BURHAN

Le produit scalaire : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

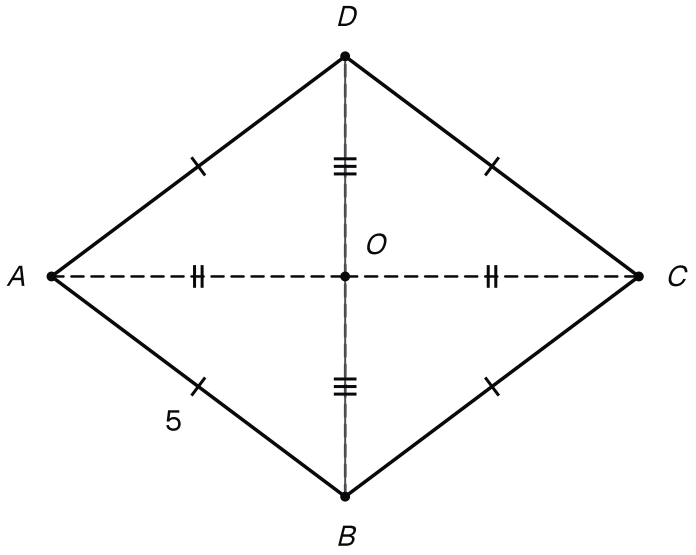
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le produit scalaire dans un losange

$ABCD$ est un losange de côté 5 ; ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O, et $BD = 6$. Fais la figure sur ton cahier.



Le losange ABCD de côté 5 et ses diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en leur milieu O, avec BD = 6.

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ à l'aide des longueurs du triangle ABD. En déduire $\cos\left(\widehat{BAD}\right)$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs. **Ensuite :** l'expression trigonométrique, avec $AB = AD = 5$.

CORRIGÉ

Produit. Dans le triangle ABD, $AB = AD = 5$ et $BD = 6$. D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(25 + 25 - 36\right) = 7.\end{aligned}$$

Cosinus. D'après l'expression trigonométrique, $7 = 5 \times 5 \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{7}{25}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 7$ et $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{7}{25}$.

2. 1,25 pts

Exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, puis la position des droites (AC) et (BD).

INDICE

Début : un losange est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** reconnais une somme multipliée par une différence.

CORRIGÉ

Décomposition. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Le losange $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. De même, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

Produit. D'après les identités remarquables, puis $AB=AD=5$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\\&=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\\&\quad\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=AD^2-AB^2\\&=25-25=0.\end{aligned}$$

Droites. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas nuls : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Conclusion. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ et $(AC)\perp(BD)$.

3. 1 pts

Dans le triangle ABD, le segment $[AO]$ est la médiane issue de A. Calculer AO à l'aide du théorème de la médiane. En déduire AC.

INDICE

Outil : $AB^2+AD^2=2\,AO^2+\dfrac{BD^2}{2}$.

CORRIGÉ

Médiane. Le point O est le milieu de $[BD]$. D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABD :

$$AB^2+AD^2=2\,AO^2+\frac{BD^2}{2}.$$

Numériquement, $25+25=2\,AO^2+\dfrac{36}{2}$, soit $50=2\,AO^2+18$. Donc $2\,AO^2=32$, puis $AO^2=16$ et $AO=4$.

Diagonale. Le point O est aussi le milieu de $[AC]$, donc $AC=2\times AO=8$.

Conclusion. $AO=4$ et $AC=8$.

4. 1 pts

Déterminer le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). En déduire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$, puis $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

INDICE

Début : utilise la question 2. **Point délicat :** compare les sens de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AO}$.

CORRIGÉ

Projeté. D'après la question 2, $(BD)\perp(AC)$, et ces droites se coupent en O : le projeté orthogonal de B sur (AC) est O. Le point O est sur $[AC]$, distinct de A : les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ ont le même sens.

Produit. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} &= AC\times AO\\ &= 8\times 4 = 32.\end{aligned}$$

Cosinus. D'après l'expression trigonométrique, $32 = 8\times 5\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{32}{40}=\dfrac{4}{5}$.

Conclusion. Le projeté orthogonal de B sur (AC) est O, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=32$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{4}{5}$.

5. 0,75 pts

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=32$. Placer le point H_0 associé, puis en déduire que $\mathcal{E}$ est la droite (BD).

