BURHAN

Le produit scalaire : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

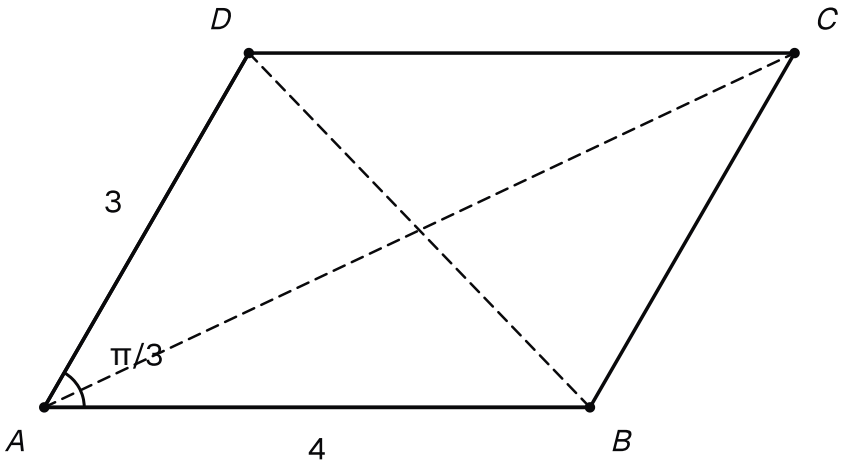
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Entraînement	7

Exercice 1

Les diagonales d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$.



Le parallélogramme ABCD de côtés AB = 4 et AD = 3, avec un angle de π/3 en A, et ses diagonales [AC] et [BD] en pointillés.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique.

2.

Justifier que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, puis calculer la longueur AC.

INDICE

Début : la relation de Chasles en passant par B, puis $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** calcule $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2$.

3.

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire la longueur BD, puis $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

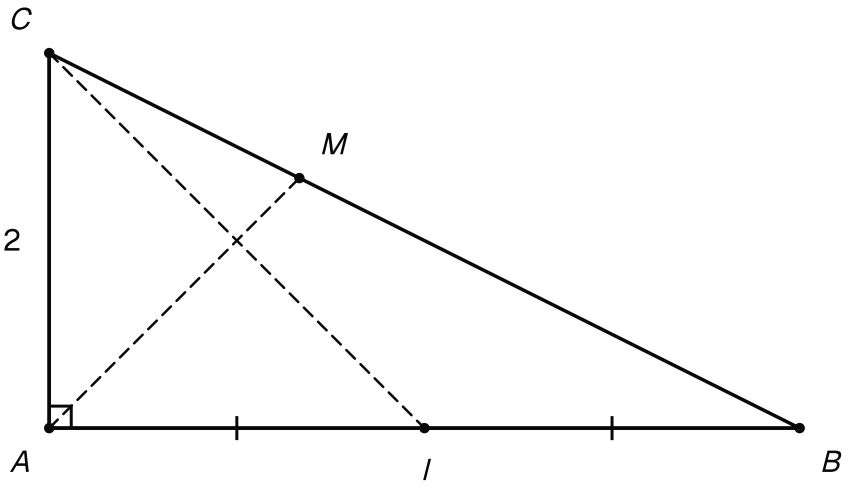
INDICE

Début : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** pour le produit, reconnais une somme multipliée par une différence.

Exercice 2

Deux droites perpendiculaires dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 4$ et $AC = 2$. On note I le milieu de $[AB]$ et M le point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On cherche si les droites (AM) et (CI) sont perpendiculaires.



Le triangle ABC rectangle en A, avec AB = 4 et AC = 2, le milieu I de [AB] et le point M situé aux deux tiers de [BC] en partant de B.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, puis écris $\overrightarrow{BC}$ en passant par A.

2.

Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donner aussi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB^2 et AC^2.

INDICE

Début : passe par A : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$.

3.

Calculer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CI}$ et conclure.

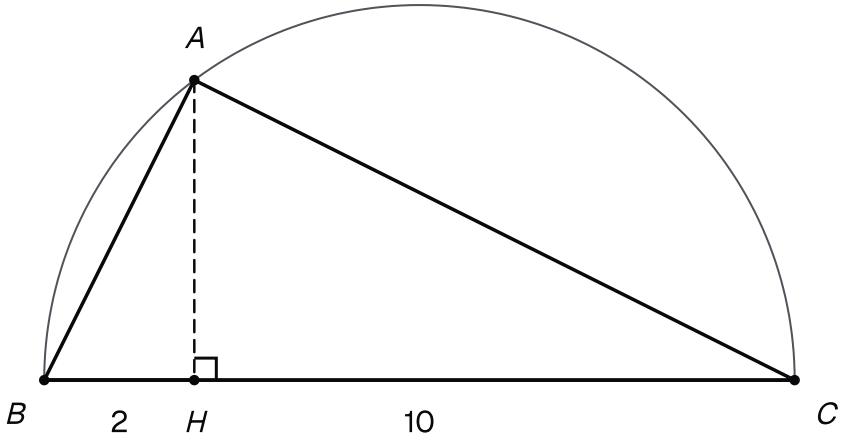
INDICE

Outil : les règles de calcul pour développer. **Point délicat :** les deux termes en $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sont nuls.

Exercice 3

Un triangle inscrit dans un demi-cercle

Sur un demi-cercle de diamètre $[BC]$, avec $BC = 10$, on place un point A distinct de B et de C. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, et on suppose que $BH = 2$.



Le demi-cercle de diamètre [BC], avec BC = 10, le point A placé dessus et le pied H de la hauteur issue de A, à 2 de B.

