BURHAN

Résumé : Le produit scalaire

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/resume

Chapitre	Semestre
Le produit scalaire	Semestre 2

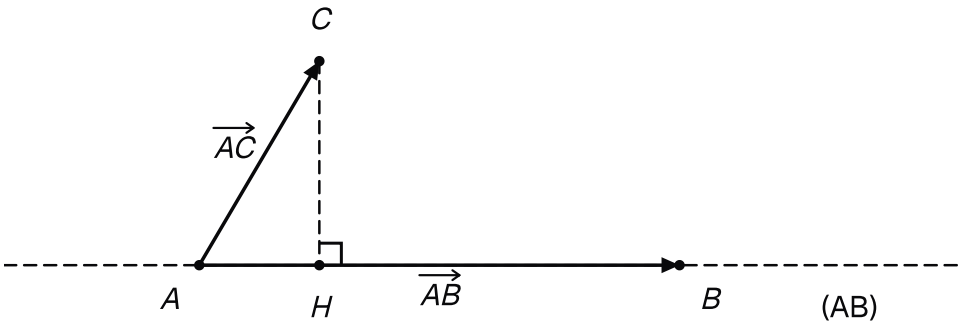
Le produit scalaire par la projection

À retenir : L'idée : une ombre portée sur une droite

Éclaire le vecteur $\overrightarrow{AC}$ perpendiculairement à la droite (AB) : son ombre sur cette droite est le segment $[AH]$.

Le produit scalaire multiplie la longueur AB par la longueur de cette ombre. Son signe indique si l'ombre part dans le sens de $\overrightarrow{AB}$ ou à l'opposé.

Rappel : H est le projeté orthogonal de C sur (AB), vu dans le chapitre sur la projection.



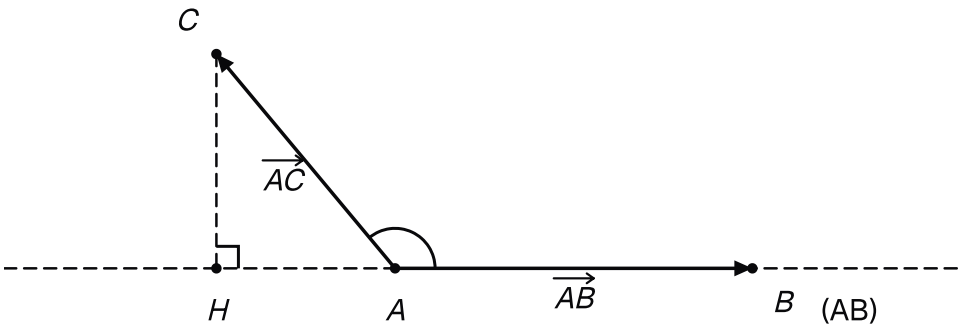
Éclairé perpendiculairement à (AB), le vecteur AC laisse sur cette droite une ombre, le segment [AH].

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, défini par :
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ;
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires ;
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $H = A$.

On admet que ce réel ne dépend pas du choix du point A.



Le cas des sens contraires : H, projeté de C sur (AB), tombe du côté opposé à B, et le produit vaut moins AB fois AH.

Méthode : calculer par projection

1. **Ramène** les deux vecteurs à une origine commune A : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Construis** H, pied de la perpendiculaire à (AB) menée par C.
3. **Situe** H : $\overrightarrow{AH}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$, le sens contraire, ou bien $H = A$.
4. **Écris** le résultat dans chacun de ces trois cas : $AB \times AH$, puis $-AB \times AH$, puis 0.

Exemple

Énoncé. On donne $AB = 5$. Le projeté orthogonal H de C sur (AB) est sur le prolongement de $[AB]$ au-delà de A, avec $AH = 2$. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Sens. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Calcul. Par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -5 \times 2 = -10$.

Variante. Si H était sur $[AB)$, à 2 de A, on trouverait 10.

