

Le soleil à la verticale

En clair. À midi, en été, le soleil peut être presque à la verticale. Imagine des rayons **perpendiculaires** au sol : l'ombre d'un point est alors juste au-dessous de lui.

Projeter avec une direction perpendiculaire à la droite, c'est le cas le plus simple et le plus utile.

Devine : Un bâton penché

Un bâton est planté de travers dans le sol. Les rayons du soleil sont perpendiculaires au sol. Où tombe l'ombre du sommet ?

A. Au pied du bâton.
Faux.
Le bâton est penché : son sommet n'est pas au-dessus de son pied.

B. À une distance du pied égale à la longueur du bâton.
Faux.
Cette distance n'est atteinte que si le bâton est couché sur le sol.

C. Nulle part : le rayon du sommet ne coupe pas le sol.
Faux.
Une droite perpendiculaire au sol le coupe toujours en un point.

D. Au point du sol où arrive la perpendiculaire au sol menée par le sommet.
Juste.
Juste : le rayon du sommet est cette perpendiculaire.

Correction
Le rayon qui passe par le sommet est perpendiculaire au sol. Il coupe le sol en un seul point, juste au-dessous du sommet. Comme le bâton est penché, ce point n'est pas son pied.

Le projeté orthogonal

Définition : Projection orthogonale

Soit (D) une droite et (Δ) une droite **perpendiculaire** à (D). La projection sur (D) parallèlement à (Δ) s'appelle la **projection orthogonale** sur (D).

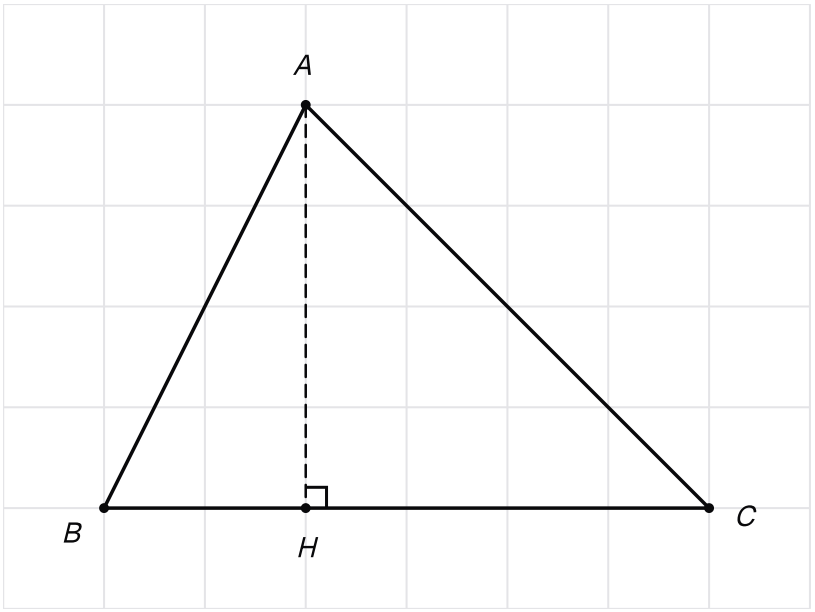
Le projeté H d'un point M est alors le point d'intersection de (D) et de la perpendiculaire à (D) passant par M : on l'appelle le **projeté orthogonal** de M sur (D).

Exemple : le pied d'une hauteur

Rappel du collège : la hauteur issue de A d'un triangle ABC est la perpendiculaire à (BC) menée par A. Son pied est donc le **projeté orthogonal** H de A sur (BC).

Sur le quadrillage, C est à 6 carreaux à droite de B, et A à 2 carreaux à droite de B et 4 carreaux au-dessus. La perpendiculaire à (BC) menée par A est verticale.

Le projeté orthogonal H de A sur (BC) est donc sur $[BC]$, à 2 carreaux de B.



La hauteur issue de A, verticale sur le quadrillage, tombe sur [BC] en H, deux carreaux à droite de B : H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Exemple : des points qui ne bougent pas

- Le projeté orthogonal de B sur (BC) est B lui-même, car B appartient à (BC). C'est une propriété immédiate du projeté.
- Dans un triangle ABC rectangle en B, la droite (AB) est perpendiculaire à (BC). Le projeté orthogonal de A sur (BC) est donc B : le pied de la hauteur issue de A est le sommet de l'angle droit.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Quelle direction ?

Le projeté orthogonal de M sur (D) est son projeté sur (D) parallèlement à quelle droite ?

A. À la droite (D) elle-même.

Faux.
Une droite n'est pas sécante à elle-même : on ne peut pas projeter parallèlement à (D).

B. À n'importe quelle droite perpendiculaire à (D).

Juste.
Juste : toutes les perpendiculaires à (D) sont parallèles entre elles, et donnent le même projeté.

C. À une droite qui joint M à un point de (D).

Faux.
Une telle droite peut être oblique : elle donne en général un autre projeté.

D. À n'importe quelle droite sécante à (D).

Faux.
Une direction oblique donne en général un autre projeté que la perpendiculaire.

Correction
Par définition, la projection orthogonale sur (D) est la projection parallèlement à une droite perpendiculaire à (D). Deux perpendiculaires à (D) sont parallèles entre elles : elles donnent la même parallèle menée par M, donc le même projeté H.

À toi : Deux projetés orthogonaux

Sur le quadrillage, C est à 8 carreaux à droite de B, et A à 6 carreaux à droite de B et 4 carreaux au-dessus.

Construis le projeté orthogonal H de A sur (BC). Construis ensuite le projeté orthogonal K de A sur la droite verticale du quadrillage qui passe par C.