INDICE

Outil : $\overrightarrow{AH_0}=\dfrac{k}{AC^2}\,\overrightarrow{AC}$. **Ensuite :** la question 2.

CORRIGÉ

Point H_0. Ici $k=32$ et $AC^2=64$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_0} &= \frac{32}{64}\,\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Le point H_0 est donc le milieu de $[AC]$, c'est-à-dire O.

Ensemble. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}=k$, $\mathcal{E}$ est la perpendiculaire à (AC) passant par O. D'après la question 2, la droite (BD) passe par O et elle est perpendiculaire à (AC).

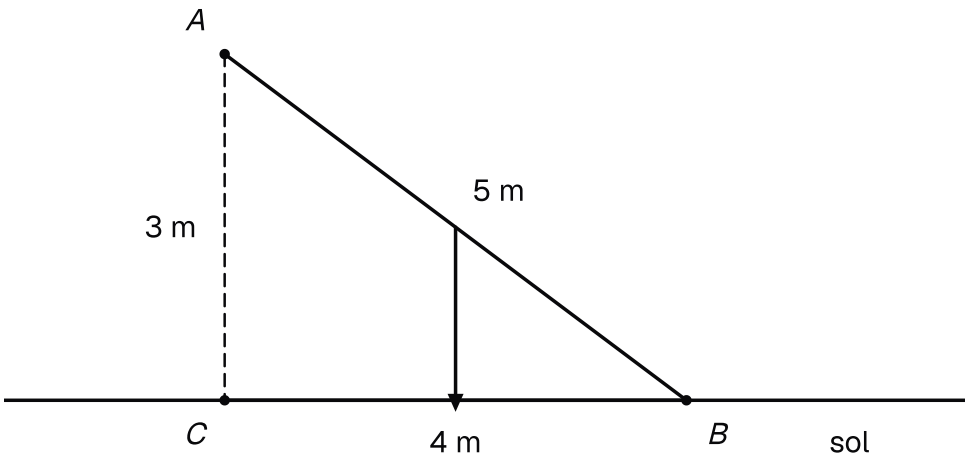
Conclusion. $H_0=O$, et $\mathcal{E}$ est la droite (BD).

Exercice 2 5 pts

Le travail du poids sur une rampe

Un objet glisse sur une rampe rectiligne, du point A au point B. Le point C est au sol, à la verticale de A, et le sol (BC) est horizontal. On donne $AB = 5$ m, $AC = 3$ m et $BC = 4$ m.

Le poids de l'objet est représenté par un vecteur $\vec{P}$ vertical, dirigé vers le bas, de norme 50 N. Rappel de physique : le travail d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement de A à B est $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules.



La rampe [AB] de 5 m, le point C au sol sous A, avec AC = 3 m et BC = 4 m, et la flèche verticale du poids.

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ à l'aide des longueurs. Que retrouve-t-on sur l'angle en C ?

INDICE

Outil : la formule des longueurs au sommet C ; le côté opposé à C est $[AB]$.

CORRIGÉ

Produit. Au sommet C, le côté opposé est $[AB]$. D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(9 + 16 - 25\right) = 0.\end{aligned}$$

Angle en C. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas nuls : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(CA) \perp (CB)$.

Conclusion. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$: on retrouve par le calcul l'angle droit en C que donnaient la verticale (AC) et le sol horizontal (BC). Le triangle ABC est rectangle en C.

2. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ par projection. En déduire $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$.

INDICE

Début : d'après la question 1, où se projette B sur la droite (AC) ? **Ensuite :** compare les sens.

CORRIGÉ

Projection. D'après la question 1, $(BC) \perp (AC)$: le projeté orthogonal de B sur (AC) est C. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a le même sens que lui-même, donc, par projection :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AC = 9.$$

Cosinus. D'après l'expression trigonométrique, $9 = 3 \times 5 \times \cos\left(\widehat{CAB}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{CAB}\right) = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 9$ et $\cos\left(\widehat{CAB}\right) = \dfrac{3}{5}$.

3. 1 pts

Justifier que $\vec{P} = \dfrac{50}{3}\overrightarrow{AC}$. En déduire le travail du poids lors de la descente de A à B.

INDICE

Début : $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont verticaux, dirigés vers le bas ; compare leurs normes. **Ensuite :** les règles de calcul.

