BURHAN

Le produit scalaire : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

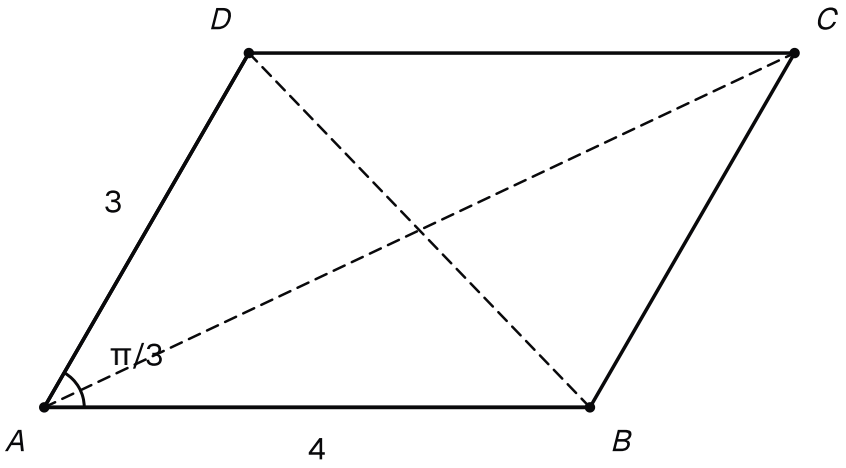
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Entraînement	7

Exercice 1

Les diagonales d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 3$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$.



Le parallélogramme ABCD de côtés AB = 4 et AD = 3, avec un angle de π/3 en A, et ses diagonales [AC] et [BD] en pointillés.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique.

CORRIGÉ

D'après l'expression trigonométrique, avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) \\ &= 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$.

2.

Justifier que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, puis calculer la longueur AC.

INDICE

Début : la relation de Chasles en passant par B, puis $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** calcule $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2$.

CORRIGÉ

Décomposition. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Ainsi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Longueur. D'après le carré scalaire et les identités remarquables, avec la question 1 :

$$\begin{aligned} AC^2 &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 \\ &= AB^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \\ &\quad + AD^2 \\ &= 16 + 12 + 9 = 37. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $AC = \sqrt{37}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $AC = \sqrt{37}$.

3.

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire la longueur BD, puis $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$. **Ensuite :** pour le produit, reconnais une somme multipliée par une différence.

CORRIGÉ

Décomposition. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

Longueur. D'après le carré scalaire et les identités remarquables :

$$\begin{aligned} BD^2 &= \left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= AD^2 - 2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &\quad + AB^2 \\ &= 9-12+16=13. \end{aligned}$$

Donc $BD=\sqrt{13}$.

Produit. D'après la question 2, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. D'après les identités remarquables :

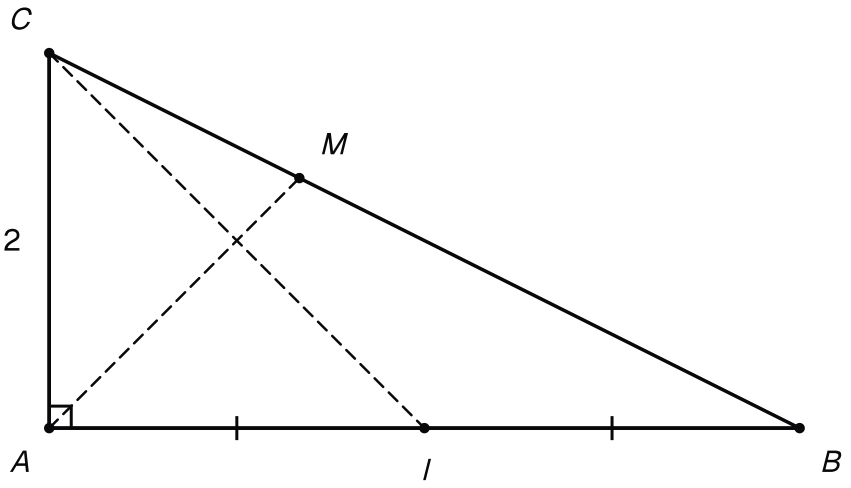
$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} \\ &= \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right) \\ &\quad \cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right) \\ &= AD^2-AB^2 \\ &= 9-16=-7. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, $BD=\sqrt{13}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-7$.