1.

Justifier que le triangle ABC est rectangle en A, puis calculer HC.

INDICE

Rappel du collège : un triangle inscrit dans un demi-cercle, dont un côté est le diamètre, est rectangle. **Ensuite :** où se trouve H ?

2.

Calculer AH.

INDICE

Outil : la relation métrique qui relie la hauteur aux deux segments $[HB]$ et $[HC]$.

3.

Calculer AB et AC, puis contrôler avec la relation entre la hauteur et l'hypoténuse.

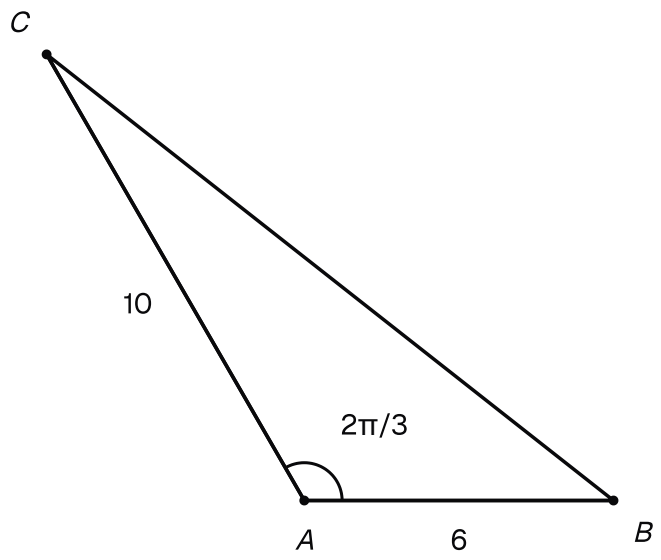
INDICE

Outil : $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$. **Contrôle :** $AH \times BC = AB \times AC$.

Exercice 4

Les angles d'un champ triangulaire

Un champ a la forme d'un triangle ABC. Les longueurs sont exprimées en dizaines de mètres : $AB = 6$, $AC = 10$, et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.



Le champ triangulaire ABC, avec AB = 6 et AC = 10 en dizaines de mètres, et un angle de 2π/3 en A.

1.

Calculer BC.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi. **Point délicat :** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, et le signe moins de la formule.

2.

Calculer $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$, puis donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à la calculatrice.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi écrit au sommet B ; le côté opposé à B est $[AC]$. **Calculatrice :** mode radian, touche $\cos^{-1}$.

3.

Calculer de même $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$ et une valeur approchée de $\widehat{ACB}$. Contrôler avec la somme des angles du triangle.

INDICE

Début : au sommet C, le côté opposé est $[AB]$. **Contrôle :** la somme des trois angles vaut π, environ $3{,}14$.

Exercice 5

Une médiane, puis un produit scalaire

ABC est un triangle tel que $AB = 11$, $AC = 7$ et $BC = 14$. On note I le milieu de $[BC]$.

1.

Calculer la longueur AI de la médiane issue de A.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane, $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

2.

En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la seconde égalité du théorème de la médiane.

3.

Contrôler ce résultat avec les trois longueurs, puis calculer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ?

INDICE

Début : la formule des longueurs. **Ensuite :** l'expression trigonométrique donne le cosinus, et son signe donne la nature de l'angle.

Exercice 6

Une droite et un cercle définis par des produits scalaires

$[AB]$ est un segment de longueur 5 et I est son milieu. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1.

Déterminer et tracer $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{k}{AB^2}$ et place H_0 sur (AB).

2.

Déterminer et tracer $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : le cercle de diamètre $[AB]$ et le produit scalaire.

3.

La droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. Calculer la distance PH_0.

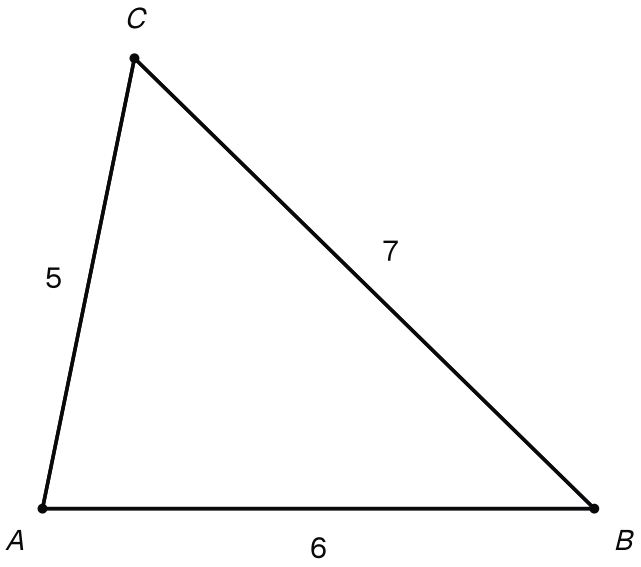
INDICE

Début : le triangle APB est rectangle en P, et $[PH_0]$ est sa hauteur issue de P. **Ensuite :** une relation métrique.

Exercice 7

L'aire d'un triangle par une hauteur

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



Le triangle ABC de côtés AB = 6, AC = 5 et BC = 7, sans le projeté H de C, dont la position est à trouver.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs.

2.

En déduire la position de H et la longueur AH.

INDICE

Outil : la définition par projection. **Point délicat :** le signe du produit indique le sens de $\overrightarrow{AH}$.

3.

Calculer la hauteur CH, puis l'aire du triangle ABC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H. **Ensuite :** l'aire vaut la moitié de la base fois la hauteur.