CORRIGÉ

Poids. Les vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont verticaux et dirigés vers le bas : ils ont la même direction et le même sens. Leurs normes valent 50 et $AC = 3$, donc $\vec{P} = \dfrac{50}{3}\overrightarrow{AC}$.

Travail. D'après les règles de calcul et la question 2 :

$$\begin{aligned}\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{50}{3} \times \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{50}{3} \times 9 = 150.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{P} = \dfrac{50}{3}\overrightarrow{AC}$, et le travail du poids lors de la descente de A à B vaut 150 J.

4. 1 pts

L'objet est ensuite remonté de B à A. Calculer le travail du poids sur ce trajet et expliquer son signe.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, puis les règles de calcul.

CORRIGÉ

Travail. Le déplacement de B à A est représenté par $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. D'après les règles de calcul et la question 3 :

$$\begin{aligned}\vec{P} \cdot \overrightarrow{BA} &= \vec{P} \cdot \left(-\overrightarrow{AB}\right) \\ &= -\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -150.\end{aligned}$$

Signe. L'objet monte alors que le poids est dirigé vers le bas : le poids s'oppose au déplacement, et son travail est négatif.

Conclusion. Le travail du poids de B à A vaut -150 J ; il est négatif parce que le poids freine la montée.

5. 1 pts

Pendant la descente de A à B, une force de frottement $\vec{f}$ s'exerce aussi. Elle a la direction de (AB), le sens de B vers A, et une norme de 8 N. Calculer son travail, puis le travail total du poids et du frottement.

INDICE

Début : écris $\vec{f}$ comme un multiple de $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** le carré scalaire.

CORRIGÉ

Expression de $\vec{f}$. La force $\vec{f}$ a la direction de (AB) et le sens de B vers A : elle est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$. Sa norme vaut 8 et $AB = 5$, donc $\vec{f} = -\dfrac{8}{5}\,\overrightarrow{AB}$.

Travail du frottement. D'après les règles de calcul et le carré scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\frac{8}{5} \times AB^2 \\ &= -\frac{8}{5} \times 25 = -40.\end{aligned}$$

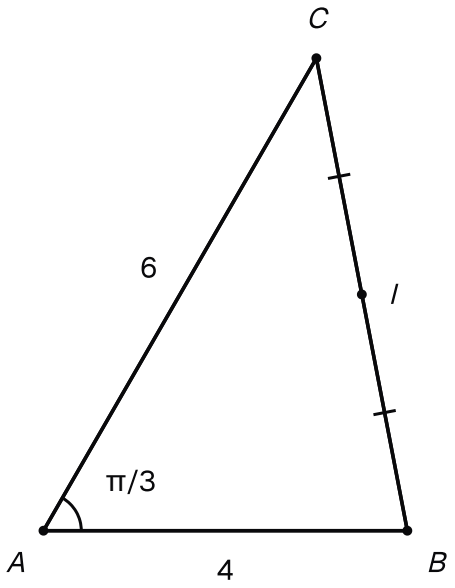
Total. D'après les règles de calcul, $\left(\vec{P} + \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$: le travail total est la somme $150 + (-40) = 110$ J.

Conclusion. Le travail du frottement vaut -40 J, et le travail total du poids et du frottement vaut 110 J.

Exercice 3 — 5 pts

Un triangle étudié de bout en bout

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. On note I le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC avec AB = 4, AC = 6 et un angle de π/3 en A, et le milieu I de [BC] ; le projeté H n'est pas tracé.

1. — 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire BC à l'aide du théorème d'Al Kashi.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique. **Ensuite :** dans Al Kashi, le terme $2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ vaut le double du produit trouvé.

CORRIGÉ

Produit. D'après l'expression trigonométrique, avec $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12.\end{aligned}$$

Côté. Dans le théorème d'Al Kashi, le terme $2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ vaut $2 \times 12 = 24$. D'après ce théorème :

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times 12\\ &= 16 + 36 - 24 = 28.\end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$, car $28 = 4 \times 7$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$ et $BC = 2\sqrt{7}$.

2. 1 pts

Calculer la longueur AI. Contrôler ensuite le résultat de la question 1 avec l'égalité $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AI^2-\dfrac{BC^2}{4}$.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane, première égalité. **Point délicat :** $BC^2=28$, divisé par 2 puis par 4.

