BURHAN

Le produit scalaire : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

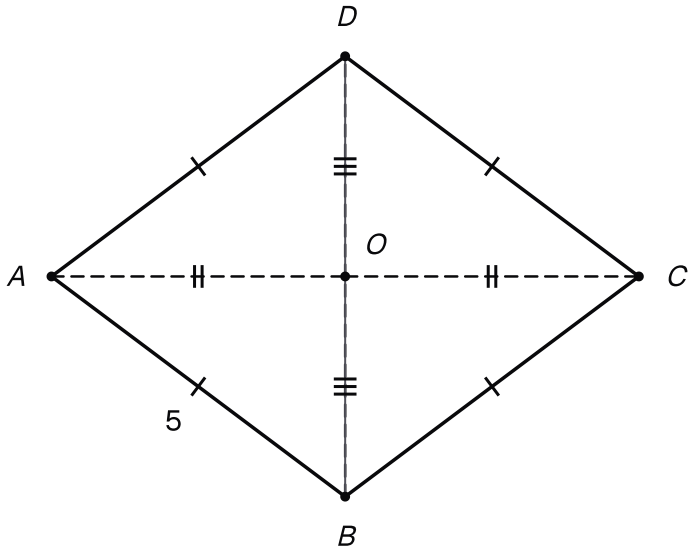
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le produit scalaire dans un losange

$ABCD$ est un losange de côté 5 ; ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O, et $BD = 6$. Fais la figure sur ton cahier.



Le losange ABCD de côté 5 et ses diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en leur milieu O, avec BD = 6.

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ à l'aide des longueurs du triangle ABD. En déduire $\cos\left(\widehat{BAD}\right)$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs. **Ensuite :** l'expression trigonométrique, avec $AB = AD = 5$.

2. 1,25 pts

Exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, puis la position des droites (AC) et (BD).

INDICE

Début : un losange est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** reconnais une somme multipliée par une différence.

3. 1 pts

Dans le triangle ABD, le segment $[AO]$ est la médiane issue de A. Calculer AO à l'aide du théorème de la médiane. En déduire AC.

INDICE

Outil : $AB^2 + AD^2 = 2\,AO^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.

4. 1 pts

Déterminer le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, puis $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

INDICE

Début : utilise la question 2. **Point délicat :** compare les sens de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AO}$.

5. 0,75 pts

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = 32$. Placer le point H_0 associé, puis en déduire que $\mathcal{E}$ est la droite (BD).

INDICE

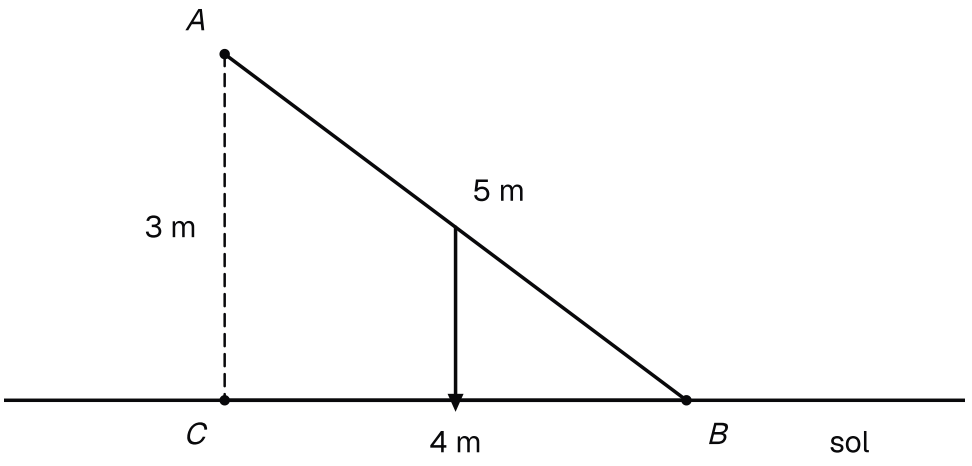
Outil : $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AC^2}\,\overrightarrow{AC}$. **Ensuite :** la question 2.