Exercice 2

Deux droites perpendiculaires dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 4$ et $AC = 2$. On note I le milieu de $[AB]$ et M le point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. On cherche si les droites (AM) et (CI) sont perpendiculaires.



Le triangle ABC rectangle en A, avec AB = 4 et AC = 2, le milieu I de [AB] et le point M situé aux deux tiers de [BC] en partant de B.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, puis écris $\overrightarrow{BC}$ en passant par A.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, avec $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donner aussi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, AB^2 et AC^2.

INDICE

Début : passe par A : $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{CI}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}$. Or $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$ et, comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

Produit et carrés. Le triangle est rectangle en A : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. D'après le carré scalaire, $AB^2=16$ et $AC^2=4$.

Conclusion. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, $AB^2=16$ et $AC^2=4$.

3.

Calculer $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CI}$ et conclure.

INDICE

Outil : les règles de calcul pour développer. **Point délicat :** les deux termes en $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ sont nuls.

CORRIGÉ

Développement. On multiplie les expressions des questions 1 et 2. D'après les règles de calcul, puis les valeurs de la question 2 :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CI}\\&=\frac{1}{6}AB^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&\quad+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}AC^2\\&=\frac{16}{6}-0+0-\frac{8}{3}\\&=0.\end{aligned}$$

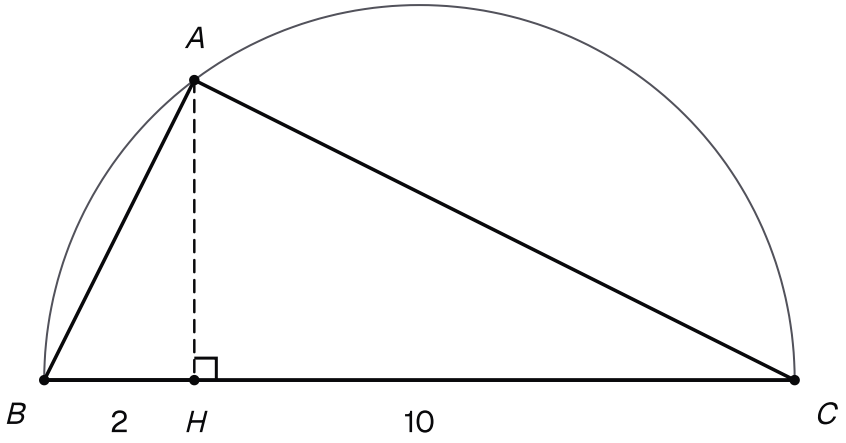
Vecteurs non nuls. Le point M est sur $[BC]$ et A n'est pas sur (BC), donc $\overrightarrow{AM}\neq\vec{0}$. Le point I est sur $[AB]$ et C n'est pas sur (AB), donc $\overrightarrow{CI}\neq\vec{0}$.

Conclusion. Le produit scalaire de ces deux vecteurs non nuls est nul : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(AM)\perp(CI)$. Les droites (AM) et (CI) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Un triangle inscrit dans un demi-cercle

Sur un demi-cercle de diamètre $[BC]$, avec $BC = 10$, on place un point A distinct de B et de C. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, et on suppose que $BH = 2$.



Le demi-cercle de diamètre [BC], avec BC = 10, le point A placé dessus et le pied H de la hauteur issue de A, à 2 de B.

1.

Justifier que le triangle ABC est rectangle en A, puis calculer HC.

INDICE

Rappel du collège : un triangle inscrit dans un demi-cercle, dont un côté est le diamètre, est rectangle. **Ensuite :** où se trouve H ?