CORRIGÉ

Médiane. Le point I est le milieu de $[BC]$. D'après le théorème de la médiane, $AB^2+AC^2=2\,AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$, soit $16+36=2\,AI^2+\dfrac{28}{2}$, ou encore $52=2\,AI^2+14$. Donc $2\,AI^2=38$, puis $AI^2=19$ et $AI=\sqrt{19}$.

Contrôle. On calcule le membre de droite de l'égalité proposée :

$$\begin{aligned}AI^2-\frac{BC^2}{4}&=19-\frac{28}{4}\\&=19-7=12.\end{aligned}$$

Conclusion. $AI=\sqrt{19}$, et l'égalité redonne $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$, comme à la question 1.

3. 1 pts

Justifier que H est sur la demi-droite $[AB)$, distinct de A. En déduire AH.

INDICE

Outil : la définition par projection et le signe du produit de la question 1.

CORRIGÉ

Position. D'après la définition par projection, le produit serait nul si H était le point A, et négatif si $\overrightarrow{AH}$ était de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12>0$: donc $H\neq A$, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens. Le point H est sur la demi-droite $[AB)$.

Longueur. Par projection, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$, soit $12=4\times AH$. Donc $AH=\dfrac{12}{4}=3$.

Conclusion. H est sur $[AB)$, distinct de A, et $AH=3$.

4. 1 pts

Calculer la hauteur CH, puis l'aire du triangle ABC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H.

CORRIGÉ

Hauteur. Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, avec $AC = 6$ et $AH = 3$:

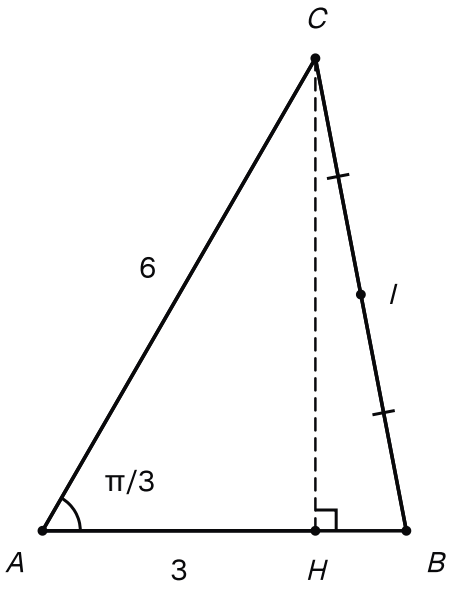
$$\begin{aligned} CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\ &= 36 - 9 = 27. \end{aligned}$$

Donc $CH = 3\sqrt{3}$, car $27 = 9 \times 3$.

Aire. Avec la base $[AB]$ et la hauteur $[CH]$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times AB \times CH \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $CH = 3\sqrt{3}$, et l'aire du triangle ABC vaut $6\sqrt{3}$.



La hauteur [CH] du corrigé : son pied H est sur [AB], à 3 de A, ce qui donne CH par le théorème de Pythagore, puis l'aire.

5. 1 pts

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=12$. Placer le point H_0 associé, puis en déduire que $\mathcal{F}$ est la droite (CH).

INDICE

Outil : $\overrightarrow{AH_0}=\dfrac{k}{AB^2}\,\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** compare H_0 et H.

CORRIGÉ

Point H_0. Ici $k=12$ et $AB^2=16$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_0}&=\frac{12}{16}\,\overrightarrow{AB}\\&=\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Le coefficient est compris entre 0 et 1 : H_0 est le point de $[AB]$ tel que $AH_0=\dfrac{3}{4}\times 4=3$. D'après la question 3, H est sur $[AB)$ et $AH=3$: donc $H_0=H$.