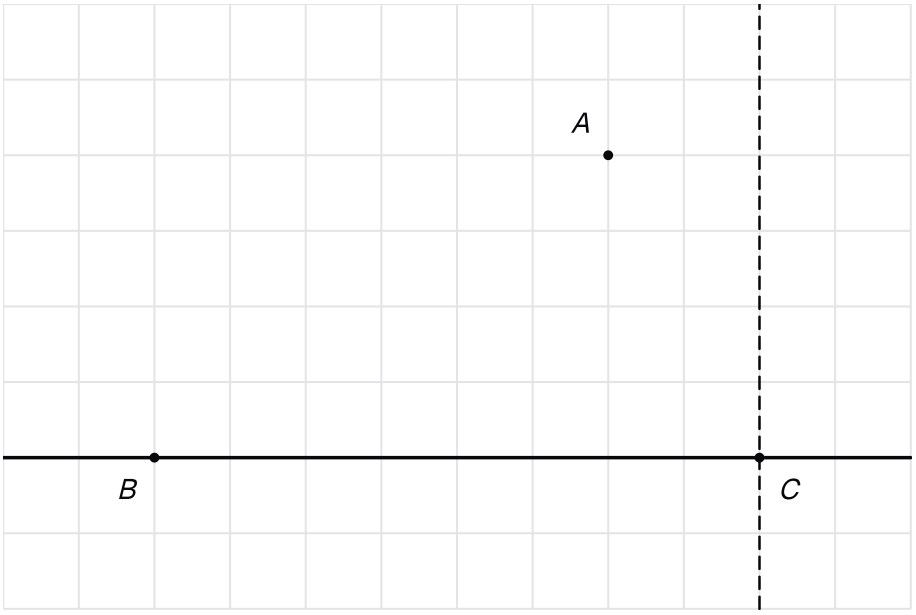
Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque projeté, mène par A la perpendiculaire à la droite de projection.
Indice 2
La perpendiculaire à (BC) est verticale ; la perpendiculaire à une droite verticale est horizontale.
Indice 3
Point délicat : K est sur la verticale de C, pas sur (BC) ; compte les carreaux à partir de C.

Réponse
Le projeté H. La droite (BC) est horizontale, donc la perpendiculaire à (BC) menée par A est verticale. Le projeté orthogonal H de A sur (BC) est sur $[BC]$, à 6 carreaux de B et 2 carreaux de C : c'est le pied de la hauteur issue de A.

Le projeté K. La droite de projection est verticale, donc la perpendiculaire à cette droite menée par A est horizontale. Le projeté orthogonal K de A sur cette droite est à 4 carreaux au-dessus de C.

> **Conclusion.** H est sur $[BC]$ à 6 carreaux de B, et K est sur la verticale de C, 4 carreaux plus haut que C.



Les données de l'exercice : les points B, C et A sur le quadrillage, la droite (BC) et la verticale qui passe par C ; les deux projetés restent à construire.

Le théorème de Thalès en vecteurs

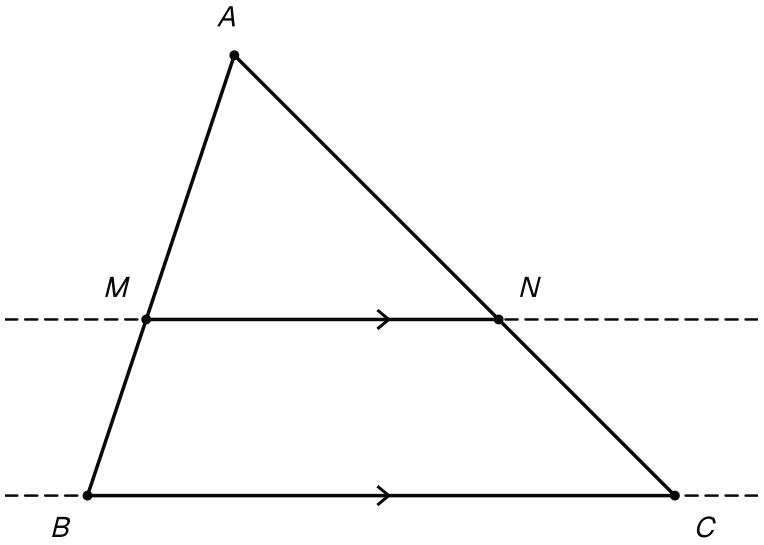
Du collège au lycée

Rappel du collège. Dans un triangle ABC, soit M un point de (AB) et N un point de (AC). Si $(MN) \parallel (BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Réciproquement, si A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) \parallel (BC)$.

Ce théorème parle de longueurs. Il ne dit pas de quel côté de A se trouve M : les vecteurs, eux, le disent.



Dans le triangle ABC, la droite (MN) parallèle à (BC) découpe sur (AB) et (AC) les points M et N du théorème de Thalès du collège.

Devine : De l'autre côté du sommet

Dans un triangle ABC, le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$: il est de l'autre côté de A. La parallèle à (BC) menée par M coupe (AC) en N. Quelle égalité est vraie ?

A. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Faux.

La longueur est la bonne, mais pas le sens : N est, comme M, de l'autre côté de A.

B. $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC}$

Faux.

Tu as inversé le rapport : AN vaut le tiers de AC, pas son triple.

C. $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Juste.

Juste : même rapport, et même côté de A que M.

D. $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$

Faux.

Le rapport est inversé et le signe oublié.

Correction

Le théorème du collège, avec M et B de part et d'autre de A, donne $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.

De plus, N est de l'autre côté de A par rapport à C, comme M par rapport à B. Donc :

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

> L'énoncé qui suit le justifie avec des vecteurs.

En clair. Les trois rapports du collège deviennent un seul réel k, muni d'un signe.

Pourquoi est-ce vrai ? On fabrique un point de (AC) avec le bon coefficient. La relation de Chasles montre qu'il convient, puis l'unicité de la parallèle conclut.

Le sens direct

Théorème : Théorème de Thalès : forme vectorielle (sens direct)

Soit ABC un triangle, M un point de la droite (AB) distinct de A, et N un point de la droite (AC). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors il existe un réel k non nul tel que

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}.$$

Le **même** réel k figure dans les trois égalités.

Démonstration

Étape 1. Comme M appartient à (AB), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$; et $k \neq 0$ car $M \neq A$. Soit N_1 le point tel que $\overrightarrow{AN_1} = k\,\overrightarrow{AC}$: il appartient à (AC).

Étape 2. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN_1} = k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{BC}$. Ce vecteur n'est pas nul, car $k \neq 0$ et $B \neq C$: la droite (MN_1) est parallèle à (BC).

Étape 3. Par unicité de la parallèle à (BC) passant par M, les droites (MN_1) et (MN) sont confondues. Cette droite coupe (AC) en un seul point, car (AC) et (BC) sont sécantes (A, B, C non alignés). Donc $N_1 = N$, ce qui donne les trois égalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **fabrique un candidat** : le point N_1 tel que $\overrightarrow{AN_1} = k\,\overrightarrow{AC}$. Elle n'emploie jamais le théorème du collège.

La relation de Chasles montre que (MN_1) est parallèle à (BC). L'unicité de la parallèle menée par M donne alors $N_1 = N$.

Vérifie : La dernière étape

Dans l'étape 3 de la preuve, qu'est-ce qui permet de conclure que $N_1 = N$?