Attention : Le signe vient du sens

Dans l'exemple ci-dessus, répondre 10 serait faux : H est du côté opposé à B.

Avant de multiplier, place H sur ta figure et compare les sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$. Avec un angle obtus, le cosinus est négatif, et le produit scalaire aussi.

Attention : Un réel, jamais un vecteur

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre réel. Une écriture comme $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'a donc aucun sens.

En revanche, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, le vecteur $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$ est tout simplement $3\,\vec{w}$.

Par l'angle ; carré scalaire et distance

Propriété : Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit A, B, C trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors :

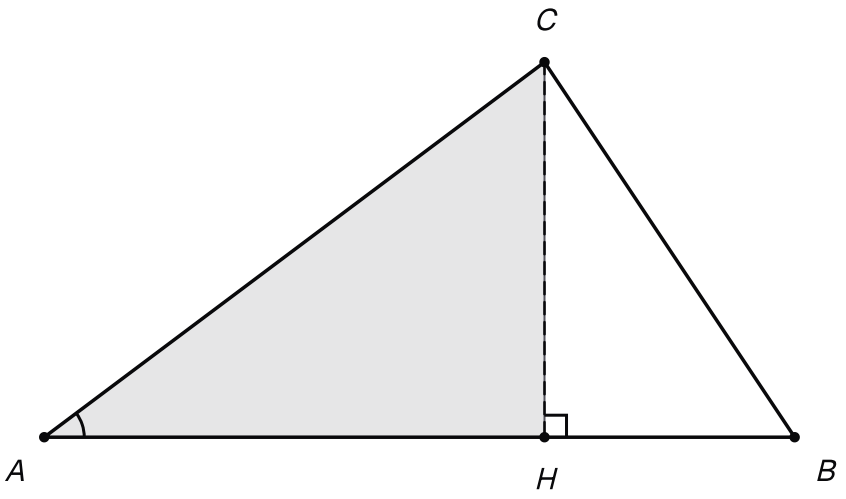
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).\end{aligned}$$

On note $\|\vec{u}\|$ la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$: c'est la longueur AB pour tout représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$.

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta,$$

où θ, compris entre 0 et π, est une mesure en radians de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Lecture de l'expression trigonométrique : dans le triangle AHC teinté, rectangle en H, la longueur AH est AC multiplié par le cosinus de l'angle BAC.

Propriété : Symétrie et carré scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce réel s'appelle le **carré scalaire** de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$.

En particulier, pour deux points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$: le produit scalaire permet d'exprimer les distances.

Méthode : calculer avec un angle

1. **Vérifie** que les deux vecteurs partent du même point A.
2. **Note** AB, AC et la mesure de $\widehat{BAC}$ en radians, entre 0 et π.
3. **Multiplie** $AB \times AC$ par le cosinus de cet angle. Pour un angle obtus, sers-toi de $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Exemple

Énoncé. On donne $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{6}$. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Cosinus. $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul. D'après l'expression trigonométrique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 4 \times 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -6\sqrt{3}.\end{aligned}$$

L'angle est obtus : le résultat est négatif.

À retenir : Le carré scalaire mesure les distances

Pour un vecteur $\vec{u}$ de norme 7, le carré scalaire vaut $\vec{u}^2 = 49$.

Dans l'autre sens, une distance est la racine carrée d'un carré scalaire :

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}.$$

Cet outil transforme un calcul sur des vecteurs en calcul de longueurs.

Règles de calcul et identités remarquables

Propriété : Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel k :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) \\ &= k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).\end{aligned}$$

Remarque : Des règles admises

Ces règles sont admises : tu t'en sers pour développer, sans avoir à les justifier.