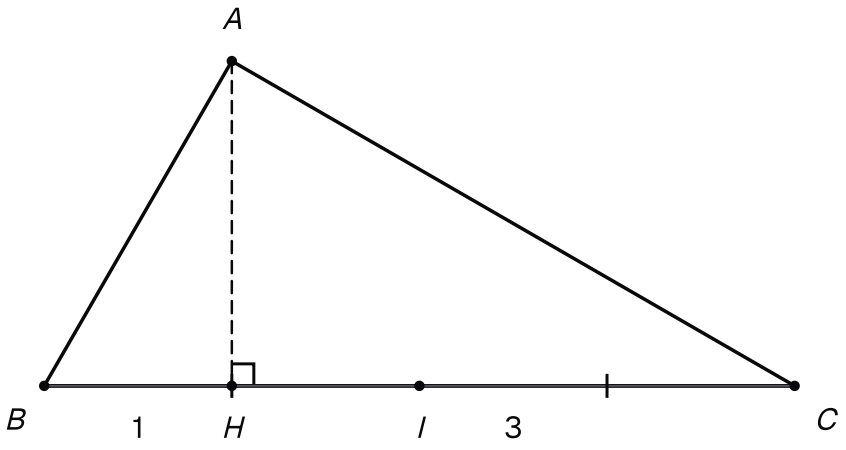
Ensemble. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$, $\mathcal{F}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par H. Or H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $C\neq H$, donc $(CH)\perp(AB)$.

Conclusion. Le point associé est $H_0=H$, et $\mathcal{F}$ est la droite (CH).

Exercice 4 5 pts

Une hauteur qui cache un angle droit

ABC est un triangle. Le point H du segment $[BC]$ vérifie $BH = 1$, $HC = 3$, $AH = \sqrt{3}$ et $(AH) \perp (BC)$. On note I le milieu de $[BC]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle ABC et le point H de [BC] tel que BH = 1, HC = 3 et (AH) perpendiculaire à (BC), avec le milieu I de [BC].

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ par projection. Que valent $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH}$?

INDICE

Début : B, H, C sont alignés et H est entre B et C : compare les sens de $\overrightarrow{HB}$ et de $\overrightarrow{HC}$. **Ensuite :** la caractérisation de l'orthogonalité.

CORRIGÉ

Projection. Les points B, H, C sont alignés : le projeté orthogonal de C sur la droite (HB) est C lui-même. Comme H est sur $[BC]$, entre B et C, les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont de sens contraires. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} &= -HB \times HC \\ &= -1 \times 3 = -3.\end{aligned}$$

Orthogonalité. Les vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HB}$ dirigent (BC), perpendiculaire à (AH). D'après la caractérisation de l'orthogonalité, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

Conclusion. $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -3$, et $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

2. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis la nature du triangle ABC.

INDICE

Début : la relation de Chasles, en passant par H. **Ensuite :** développe avec les règles de calcul, puis utilise la question 1 et $\overrightarrow{AH}^2 = AH^2$.

CORRIGÉ

Décomposition. D'après la relation de Chasles, en passant par H : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$.

Produit. D'après les règles de calcul, puis le carré scalaire $\overrightarrow{AH}^2 = AH^2 = 3$ et la question 1 :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&= AH^2 + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}\\&\quad + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\\&= 3 + 0 + 0 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Nature du triangle. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas nuls : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(AB)\perp(AC)$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$: le triangle ABC est rectangle en A.

3. 1 pts

Dans le triangle ABC rectangle en A, calculer AB et AC à l'aide des relations métriques. Contrôler les résultats par le théorème de Pythagore dans les triangles ABH et AHC, rectangles en H.

INDICE

Outil : H est le pied de la hauteur issue de A ; $BA^2 = BH\times BC$ et $CA^2 = CH\times CB$, avec $BC = BH + HC$. **Ensuite :** $(AH)\perp(BC)$, donc les triangles ABH et AHC sont rectangles en H.

CORRIGÉ

Côtés. Comme H est sur $[BC]$, $BC = BH + HC = 4$. Le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC rectangle en A. D'après les relations métriques :

$$\begin{aligned}AB^2 &= BH\times BC\\&= 1\times 4 = 4,\\AC^2 &= CH\times CB\\&= 3\times 4 = 12.\end{aligned}$$

Donc $AB = 2$ et $AC = 2\sqrt{3}$, car $12 = 4\times 3$.

Contrôle. Les triangles ABH et AHC sont rectangles en H. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BH^2 + AH^2 = 1 + 3 = 4$ et $AC^2 = HC^2 + AH^2 = 9 + 3 = 12$.

Conclusion. $AB = 2$ et $AC = 2\sqrt{3}$, confirmés par le théorème de Pythagore.

4. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ par projection. En déduire $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$, puis la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

INDICE

Début : par symétrie, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$; projette A sur la droite (BC). **Ensuite :** l'expression trigonométrique, avec la question 3.