A. La relation de Chasles.

Faux.
Elle sert à l'étape 2, pour calculer $\overrightarrow{MN_1}$.

B. Le fait que $k \neq 0$.

Faux.

Il sert plus tôt dans la preuve ; la conclusion vient d'une unicité.

C. L'unicité de la parallèle à (BC) menée par M.

Juste.

Juste : (MN_1) et (MN) sont deux parallèles à (BC) passant par M, donc elles sont confondues.

D. Le théorème de Thalès du collège.

Faux.

La preuve ne l'emploie pas : elle n'utilise que des vecteurs et des parallèles.

Indice 1

Relis la dernière phrase de « Ce qu'il faut retenir de la preuve », juste au-dessus.

Correction

Les droites (MN_1) et (MN) sont parallèles à (BC) et passent par M : par unicité de la parallèle, elles sont confondues.

Cette droite coupe (AC) en un seul point, car (AC) et (BC) sont sécantes : A, B, C ne sont pas alignés. Donc $N_1 = N$.

Exemple : un réel négatif

Fais la figure sur ton quadrillage. B est à 4 carreaux à droite de A, et C à 2 carreaux à droite et 4 au-dessus de A. Le point M est à 2 carreaux à gauche de A : $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

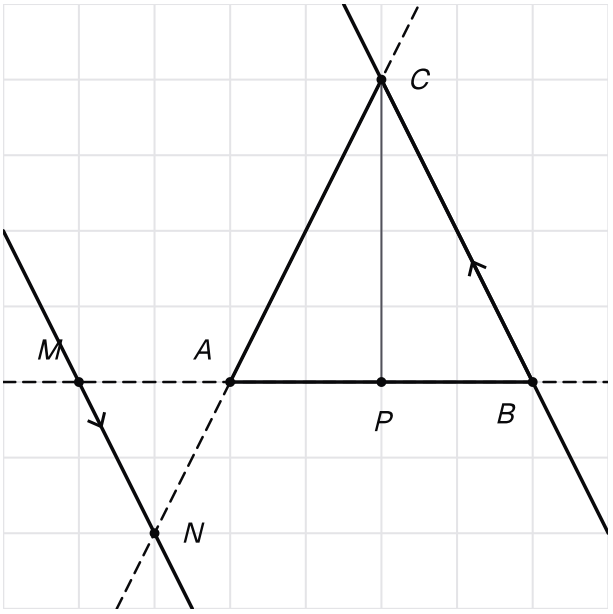
La parallèle à (BC) menée par M coupe (AC) en N. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet A, avec $k = -\frac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Le point N est donc à 1 carreau à gauche et 2 carreaux au-dessous de A.

L'hypothèse compte. Le point P à 2 carreaux à droite de A vérifie $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. La droite (PC) est verticale, donc non parallèle à (BC).

Elle coupe (AC) en C, et $\overrightarrow{AC} = 1 \times \overrightarrow{AC}$: le réel vaut 1, et non $\frac{1}{2}$.



Avec k égal à moins un demi, M et N passent de l'autre côté du sommet A, et la droite (MN) reste parallèle à (BC) ; la verticale (PC) montre le cas qui ne convient pas.

Écrire les trois égalités

Méthode : traduire une configuration de Thalès

1. **Repère** le sommet commun A, les droites (AB) et (AC), et vérifie que $(MN) \parallel (BC)$.
2. **Lis** le réel k sur une droite : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, avec $k < 0$ si M et B sont de part et d'autre de A.
3. **Écris** les deux autres égalités avec le même k : $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$.

Attention : même sommet, même ordre

✗ « Dans l'exemple, $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. »

✓ Les vecteurs partent du sommet A : $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

L'ordre des lettres se garde aussi : de M vers N comme de B vers C, soit $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Le sens réciproque

En clair. Reprends le quadrillage de l'exemple. Le point P est à 2 carreaux à droite de A, et Q à 1 carreau à droite et 2 carreaux au-dessus de A. Ainsi $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

On passe de P à Q en reculant d'un carreau et en montant de 2 : (PQ) est parallèle à (BC).

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles, employée deux fois, donne $\overrightarrow{PQ}$.

Théorème : Théorème de Thalès : forme vectorielle (sens réciproque)

Soit ABC un triangle et k un réel non nul. Si M et N sont les points tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC},$$

alors $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$: les droites (MN) et (BC) sont parallèles (confondues lorsque $k = 1$).

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC}$.

Étape 2. On factorise par k : $\overrightarrow{MN} = k\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = k\,\overrightarrow{BC}$, encore par la relation de Chasles.

Étape 3. Comme $k \neq 0$ et $B \neq C$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ n'est pas nul et il est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles. Lorsque $k = 1$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$, donc $M = B$ et $N = C$: les deux droites sont confondues.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve est un **calcul** : la relation de Chasles fait passer par A, puis on factorise par k. Elle ne demande aucune figure.

Retiens la condition : le **même** réel non nul devant $\overrightarrow{AB}$ et devant $\overrightarrow{AC}$.

Vérifie : Passer par le sommet

La preuve écrit $\overrightarrow{MN}$ en passant par le sommet A. Pourquoi ce détour par A ?

A. Pour appliquer le théorème de Thalès du collège.

Faux.

La preuve ne l'emploie pas : elle n'utilise que la relation de Chasles.

B. Pour employer l'unicité de la parallèle menée par un point.

Faux.

Elle sert au sens direct ; ici, un calcul de vecteurs suffit.

C. Parce que A est l'origine d'un axe gradué.

Faux.

Aucun axe n'intervient : A est le sommet commun des deux hypothèses.

D. Pour faire apparaître $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$, que donnent les hypothèses.

Juste.

Juste : la relation de Chasles relie $\overrightarrow{MN}$ aux deux vecteurs connus.

Indice 1

Regarde sur quels vecteurs portent les deux hypothèses de l'énoncé.

Correction

Les hypothèses portent sur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$, mesurés depuis A. La relation de Chasles les fait apparaître :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}.$$

On factorise ensuite par k, et la relation de Chasles donne $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Exemple : démontrer un parallélisme

Soit ABC un triangle, P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et Q le point tel que $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Le même réel non nul $\frac{2}{3}$ figure dans les deux égalités. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens réciproque), de sommet A :

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Donc $(PQ) \parallel (BC)$.

L'hypothèse compte. Soit R tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Si (PR) était parallèle à (BC), le sens direct donnerait $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ce n'est pas le cas : (PR) n'est pas parallèle à (BC).