Propriété : Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

En particulier :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\Big).$$

Méthode : calculer avec les trois longueurs

1. **Assure-toi** de connaître les trois côtés AB, AC et BC.
2. **Applique** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$. Cette formule vient de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et des identités remarquables.
3. **Interprète** le signe : négatif pour un angle $\widehat{BAC}$ obtus, nul pour un angle droit.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle ABC, $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Calcul. D'après les identités remarquables :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\,(9 + 16 - 36)\\ &= -\frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Lecture. Le résultat est négatif : l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Attention : Garder le double produit

Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}\perp\vec{v}$, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 9 + 0 + 16 = 25$, d'où $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

✗ Sans orthogonalité, écrire $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 9 + 16$.

✓ Le double produit reste : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 9 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 16$.

De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ne vaut $AB\times AC$ que pour deux vecteurs de même direction et de même sens.

Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si $\vec{u} = \vec{0}$, ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur. Pour deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines quelconques, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ signifie que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété : Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Méthode : prouver une orthogonalité

1. **Écris** chaque vecteur, grâce à la relation de Chasles, avec des vecteurs dont tu connais les produits scalaires.
2. **Développe** le produit avec les règles de calcul.
3. **Évalue** chaque terme : carré scalaire, angle, projection, ou orthogonalité déjà connue.
4. **Conclus** avec la caractérisation de l'orthogonalité dès que le total est nul.

Exemple

Énoncé. On sait que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Développement. D'après les règles de calcul, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2 = 1 - 1 = 0$.

Conclusion. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Attention : Un produit nul sans vecteur nul

Dans l'exemple précédent, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ alors qu'aucun des deux vecteurs n'est nul : ils sont orthogonaux.

De même, d'une égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, tu ne peux pas tirer $\vec{v} = \vec{w}$. Tu obtiens seulement $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$.

Relations métriques dans le triangle rectangle

À retenir : Rappel : le théorème de Pythagore

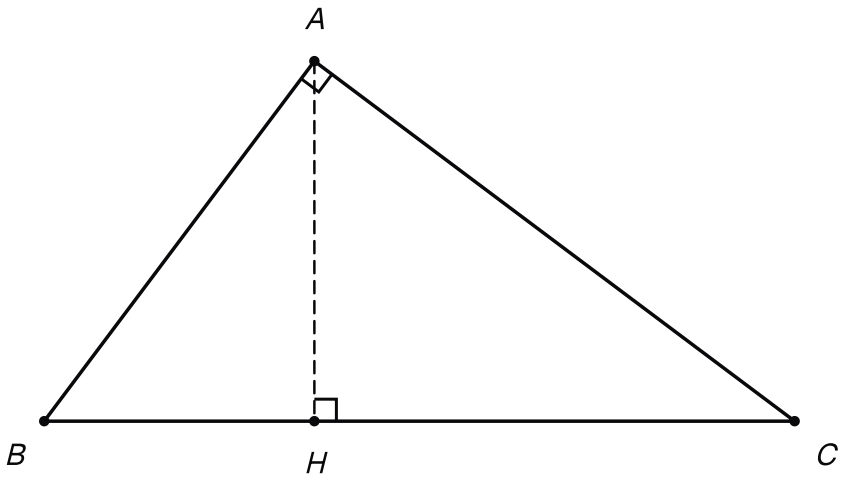
Rappel du collège : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.

> Les relations métriques le complètent. Elles font intervenir la hauteur issue de l'angle droit et les deux segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse.

Propriété : Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Alors H appartient au segment $[BC]$, et :

- $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$;
- $AH^2 = HB \times HC$;
- $AH \times BC = AB \times AC$.



Triangle rectangle en A et hauteur [AH] : les morceaux [BH] et [HC] de l'hypoténuse entrent dans les relations métriques.

Méthode : calculer dans un triangle rectangle

1. **Identifie** le sommet de l'angle droit, ici A, et H, pied de la hauteur issue de A.
2. **Cherche** la relation qui relie la longueur inconnue à deux longueurs connues.
3. **Calcule**, puis **vérifie** le résultat par le théorème de Pythagore.

Exemple

Énoncé. ABC est rectangle en A ; la hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H, avec $BH = 4$ et $HC = 9$. Calcule AH, AB et AC.