CORRIGÉ

Angle droit. Rappel du collège : un triangle inscrit dans un cercle, dont un côté est un diamètre de ce cercle, est rectangle au sommet opposé à ce côté. Le point A est sur le demi-cercle de diamètre $[BC]$ et distinct de B et de C : le triangle ABC est rectangle en A.

Position de H. D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, le pied H de la hauteur issue de A est sur le segment $[BC]$. Donc $HC = BC - BH = 10 - 2 = 8$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en A, et $HC = 8$.

2.

Calculer AH.

INDICE

Outil : la relation métrique qui relie la hauteur aux deux segments $[HB]$ et $[HC]$.

CORRIGÉ

D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, la hauteur $[AH]$ et les segments $[HB]$, $[HC]$ vérifient :

$$\begin{aligned} AH^2 &= HB \times HC \\ &= 2 \times 8 = 16. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $AH = 4$.

Conclusion. $AH = 4$.

3.

Calculer AB et AC, puis contrôler avec la relation entre la hauteur et l'hypoténuse.

INDICE

Outil : $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$. **Contrôle :** $AH \times BC = AB \times AC$.

CORRIGÉ

Côtés. D'après les relations métriques, $BA^2 = BH \times BC = 2 \times 10 = 20$, donc $AB = 2\sqrt{5}$, car $20 = 4 \times 5$. De même, $CA^2 = CH \times CB = 8 \times 10 = 80$, donc $AC = 4\sqrt{5}$, car $80 = 16 \times 5$.

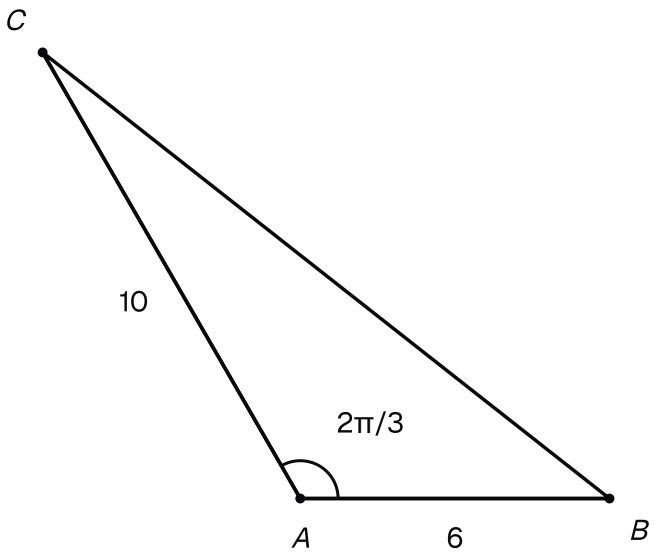
Contrôle. D'une part $AH \times BC = 4 \times 10 = 40$. D'autre part $AB \times AC = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 8 \times 5 = 40$. De plus, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2$ doit valoir BC^2 : on a bien $20 + 80 = 100 = BC^2$.

Conclusion. $AB = 2\sqrt{5}$ et $AC = 4\sqrt{5}$; la relation $AH \times BC = AB \times AC$ est vérifiée.

Exercice 4

Les angles d'un champ triangulaire

Un champ a la forme d'un triangle ABC. Les longueurs sont exprimées en dizaines de mètres : $AB = 6$, $AC = 10$, et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.



Le champ triangulaire ABC, avec AB = 6 et AC = 10 en dizaines de mètres, et un angle de 2π/3 en A.

1.

Calculer BC.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi. **Point délicat :** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, et le signe moins de la formule.

CORRIGÉ

D'après le théorème d'Al Kashi au sommet A, avec $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2\,AB \times AC \\ &\quad \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= 36 + 100 \\ &\quad - 2 \times 6 \times 10 \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 136 + 60 = 196. \end{aligned}$$

Le cosinus est négatif : le dernier terme s'ajoute. Comme BC est positif et $14^2 = 196$, on obtient $BC = 14$.