La méthode, à toi, le coin devoir

Méthode : démontrer un parallélisme

1. **Exprime** $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AN}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$, depuis le même sommet A.
2. **Compare** les deux coefficients.
3. **Conclus** : égaux et non nuls, ils donnent $(MN) \parallel (BC)$ par le sens réciproque. Différents, avec $M \neq A$, ils prouvent par le sens direct que (MN) et (BC) ne sont pas parallèles : ce sens imposerait le même réel.

À toi : Une réciproque, puis un sens direct

Soit ABC un triangle. Place E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et F tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Montre que $(EF) \parallel (BC)$.

Soit ensuite G tel que $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; la parallèle à (BC) menée par G coupe (AC) en L. Exprime $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{GL}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour E et F, compare les deux coefficients mesurés depuis A.

Indice 2

Pour G et L, le parallélisme est donné : c'est le sens direct qui s'applique.

Indice 3

Point délicat : le réel $-\frac{2}{5}$ est négatif ; garde son signe dans les deux égalités.

Réponse

Le parallélisme. Mesurés depuis A, les deux coefficients valent $\frac{3}{2}$, réel non nul. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens réciproque), de sommet A, avec $k = \frac{3}{2}$:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Donc $(EF) \parallel (BC)$.

Les points G et L. Le point G est sur (AB), distinct de A, et $(GL) \parallel (BC)$. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens direct), de sommet A, avec $k = -\frac{2}{5}$:

$$\overrightarrow{AL} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{GL} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Conclusion. Les droites (EF) et (BC) sont parallèles ; le réel $-\frac{2}{5}$ relie $\overrightarrow{AL}$ à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GL}$ à $\overrightarrow{BC}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un parallélisme

En devoir, un parallélisme par Thalès vectoriel se rédige en trois phrases. Pour l'exemple, écris :

« On a $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, avec le même réel non nul. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens réciproque), de sommet A, $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Donc $(PQ) \parallel (BC)$. »

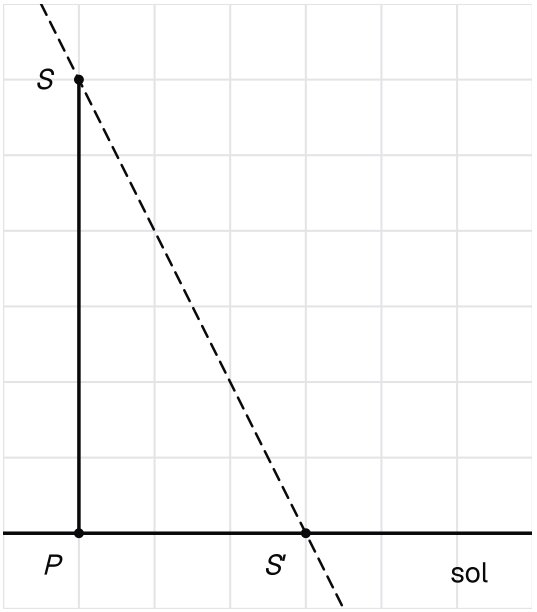
Nomme toujours le sommet et le réel k.

La projection conserve le coefficient de colinéarité

Deux constats

En clair. Un poteau de 6 carreaux se dresse sur le sol, en un point P. Le soleil est celui du début : chaque rayon descend de 2 carreaux par carreau vers la droite.

L'ombre S' du sommet S est à 3 carreaux de P. Le poteau mesure 6 carreaux, son ombre 3 : les longueurs changent. Qu'est-ce qui ne change pas ?



Le poteau [PS] de six carreaux et le rayon qui passe par son sommet S : l'ombre S' tombe sur le sol, trois carreaux à droite de P.

Devine : L'ombre d'un point du poteau

Le point T du poteau est à 2 carreaux du sol : $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS}$. Où est son ombre T' ?

A. À 2 carreaux de P.

Faux.

Tu as gardé la longueur PT : or l'ombre du poteau est deux fois plus courte que lui.

B. À 1 carreau de P.

Juste.

Juste : pour descendre de 2 carreaux, le rayon avance d'un carreau.

C. À 3 carreaux de P.

Faux.

C'est l'ombre du sommet S, pas celle de T.

D. À 4 carreaux de P.

Faux.

Tu as multiplié la hauteur par 2 au lieu de diviser.

Correction

Le rayon de T descend de 2 carreaux : il avance d'un carreau. L'ombre T' est à 1 carreau de P.

Compare : sur le poteau, $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS}$; sur le sol, $\overrightarrow{PT'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS'}$.

Les longueurs ont changé, le coefficient $\frac{1}{3}$ est resté.

Devine : Thalès vu comme une projection

Dans un triangle ABC, on projette sur (AC) parallèlement à (BC). Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, et N est son projeté. Quelle égalité est vraie ?

A. $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Juste.

Juste : c'est la forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet A.

B. $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

Faux.

Tu as mesuré depuis C : $\frac{3}{5}$ est le coefficient de $\overrightarrow{CN}$ par rapport à $\overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$

Faux.

Le rapport est inversé : N est sur le segment $[AC]$.

D. $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Faux.

M est du côté de B : N est du côté de C, sans signe moins.

Correction

Le point A est sur (AC) : il est son propre projeté. Le point B est sur (BC) : son projeté est C.

La parallèle à (BC) menée par M coupe (AC) en N. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès, de sommet A, avec $k = \frac{2}{5}$:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

Ici encore, la projection a gardé le coefficient.

La conservation du coefficient

Propriété : Conservation du coefficient de colinéarité

Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes. On note M', N', P' et Q' les projetés respectifs de quatre points M, N, P et Q sur (D) parallèlement à (Δ). Si k est un réel tel que $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$, alors

$$\overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{M'N'}.$$

On dit que la projection **conserve le coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.

Remarque : Un résultat admis

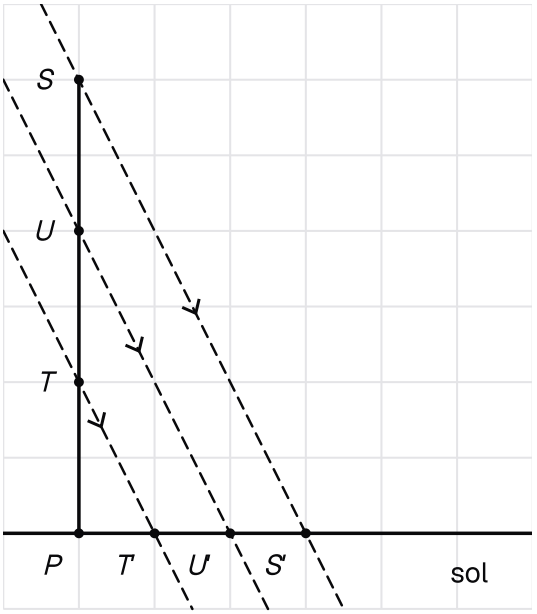
Ce résultat est admis. Sa preuve distingue plusieurs cas de figure : on ne la fait pas ici.