Hauteur. $AH^2 = HB \times HC = 36$, donc $AH = 6$.

Côtés. $BC = 13$, donc $AB^2 = BH \times BC = 52$ et $AB = 2\sqrt{13}$; puis $AC^2 = CH \times CB = 117$ et $AC = 3\sqrt{13}$.

Contrôle. $52 + 117 = 169 = BC^2$, et $AH \times BC = 78 = AB \times AC$.

Théorème de la médiane et théorème d'Al Kashi

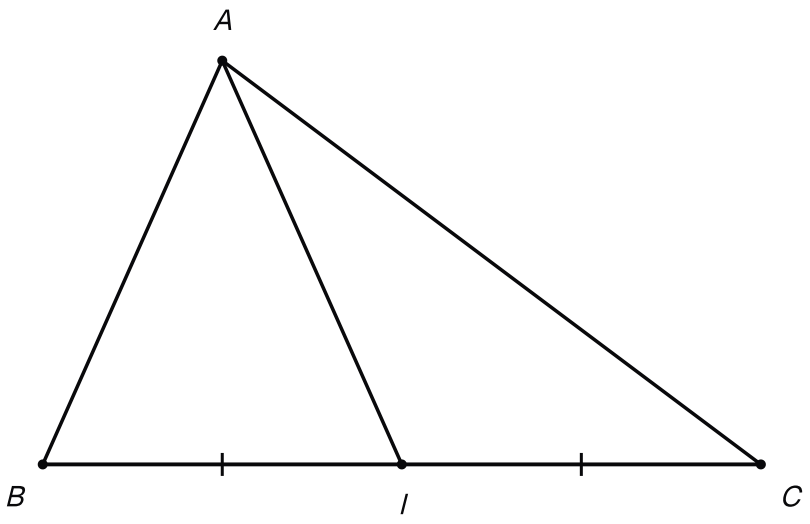
Théorème : Théorème de la médiane

Soit B et C deux points distincts, I le milieu du segment $[BC]$ et A un point du plan. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}.$$



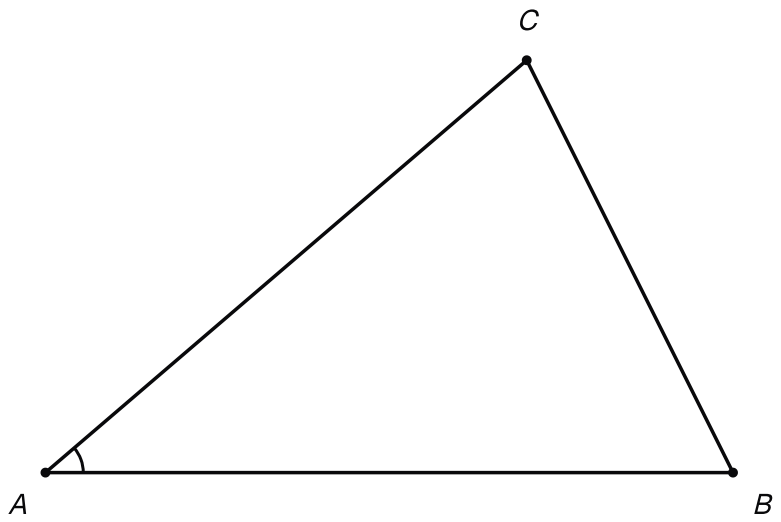
Le triangle ABC, le milieu I de [BC] repéré par deux moitiés égales, et la médiane [AI] du théorème.

Théorème : Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle. Alors :

$$\begin{aligned} BC^2 \\ &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right). \end{aligned}$$

Lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, on retrouve le théorème de Pythagore.



Dans le triangle ABC, le côté [BC] fait face à l'angle en A, encadré par les côtés [AB] et [AC].