CORRIGÉ

Projection. D'après la symétrie, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$. Le projeté orthogonal de A sur (BC) est H, qui est sur $[BC]$ et distinct de B : $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ont le même sens. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} &= BC \times BH \\ &= 4 \times 1 = 4.\end{aligned}$$

Angle. D'après l'expression trigonométrique et la question 3, $4 = 2 \times 4 \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. L'angle est compris entre 0 et π, et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$, $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$.

5. 1 pts

Calculer AI à l'aide du théorème de la médiane. En déduire que le point A est sur le cercle de diamètre $[BC]$, puis retrouver ce résultat à l'aide de la question 2.

INDICE

Outil : $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$. **Ensuite :** le cercle de diamètre $[BC]$ a pour centre I et pour rayon $\dfrac{BC}{2}$.

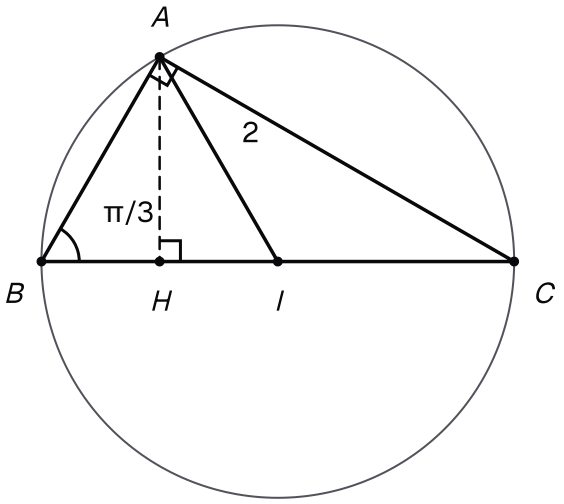
CORRIGÉ

Médiane. Le point I est le milieu de $[BC]$. D'après le théorème de la médiane, $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$, soit $4 + 12 = 2\,AI^2 + \dfrac{16}{2}$, ou encore $16 = 2\,AI^2 + 8$. Donc $AI^2 = 4$ et $AI = 2$.

Cercle. Le cercle de diamètre $[BC]$ a pour centre I et pour rayon $\dfrac{BC}{2} = 2$. Comme $AI = 2$, le point A est sur ce cercle.

Contrôle. D'après la propriété du cercle de diamètre $[BC]$, ses points M sont ceux qui vérifient $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$. Pour $M = A$, c'est l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ obtenue à la question 2.

Conclusion. $AI = 2$, et le point A est sur le cercle de diamètre $[BC]$, ce que confirme la question 2.



Le bilan du corrigé : A est à la distance 2 du milieu I, donc sur le cercle de diamètre [BC], et le triangle est rectangle en A, avec un angle de π/3 en B.

Exercice 5 — 5 pts

Un réel qui rend deux vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. On place un point A, puis les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et on note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Fais la figure sur ton cahier.

1. — 1 pts

Calculer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique, avec $AB = 2$ et $AC = \sqrt{2}$. **Point délicat :** le cosinus est négatif ; sers-toi de $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

CORRIGÉ

Cosinus. On a $AB = \|\vec{u}\| = 2$ et $AC = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$. D'après l'expression trigonométrique, $-2 = 2 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{BAC}\right) &= -\frac{2}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Angle. On sait que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que, pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. L'angle $\widehat{BAC}$ est compris entre 0 et π : il mesure donc $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Conclusion. $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$: c'est un angle obtus.

2. — 1 pts

Justifier que H est distinct de A et que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires. En déduire AH.

INDICE

Outil : la définition par projection et le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

CORRIGÉ

Position. D'après la définition par projection, le produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ serait nul si H était le point A. Il vaut -2, donc $H \neq A$. Il est négatif, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires : H est sur la droite (AB), du côté opposé à B par rapport à A.

Longueur. Par projection, avec des sens contraires, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$, soit $-2 = -2 \times AH$. Donc $AH = \dfrac{2}{2} = 1$.

Conclusion. $H \neq A$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires, et $AH = 1$.

3. 1 pts

Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u} + k\,\vec{v}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

INDICE

Début : développe $\vec{u} \cdot (\vec{u} + k\,\vec{v})$ avec les règles de calcul. **Ensuite :** la caractérisation de l'orthogonalité donne une équation d'inconnue k.