Exercice 2 5 pts

Le travail du poids sur une rampe

Un objet glisse sur une rampe rectiligne, du point A au point B. Le point C est au sol, à la verticale de A, et le sol (BC) est horizontal. On donne $AB = 5$ m, $AC = 3$ m et $BC = 4$ m.

Le poids de l'objet est représenté par un vecteur $\vec{P}$ vertical, dirigé vers le bas, de norme 50 N. Rappel de physique : le travail d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement de A à B est $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules.



La rampe [AB] de 5 m, le point C au sol sous A, avec AC = 3 m et BC = 4 m, et la flèche verticale du poids.

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ à l'aide des longueurs. Que retrouve-t-on sur l'angle en C ?

INDICE

Outil : la formule des longueurs au sommet C ; le côté opposé à C est $[AB]$.

2. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ par projection. En déduire $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$.

INDICE

Début : d'après la question 1, où se projette B sur la droite (AC) ? **Ensuite :** compare les sens.

3. 1 pts

Justifier que $\vec{P} = \dfrac{50}{3}\overrightarrow{AC}$. En déduire le travail du poids lors de la descente de A à B.

INDICE

Début : $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont verticaux, dirigés vers le bas ; compare leurs normes. **Ensuite :** les règles de calcul.

4. 1 pts

L'objet est ensuite remonté de B à A. Calculer le travail du poids sur ce trajet et expliquer son signe.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, puis les règles de calcul.

5. 1 pts

Pendant la descente de A à B, une force de frottement $\vec{f}$ s'exerce aussi. Elle a la direction de (AB), le sens de B vers A, et une norme de 8 N. Calculer son travail, puis le travail total du poids et du frottement.

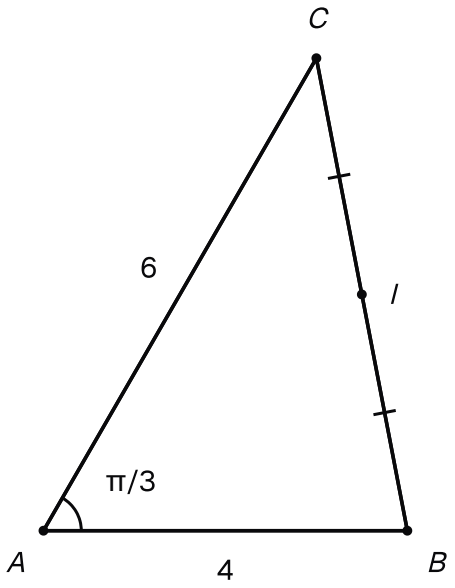
INDICE

Début : écris $\vec{f}$ comme un multiple de $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** le carré scalaire.

Exercice 3 — 5 pts

Un triangle étudié de bout en bout

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. On note I le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC avec AB = 4, AC = 6 et un angle de π/3 en A, et le milieu I de [BC] ; le projeté H n'est pas tracé.

1. — 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire BC à l'aide du théorème d'Al Kashi.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique. **Ensuite :** dans Al Kashi, le terme $2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ vaut le double du produit trouvé.

2. — 1 pts

Calculer la longueur AI. Contrôler ensuite le résultat de la question 1 avec l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane, première égalité. **Point délicat :** $BC^2 = 28$, divisé par 2 puis par 4.

3. — 1 pts

Justifier que H est sur la demi-droite $[AB)$, distinct de A. En déduire AH.

INDICE

Outil : la définition par projection et le signe du produit de la question 1.

4. 1 pts

Calculer la hauteur CH, puis l'aire du triangle ABC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H.

5. 1 pts

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$. Placer le point H_0 associé, puis en déduire que $\mathcal{F}$ est la droite (CH).