Les deux constats précédents l'illustrent ; tu l'emploies sans le démontrer.

Exemple : d'autres points du poteau

Reprends le poteau. On projette sur le sol parallèlement aux rayons ; P est sur le sol, donc $P' = P$.

- Le point U du poteau est à 4 carreaux du sol : $\overrightarrow{PU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PS}$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, $\overrightarrow{PU'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PS'}$: l'ombre U' est à 2 carreaux de P.
- De même, $\overrightarrow{TU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS}$, donc $\overrightarrow{T'U'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS'}$: les ombres T' et U' sont à 1 carreau l'une de l'autre.



Les points T et U du poteau, à deux et quatre carreaux du sol, ont leurs ombres T' et U' à un et deux carreaux de P : le coefficient se retrouve sur le sol.

Méthode : utiliser la conservation du coefficient

1. **Écris** une égalité $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$ entre deux vecteurs colinéaires de la figure.
2. **Projette** les quatre points sur (D) parallèlement à (Δ) ; un point de (D) est son propre projeté.
3. **Conclus** en citant la conservation du coefficient de colinéarité : $\overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{M'N'}$, avec le même k.

Vecteurs égaux et milieu

En clair. Reprends le poteau. On a $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TU}$: deux montées de 2 carreaux. Leurs ombres vérifient $\overrightarrow{PT'} = \overrightarrow{T'U'}$: deux pas d'un carreau.

Le milieu I de $[TU]$ est à 3 carreaux du sol. Son rayon avance de $\frac{3}{2}$ carreau : l'ombre I' est le milieu de $[T'U']$.

Rappel du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ». Un point I est le milieu de $[MN]$ exactement quand $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Ce sont deux cas particuliers de la conservation du coefficient de colinéarité, avec $k = 1$ puis $k = \frac{1}{2}$.

Propriété : Vecteurs égaux et milieu par projection

On projette sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D), et l'on note X' le projeté de chaque point X.

- Si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{P'Q'}$.
- Si I est le milieu du segment $[MN]$, alors I' est le milieu du segment $[M'N']$.

Démonstration

Étape 1. L'égalité $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ s'écrit $\overrightarrow{PQ} = 1 \times \overrightarrow{MN}$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, avec $k = 1$, on obtient $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{M'N'}$.

Étape 2. D'après la définition vectorielle du milieu, $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. La conservation du coefficient de colinéarité, avec $k = \frac{1}{2}$, donne $\overrightarrow{M'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'N'}$.

Étape 3. Toujours d'après la définition vectorielle du milieu, I' est donc le milieu du segment $[M'N']$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **écrire chaque propriété comme une égalité de colinéarité**. Une égalité de vecteurs, c'est un coefficient 1. Un milieu, c'est un coefficient $\frac{1}{2}$, par la définition vectorielle du milieu.

La conservation du coefficient fait le reste.

Vérifie : La conclusion de la preuve

À l'étape 3 de la preuve, quelle propriété permet de passer de $\overrightarrow{M'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'N'}$ à « I' est le milieu de $[M'N']$ » ?

A. La forme vectorielle du théorème de Thalès.

Faux.
Aucun triangle n'intervient dans cette étape.

B. Les propriétés immédiates du projeté.

Faux.
Elles disent quels points ont le même projeté, pas où est un milieu.

C. La définition vectorielle du milieu.

Juste.
Juste : I' est le milieu de $[M'N']$ exactement quand $\overrightarrow{M'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'N'}$.

D. L'unicité de la parallèle menée par un point.

Faux.
Elle sert à construire les projetés, pas à reconnaître un milieu.

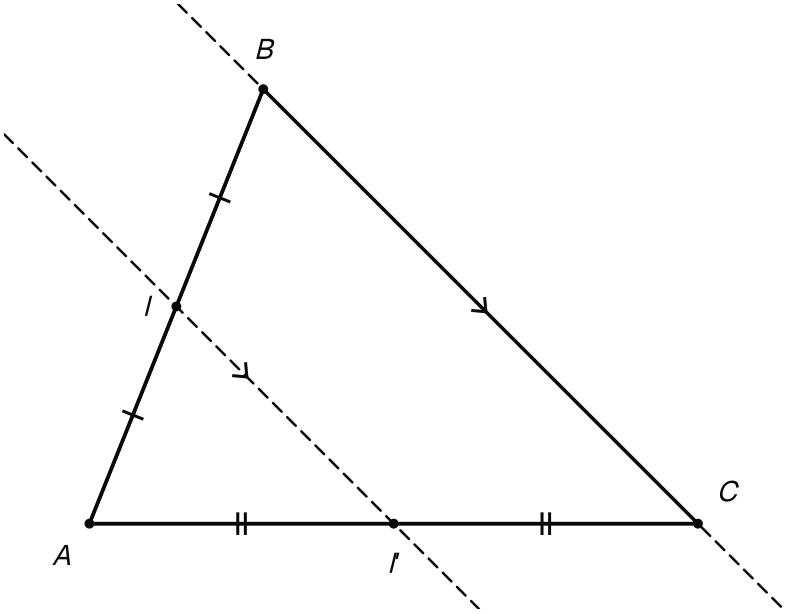
Indice 1
Relis « Ce qu'il faut retenir de la preuve » : comment y écrit-on un milieu ?

Correction
Le chapitre « Calcul vectoriel dans le plan » donne la définition vectorielle du milieu : le point I' est le milieu de $[M'N']$ si et seulement si $\overrightarrow{M'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'N'}$.

La preuve l'emploie deux fois : à l'étape 2, puis à l'étape 3.

Exemple : la droite des milieux

- Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AB]$. On projette sur (AC) parallèlement à (BC) : $A' = A$ et $B' = C$. D'après la propriété des vecteurs égaux et du milieu par projection, I' est le milieu de $[AC]$. Tu retrouves le théorème des milieux du collège.
- **Un cas limite.** Soit J le milieu de $[BC]$. La droite (BC) est la direction de projection : $B' = C' = C$, et $J' = C$. Le segment projeté est réduit à un point.