CORRIGÉ

Développement. Soit k un réel. D'après les règles de calcul et le carré scalaire, avec $\vec{u}^2 = 4$:

$$\begin{aligned} &\vec{u} \cdot (\vec{u} + k\,\vec{v}) \\ &= \vec{u}^2 + k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ &= 4 - 2k. \end{aligned}$$

Équation. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, les vecteurs $\vec{u} + k\,\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Conclusion. Le réel cherché est $k = 2$.

4. 1 pts

On place le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + 2\,\vec{v}$. Calculer AD. En déduire la position des droites (AD) et (AB).

INDICE

Outil : $AD^2 = \overrightarrow{AD}^2$ et l'identité remarquable $(\vec{u} + \vec{w})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{w}^2$, avec $\vec{w} = 2\,\vec{v}$. **Ensuite :** la question 3.

CORRIGÉ

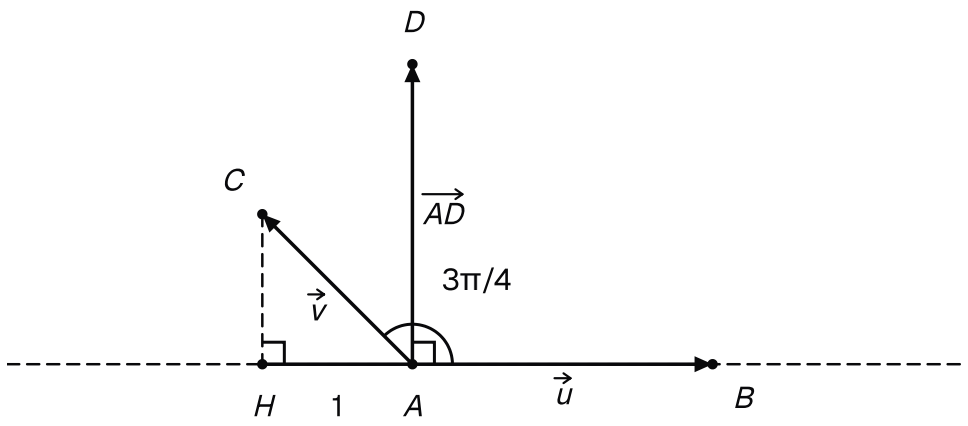
Longueur. D'après le carré scalaire, les identités remarquables et les règles de calcul, avec $\vec{u}^2 = 4$, $\vec{v}^2 = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2$:

$$\begin{aligned} AD^2 &= (\vec{u} + 2\,\vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 4\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\,\vec{v}^2 \\ &= 4 - 8 + 8 = 4. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $AD = 2$.

Orthogonalité. On a $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + 2\,\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$: d'après la question 3, avec $k = 2$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. Ces vecteurs ne sont pas nuls, car $AD = 2$ et $AB = 2$: d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(AD) \perp (AB)$.

Conclusion. $AD = 2$, et les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires.



Les vecteurs u = AB et v = AC, qui forment un angle de 3π/4, le projeté H de C à 1 de A, et le point D tel que AD = u + 2v, avec (AD) perpendiculaire à (AB).

5. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En déduire BD, puis $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

INDICE

Début : la relation de Chasles, en passant par A, avec $\overrightarrow{BA}=-\vec{u}$. **Ensuite :** les règles de calcul, puis l'expression trigonométrique.

CORRIGÉ

Vecteur. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\vec{u}+\vec{u}+2\,\vec{v}=2\,\overrightarrow{AC}$, donc $BD=2\,AC=2\sqrt{2}$.

Produit. On a $\overrightarrow{BA}=-\vec{u}$ et $\overrightarrow{BD}=2\,\vec{v}$. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}&=(-\vec{u})\cdot(2\,\vec{v})\\&=-2\times(\vec{u}\cdot\vec{v})\\&=-2\times(-2)=4.\end{aligned}$$

Angle. D'après l'expression trigonométrique, $4=2\times2\sqrt{2}\times\cos\left(\widehat{ABD}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{ABD}\right)=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'angle est compris entre 0 et π, et $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\widehat{ABD}=\dfrac{\pi}{4}$.

Conclusion. $\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{AC}$, $BD=2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=4$ et $\widehat{ABD}=\dfrac{\pi}{4}$.