Méthode : choisir l'outil dans un triangle quelconque

1. **Deux côtés et l'angle qu'ils encadrent** : le théorème d'Al Kashi donne le côté opposé.
2. **Les trois côtés** : isole $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \times AC}$, puis lis l'angle si la valeur est remarquable.
3. **Une médiane cherchée** : le théorème de la médiane donne AI, où I est le milieu de $[BC]$.
4. **Une aire** : projette un sommet sur le côté opposé pour obtenir une hauteur, calcule-la par le théorème de Pythagore, puis prends la moitié de la base fois la hauteur.

Exemple

Énoncé. On donne $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. Calcule BC.

Calcul. D'après le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 4 + 25 \\ &\quad - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 19. \end{aligned}$$

Conclusion. Une longueur est positive, donc $BC = \sqrt{19}$.

Exemple

Énoncé. Un triangle EFG a pour côtés $EF = 2$, $EG = 3$ et $FG = \sqrt{19}$. Mesure l'angle $\widehat{FEG}$.

Cosinus. D'après le théorème d'Al Kashi, $\cos\left(\widehat{FEG}\right) = \dfrac{4+9-19}{2\times 2\times 3} = -\dfrac{1}{2}$.

Angle. $\widehat{FEG} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle ABC, $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 8$; I est le milieu de $[BC]$. Calcule AI, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Médiane. D'après le théorème de la médiane, $36 + 16 = 2\,AI^2 + \dfrac{64}{2}$, donc $AI^2 = 10$ et $AI = \sqrt{10}$.

Produit scalaire. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4} = 10 - 16 = -6$.

Attention : Le bon angle dans Al Kashi

Pour calculer BC, l'angle à employer est $\widehat{BAC}$, encadré par les côtés $[AB]$ et $[AC]$, face à $[BC]$.

Prendre l'angle en B ou en C mélangerait les données. Écris d'abord le côté cherché, puis les deux côtés qui encadrent l'angle.

Attention : La médiane : un demi-carré

Dans l'exemple de la médiane, oublier la division par 2 donnerait $52 = 2\,AI^2 + 64$, soit $AI^2 = -6$: impossible pour un carré.

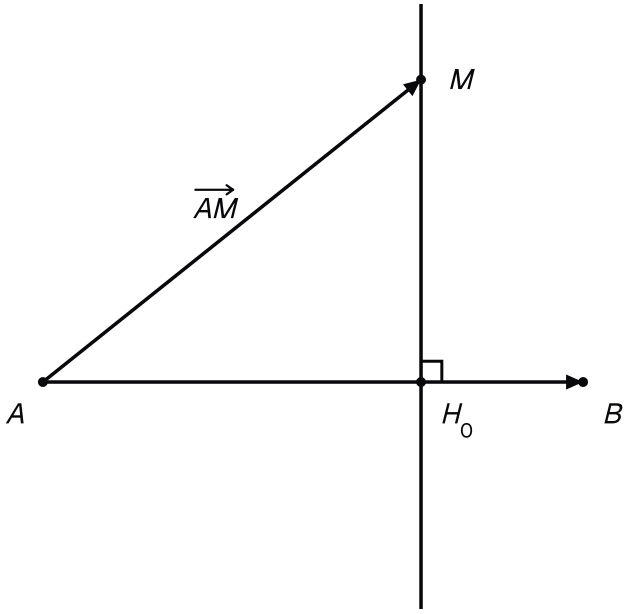
Le terme correct est $\dfrac{BC^2}{2}$, et I est le milieu du côté opposé au sommet A.

Deux ensembles de points

Propriété : Ensemble des points M tels que le produit scalaire de AB et AM vaut k

Soit A et B deux points distincts et k un réel. On note H_0 le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2}\,\overrightarrow{AB}$.