Projeté sur (AC) parallèlement à (BC), le milieu I de [AB] tombe au milieu I' de [AC] : c'est le théorème des milieux du collège.

Partager un segment en trois

Exemple : un segment de 7 cm en trois parts

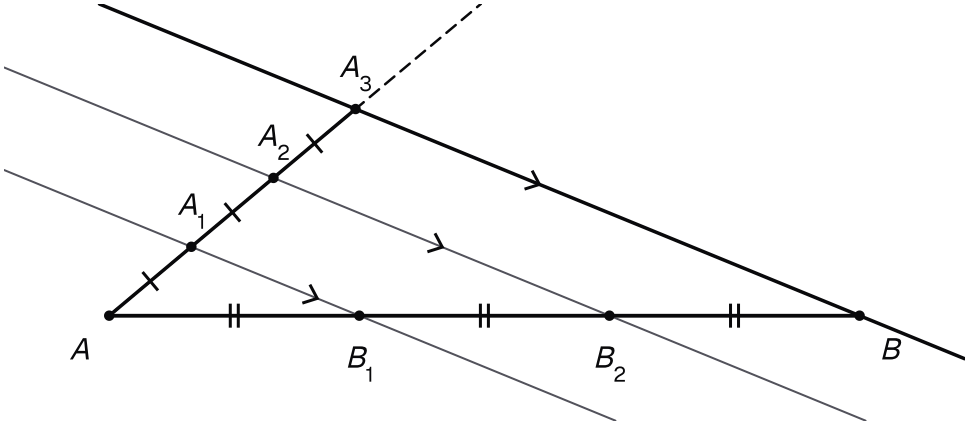
Le segment $[AB]$ mesure 7 cm : $\dfrac{7}{3}$ cm ne se mesure pas à la règle.

Trace une demi-droite d'origine A, non portée par (AB), et reporte trois fois 1 cm : A_1, A_2, A_3. Projette A_1 et A_2 sur (AB) parallèlement à (A_3B) : tu obtiens B_1 et B_2.

On a $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_3}$, avec $A' = A$ et $A'_3 = B$. D'après la conservation du coefficient de colinéarité :

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

De même, $\overrightarrow{AB_2} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$: le segment est partagé en trois parts égales.



Trois reports égaux sur la demi-droite d'origine A, puis deux parallèles à (A3B) : les points B1 et B2 partagent le segment [AB], long de 7 cm, en trois parts égales.

Méthode : partager un segment en parts égales

1. **Trace** une demi-droite d'origine A non portée par (AB), et reporte n longueurs égales : A_1, A_2, …, A_n.
2. **Projette** A_1, …, A_{n-1} sur (AB) parallèlement à (A_nB) : tu obtiens B_1, …, B_{n-1}.
3. **Justifie** par la conservation du coefficient de colinéarité : $A' = A$ et $A'_n = B$, donc $\overrightarrow{AB_j} = \frac{j}{n}\overrightarrow{AB}$.

Deux pièges, puis à toi

Attention : les longueurs ne se conservent pas

✗ « L'ombre du poteau mesure 6 carreaux, comme le poteau. »

✓ Le poteau mesure 6 carreaux, son ombre 3 carreaux : la projection ne conserve pas les longueurs.

Elle conserve le coefficient entre deux vecteurs colinéaires : $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS}$ donne $\overrightarrow{PT'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS'}$.

Attention : seulement entre vecteurs colinéaires

✗ « Le point Q du sol est à 2 carreaux de P. Comme $PS = 3\,PQ$, on a $PS' = 3\,PQ'$. »

✓ Les vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PQ}$ ne sont pas colinéaires : aucune conservation ne s'applique.

En effet, $Q' = Q$ et $PQ' = 2$ carreaux, tandis que $PS' = 3$ carreaux : $PS' = \frac{3}{2}\,PQ'$.

À toi : Projeter sur un côté

Soit ABC un triangle et E le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On projette sur (AB) parallèlement à (AC).

Exprime $\overrightarrow{BE'}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$. Soit ensuite J le milieu de $[EC]$: où est J' ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche d'abord les projetés de B et de C.
Indice 2
Le point C est sur (AC) : la parallèle à (AC) menée par C est (AC) elle-même.
Indice 3
Point délicat : $C' = A$, et non $C' = C$; pour situer J', pars de B et passe par E' avec la relation de Chasles.

Réponse
Les projetés de B et de C. Le point B est sur (AB) : $B' = B$. La parallèle à (AC) menée par C est (AC) elle-même, qui coupe (AB) en A : $C' = A$.

Le point E'. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, l'égalité $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donne :

$$\overrightarrow{BE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

Le point J'. Le point J est le milieu de $[EC]$. D'après la propriété des vecteurs égaux et du milieu par projection, J' est le milieu de $[E'A]$.

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{E'A} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BE'}$, d'où $\overrightarrow{E'A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. Avec la définition vectorielle du milieu :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ'} &= \overrightarrow{BE'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E'A} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, et J' est le point de $[BA]$ tel que $\overrightarrow{BJ'} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}$.

Projection sur un axe : abscisse d'un point

Graduer le sol

Rappel du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ». Si M est un point de (AB), un seul réel x vérifie $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$: c'est l'abscisse de M dans le repère (A, B).

En clair. Gradue le sol : choisis une origine O et un vecteur $\vec{i}$ d'un carreau vers la droite. Le poteau de 6 carreaux, de sommet S, se dresse maintenant en P, d'abscisse 2.

Chaque rayon descend toujours de 2 carreaux par carreau vers la droite.

Devine : Une abscisse d'ombre

Quelle est l'abscisse de l'ombre S' du sommet du poteau ?

A. 3

Faux.
C'est la longueur de l'ombre, mesurée depuis P : il faut partir de l'origine O.

B. 8

Faux.
Tu as ajouté la hauteur du poteau : l'ombre ne mesure que 3 carreaux.

C. 2

Faux.
C'est l'abscisse du pied P, son propre projeté.

D. 5

Juste.
Juste : 3 carreaux à droite de P, qui est à l'abscisse 2.

Correction
Le pied P est sur le sol, à l'abscisse 2. L'ombre du sommet est à 3 carreaux à droite de P, comme dans la section précédente. Son abscisse vaut donc $2 + 3 = 5$.

Axe et abscisse

Définition : Axe, abscisse et projection sur un axe

Un **axe** est une droite (D) munie d'un point O, appelé origine, et d'un vecteur non nul $\vec{i}$ qui dirige (D) ; on le note $(O, \vec{i})$. Pour tout point M de (D), il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$: c'est l'**abscisse** de M sur l'axe.