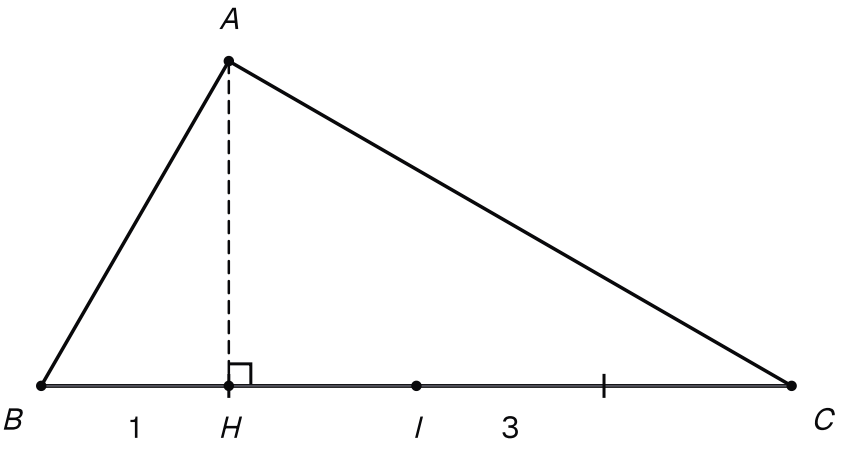
INDICE

Outil : $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2}\,\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** compare H_0 et H.

Exercice 4 — 5 pts

Une hauteur qui cache un angle droit

ABC est un triangle. Le point H du segment $[BC]$ vérifie $BH = 1$, $HC = 3$, $AH = \sqrt{3}$ et $(AH) \perp (BC)$. On note I le milieu de $[BC]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC et le point H de [BC] tel que BH = 1, HC = 3 et (AH) perpendiculaire à (BC), avec le milieu I de [BC].

1. — 1 pts

Calculer $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ par projection. Que valent $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH}$?

INDICE

Début : B, H, C sont alignés et H est entre B et C : compare les sens de $\overrightarrow{HB}$ et de $\overrightarrow{HC}$. **Ensuite :** la caractérisation de l'orthogonalité.

2. — 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis la nature du triangle ABC.

INDICE

Début : la relation de Chasles, en passant par H. **Ensuite :** développe avec les règles de calcul, puis utilise la question 1 et $\overrightarrow{AH}^2 = AH^2$.

3. — 1 pts

Dans le triangle ABC rectangle en A, calculer AB et AC à l'aide des relations métriques. Contrôler les résultats par le théorème de Pythagore dans les triangles ABH et AHC, rectangles en H.

INDICE

Outil : H est le pied de la hauteur issue de A ; $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$, avec $BC = BH + HC$. **Ensuite :** $(AH) \perp (BC)$, donc les triangles ABH et AHC sont rectangles en H.

4. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ par projection. En déduire $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$, puis la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

INDICE

Début : par symétrie, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$; projette A sur la droite (BC). **Ensuite :** l'expression trigonométrique, avec la question 3.

5. 1 pts

Calculer AI à l'aide du théorème de la médiane. En déduire que le point A est sur le cercle de diamètre $[BC]$, puis retrouver ce résultat à l'aide de la question 2.

INDICE

Outil : $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$. **Ensuite :** le cercle de diamètre $[BC]$ a pour centre I et pour rayon $\dfrac{BC}{2}$.

Exercice 5 5 pts

Un réel qui rend deux vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. On place un point A, puis les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et on note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Fais la figure sur ton cahier.

1. 1 pts

Calculer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique, avec $AB = 2$ et $AC = \sqrt{2}$. **Point délicat :** le cosinus est négatif ; sers-toi de $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

2. 1 pts

Justifier que H est distinct de A et que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires. En déduire AH.

INDICE

Outil : la définition par projection et le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3. 1 pts

Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u} + k\,\vec{v}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

INDICE

Début : développe $\vec{u} \cdot (\vec{u} + k\,\vec{v})$ avec les règles de calcul. **Ensuite :** la caractérisation de l'orthogonalité donne une équation d'inconnue k.

4. 1 pts

On place le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + 2\,\vec{v}$. Calculer AD. En déduire la position des droites (AD) et (AB).

INDICE

Outil : $AD^2 = \overrightarrow{AD}^2$ et l'identité remarquable $(\vec{u} + \vec{w})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{w}^2$, avec $\vec{w} = 2\,\vec{v}$. **Ensuite :** la question 3.

5. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En déduire BD, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ et la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

INDICE

Début : la relation de Chasles, en passant par A, avec $\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$. **Ensuite :** les règles de calcul, puis l'expression trigonométrique.