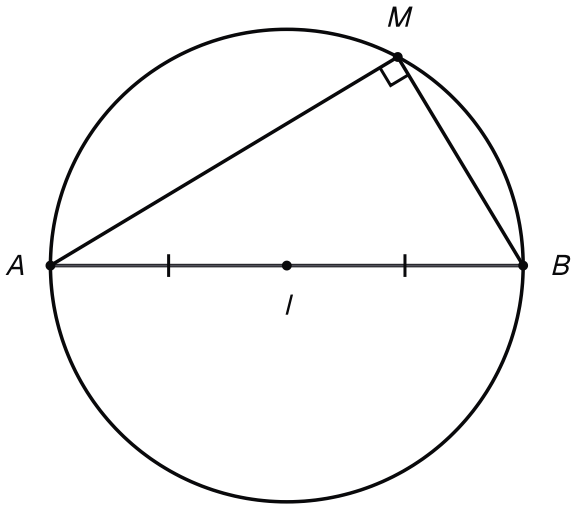
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = k$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H_0.



Le point H0 de la droite (AB) et la perpendiculaire à (AB) qui passe par lui : tous ses points M donnent le même produit avec AB.

Propriété : Cercle de diamètre [AB] et produit scalaire

Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Un point M du cercle de diamètre [AB] : l'angle AMB est droit, et le produit scalaire de MA et MB est nul.

Méthode : déterminer un ensemble de points

1. **Identifie** la forme de la condition : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, ou $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

2. **Première forme** : calcule $\frac{k}{AB^2}$, place H_0 sur (AB), puis trace la perpendiculaire à (AB) en H_0.
3. **Seconde forme** : trace le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon $\frac{AB}{2}$.
4. **Rédige** la réponse : nature de l'ensemble et éléments qui le déterminent.

Exemple

Énoncé. On donne $AB = 4$. Décris l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -4$.

Point. $\overrightarrow{AH_0} = \frac{-4}{16}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: H_0 est à 1 de A, du côté opposé à B.

Ensemble. C'est la perpendiculaire à (AB) passant par H_0.

Contrôle. Pour M sur cette droite, le projeté de M sur (AB) est H_0 ; par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -4 \times 1 = -4$.

Remarque **: Le cas k = 0**

Avec $k = 0$, le point H_0 est A lui-même : l'ensemble est la perpendiculaire à (AB) en A.

Pour k positif, la droite coupe (AB) du côté de B ; pour k négatif, du côté opposé.

Quelle méthode pour quelles données ?

Méthode **: Quelle méthode pour quelles données ?**

- **Un projeté orthogonal facile à placer** : la projection, avec le sens.
- **Deux longueurs et l'angle entre elles** : l'expression trigonométrique.
- **Les trois côtés d'un triangle** : la formule des longueurs.
- **Une somme de vecteurs** : la relation de Chasles, puis les règles de calcul.
- **Une orthogonalité à prouver** : un produit scalaire nul.
- **Un triangle rectangle et sa hauteur** : les relations métriques.
- **Un côté ou un angle d'un triangle quelconque** : le théorème d'Al Kashi.
- **Une médiane** : le théorème de la médiane.
- **Une aire** : une hauteur obtenue par un projeté orthogonal, puis le théorème de Pythagore.
- **Un ensemble de points** : la perpendiculaire en H_0, ou le cercle de diamètre $[AB]$.

Par projection, sens identiques

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

Par projection, sens contraires

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

Par l'angle

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Par les longueurs

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Carré scalaire

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

Carré d'une somme

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Triangle rectangle en A, hauteur issue de A

$$AH^2 = HB \times HC$$

Al Kashi

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Médiane, I milieu de [BC]

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Médiane et produit scalaire, I milieu de [BC]

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Point H0 de la droite (AB)

$$\overrightarrow{AH_0} = \frac{k}{AB^2}\overrightarrow{AB}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Annonce la méthode à chaque calcul : « par projection », « d'après l'expression trigonométrique », « d'après le théorème d'Al Kashi ».

Pour une projection, écris toujours le sens de $\overrightarrow{AB}$ et celui de $\overrightarrow{AH}$. Trace la figure sur ton cahier.

Termine par une phrase qui répond à la question posée.