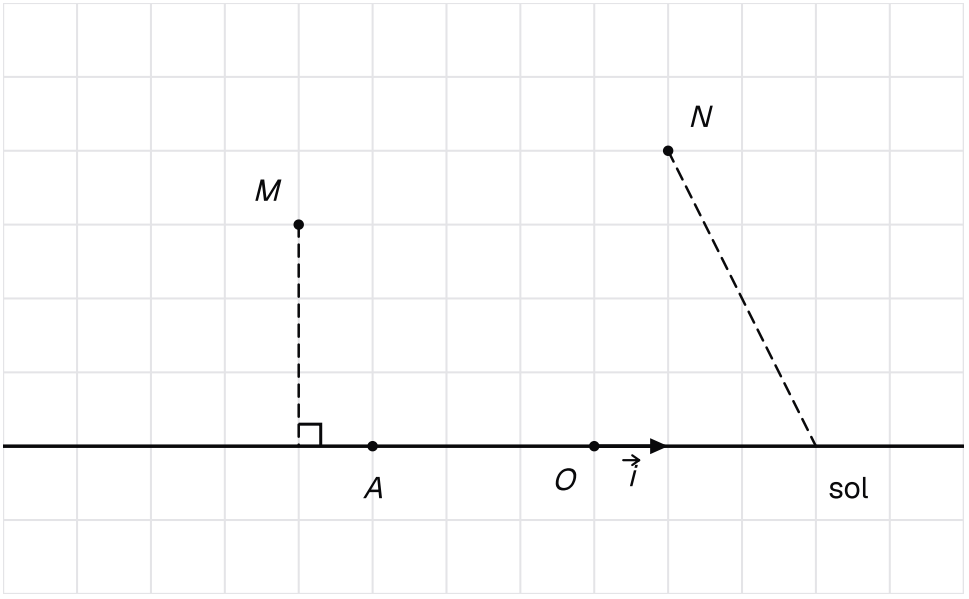
Projeter un point M sur l'axe parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D), ou orthogonalement, c'est construire son projeté M' sur (D). L'abscisse de M' s'appelle l'abscisse du projeté de M.

Exemple : lire des abscisses

Sur l'axe $(O, \vec{i})$ du sol, $\vec{i}$ va d'un carreau vers la droite.

- Le point A du sol est à 3 carreaux à gauche de O : $\overrightarrow{OA} = -3\,\vec{i}$, son abscisse est -3.
- Le point M est à 4 carreaux à gauche de O et 3 au-dessus. Son projeté orthogonal sur l'axe a pour abscisse -4.

- Le point N est à 1 carreau à droite de O et 4 au-dessus. Son projeté sur l'axe parallèlement aux rayons a pour abscisse 3.



Sur l'axe du sol gradué par le vecteur i, A est à l'abscisse moins trois ; M se projette orthogonalement à l'abscisse moins quatre, et N, en suivant les rayons, à l'abscisse trois.

Calculer avec les abscisses

En clair. Sur l'axe, pour aller de l'abscisse 2 à l'abscisse 5, on avance de 3 carreaux : $\overrightarrow{PS'} = 3\,\vec{i}$. Un vecteur porté par l'axe se lit comme une différence d'abscisses.

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles fait passer par l'origine. La conservation du coefficient de colinéarité transporte ensuite les égalités.

Propriété : Abscisses et projection sur un axe

Soit $(O, \vec{i})$ un axe porté par la droite (D).

- Si A et B sont deux points de (D) d'abscisses respectives a et b, alors $\overrightarrow{AB} = (b-a)\,\vec{i}$.
- On projette sur (D) parallèlement à une droite (Δ) sécante à (D). Si $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$ et si les projetés M', N', P', Q' ont pour abscisses respectives m', n', p', q', alors $q' - p' = k\,(n' - m')$.

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles et la définition de l'abscisse, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -a\,\vec{i} + b\,\vec{i} = (b-a)\,\vec{i}$.

Étape 2. D'après la conservation du coefficient de colinéarité, $\overrightarrow{P'Q'} = k\,\overrightarrow{M'N'}$. L'étape 1, appliquée aux points M' et N', puis P' et Q' de (D), permet d'écrire cette égalité $(q' - p')\,\vec{i} = k\,(n' - m')\,\vec{i}$.

Étape 3. Ainsi $\left(q' - p' - k\left(n' - m'\right)\right)\vec{i} = \vec{0}$. Comme $\vec{i} \neq \vec{0}$, le réel facteur est nul : $q' - p' = k\left(n' - m'\right)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées. D'abord, **passer par l'origine** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

Ensuite, **comparer les facteurs** : si $u\,\vec{i} = v\,\vec{i}$ avec $\vec{i} \neq \vec{0}$, alors $u = v$. Une égalité de vecteurs sur l'axe devient une égalité de nombres.

Vérifie : Des vecteurs aux nombres

Dans la preuve, une égalité de vecteurs $u\,\vec{i} = v\,\vec{i}$ devient une égalité de nombres $u = v$. Qu'est-ce qui le permet ?

A. Le réel k n'est pas nul.

Faux.
L'énoncé ne suppose pas $k \neq 0$: avec $k = 0$, il reste vrai.

B. Le vecteur $\vec{i}$ n'est pas le vecteur nul.

Juste.
Juste : un réel multiplié par un vecteur non nul ne donne $\vec{0}$ que si ce réel est nul.

C. La droite (Δ) est sécante à (D).

Faux.
Cette hypothèse sert à construire les projetés, pas à comparer des nombres.

D. Les projetés sont distincts.

Faux.
Rien ne l'exige : l'égalité reste vraie si deux projetés sont confondus.

Indice 1
Relis la seconde idée de « Ce qu'il faut retenir de la preuve », juste au-dessus.

Correction
Si $u\,\vec{i} = v\,\vec{i}$, alors $(u - v)\,\vec{i} = \vec{0}$. Or un vecteur $x\,\vec{i}$ est nul si et seulement si $x = 0$ ou $\vec{i} = \vec{0}$.

Comme $\vec{i} \neq \vec{0}$, on obtient $u = v$. La preuve s'en sert à sa dernière étape.

Exemple : deux calculs

- Sur l'axe, A a pour abscisse -1 et B pour abscisse 4. D'après les abscisses et la projection sur un axe, $\overrightarrow{AB} = (4 - (-1))\,\vec{i} = 5\,\vec{i}$.

- Quatre points M, N, P, Q vérifient $\overrightarrow{PQ} = -2\,\overrightarrow{MN}$. Leurs projetés ont pour abscisses $m' = 1$, $n' = 3$ et $p' = 4$. D'après les abscisses et la projection sur un axe, $q' - 4 = -2\,(3 - 1)$, donc $q' = 0$: le projeté de Q est l'origine O.
- **L'hypothèse compte.** Le point R est à 5 carreaux au-dessus de A : $AR = AB$, mais $\overrightarrow{AR} \neq \overrightarrow{AB}$. Le rayon de R avance de $\dfrac{5}{2}$ carreaux : son projeté a pour abscisse $r' = \dfrac{3}{2}$. Ainsi $r' - (-1) = \dfrac{5}{2}$, et non 5 : il faut une égalité de vecteurs.

Méthode et équation

Méthode : calculer avec les abscisses

1. **Lis** l'abscisse de chaque point de l'axe, avec $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$.
2. **Écris** l'égalité de vecteurs connue, $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$.
3. **Traduis** avec les abscisses des projetés : $q' - p' = k\,(n' - m')$.
4. **Résous** l'équation obtenue, puis contrôle sur la figure.

Exemple : placer un point par une équation

Où placer le point T du poteau pour que son ombre T' ait l'abscisse 4 ? Cherchons le réel k tel que $\overrightarrow{PT} = k\,\overrightarrow{PS}$.

Le pied P est son propre projeté, d'abscisse 2 ; l'ombre S' a l'abscisse 5. D'après les abscisses et la projection sur un axe :

$$4 - 2 = k\,(5 - 2),$$

donc $k = \dfrac{2}{3}$. Le point T est à 4 carreaux du sol.

Contrôle : son rayon descend de 4 carreaux et avance de 2, jusqu'à l'abscisse 4.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Trois abscisses

Même axe, mêmes rayons. Le point E est à 1 carreau à gauche de O et 2 carreaux au-dessus. Le point F est à 2 carreaux à droite de O et 8 carreaux au-dessus. Le point G vérifie $\overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$.

Construis E' et F' et lis leurs abscisses e' et f'. Calcule ensuite l'abscisse g' de G'.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour E' et F', mène les rayons : chacun descend de 2 carreaux par carreau vers la droite.

Indice 2

Pour g', traduis $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ avec les abscisses des projetés.

Indice 3

Point délicat : e' vaut 0 ; le projeté de E est l'origine, pas le point d'abscisse -1.

Réponse

Les projetés E' et F'. Le rayon de E descend de 2 carreaux : il avance d'un carreau, jusqu'à l'origine. Donc $e' = 0$. Le rayon de F descend de 8 carreaux et avance de 4 : $f' = 6$.

L'abscisse g'. D'après les abscisses et la projection sur un axe, l'égalité $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ donne :

$$g' - 0 = \frac{1}{3}(6 - 0),$$

donc $g' = 2$.

Contrôle. G est à 4 carreaux au-dessus de O. Son rayon avance de 2 carreaux, jusqu'à l'abscisse 2.

Conclusion. Les abscisses cherchées sont $e' = 0$, $f' = 6$ et $g' = 2$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger un calcul d'abscisse**

En devoir, nomme l'axe, les projetés et l'énoncé employé. Pour le point T tel que $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PS}$, écris :

« P est sur l'axe : il est son propre projeté, d'abscisse 2. Le projeté S' a pour abscisse 5. D'après les abscisses et la projection sur un axe, $t' - 2 = \frac{1}{3}(5 - 2)$, donc $t' = 3$. »

Contrôle ensuite sur ta figure.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir **: quel outil pour quelle question**

- **Construire** un projeté : la parallèle à la direction, menée par le point, coupe la droite de projection.
- **Reconnaître** un projeté sans construire : un point de (D) est son propre projeté ; deux points d'une parallèle à (Δ) ont le même projeté.
- **Traduire** une configuration de Thalès : sommet commun, réel k, trois égalités.
- **Démontrer** un parallélisme : le même réel non nul depuis le même sommet.
- **Transporter** une égalité $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{MN}$: la conservation du coefficient de colinéarité ; vecteurs égaux et milieux suivent.
- **Calculer** sur un axe : $q' - p' = k\,(n' - m')$.

Vérifie : Le bon outil

Dans un triangle ABC, M est sur (AB) et N sur (AC), avec $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Pour montrer que $(MN) \parallel (BC)$, quel énoncé emploies-tu ?

A. Le sens direct de la forme vectorielle du théorème de Thalès.

Faux.

Il suppose le parallélisme : c'est justement ce qu'il faut démontrer.

B. Les propriétés immédiates du projeté.

Faux.

Elles parlent de projetés confondus, pas de deux droites parallèles.

C. Le sens réciproque de la forme vectorielle du théorème de Thalès.

Juste.

Juste : le même réel non nul $\frac{3}{4}$, depuis le sommet A.

D. Les abscisses sur un axe.

Faux.

Aucun axe n'est donné dans cette question.

Correction

Les deux égalités partent du sommet A, avec le même réel non nul $\frac{3}{4}$. D'après la forme vectorielle du théorème de Thalès (sens réciproque) :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Donc $(MN) \parallel (BC)$.

Vérifie : Encore le bon outil

On projette sur (D) parallèlement à (Δ). Le point K est le milieu de $[RS]$, et $R' \neq S'$. Pour affirmer que K' est le milieu de $[R'S']$, quel énoncé cites-tu ?

A. La propriété des vecteurs égaux et du milieu par projection.

Juste.

Juste : c'est la conservation du coefficient $\frac{1}{2}$.

B. La définition de la projection orthogonale.

Faux.

Rien n'indique que (Δ) est perpendiculaire à (D), et cela ne changerait rien.

C. La forme vectorielle du théorème de Thalès, sens réciproque.

Faux.

Aucun parallélisme n'est à démontrer ici.

D. Les propriétés immédiates du projeté.

Faux.
Elles ne disent rien sur la position d'un milieu.

Correction
Le point K est le milieu de $[RS]$. D'après la propriété des vecteurs égaux et du milieu par projection, K' est le milieu de $[R'S']$. La condition $R' \neq S'$ évite le cas d'un segment réduit à un point.

Le mot du prof. Une projection, c'est une ombre : une droite, une direction, et des rayons parallèles. Avant chaque calcul, nomme la droite de projection, la direction et l'énoncé que tu emploies. Ces réflexes te serviront dans le chapitre « La droite dans le plan ».

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La projection dans le plan » (tc · sciences · mathematiques)