Conclusion. $BC = 14$, soit 140 m.

2.

Calculer $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$, puis donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à la calculatrice.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi écrit au sommet B ; le côté opposé à B est $[AC]$. **Calculatrice :** mode radian, touche $\cos^{-1}$.

CORRIGÉ

Cosinus. On écrit le théorème d'Al Kashi au sommet B, dont le côté opposé est $[AC]$, puis on isole le cosinus :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\&=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\,BA\times BC}\\&=\frac{36+196-100}{2\times 6\times 14}\\&=\frac{132}{168}=\frac{11}{14}.\end{aligned}$$

Angle. Le nombre $\dfrac{11}{14}$ n'est le cosinus d'aucun angle remarquable. À la calculatrice, en mode radian, $\widehat{ABC}$ mesure environ $0{,}67$ rad.

Conclusion. $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{11}{14}$ et $\widehat{ABC}\approx 0{,}67$ rad.

3.

Calculer de même $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$ et une valeur approchée de $\widehat{ACB}$. Contrôler avec la somme des angles du triangle.

INDICE

Début : au sommet C, le côté opposé est $[AB]$. **Contrôle :** la somme des trois angles vaut π, environ $3{,}14$.

CORRIGÉ

Cosinus. Au sommet C, le côté opposé est $[AB]$. D'après le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\widehat{ACB}\right)\\&=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2\,CA\times CB}\\&=\frac{100+196-36}{2\times 10\times 14}\\&=\frac{260}{280}=\frac{13}{14}.\end{aligned}$$

À la calculatrice, $\widehat{ACB}$ mesure environ $0{,}38$ rad.

Contrôle. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$, environ $2{,}09$ rad. La somme des trois angles donne $2{,}09+0{,}67+0{,}38=3{,}14$: c'est bien une valeur approchée de π.

Conclusion. $\cos\left(\widehat{ACB}\right)=\dfrac{13}{14}$ et $\widehat{ACB}\approx 0{,}38$ rad ; la somme des angles est cohérente.

Exercice 5

Une médiane, puis un produit scalaire

ABC est un triangle tel que $AB = 11$, $AC = 7$ et $BC = 14$. On note I le milieu de $[BC]$.

1.

Calculer la longueur AI de la médiane issue de A.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane, $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

CORRIGÉ

Le point I est le milieu de $[BC]$. D'après le théorème de la médiane :

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Numériquement, $121 + 49 = 2\,AI^2 + \dfrac{196}{2}$, soit $170 = 2\,AI^2 + 98$. Donc $2\,AI^2 = 72$, puis $AI^2 = 36$ et $AI = 6$.

Conclusion. La médiane issue de A mesure $AI = 6$.

2.

En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la seconde égalité du théorème de la médiane.

CORRIGÉ

D'après la seconde égalité du théorème de la médiane, avec $AI = 6$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AI^2 - \frac{BC^2}{4} \\ &= 36 - \frac{196}{4} \\ &= 36 - 49 = -13.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -13$.

3.

Contrôler ce résultat avec les trois longueurs, puis calculer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ?

INDICE

Début : la formule des longueurs. **Ensuite :** l'expression trigonométrique donne le cosinus, et son signe donne la nature de l'angle.

CORRIGÉ

Contrôle. D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(121+49-196\right)=-13.\end{aligned}$$

On retrouve la valeur de la question 2.

Cosinus. D'après l'expression trigonométrique, $-13=11\times 7\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=-\frac{13}{77}$.

Angle. Ce cosinus est négatif : l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Conclusion. Le résultat -13 est confirmé, $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=-\frac{13}{77}$, et l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Exercice 6

Une droite et un cercle définis par des produits scalaires

$[AB]$ est un segment de longueur 5 et I est son milieu. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=10$, et $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1.

Déterminer et tracer $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{k}{AB^2}$ et place H_0 sur (AB).

CORRIGÉ

Point H_0. Ici $k=10$ et $AB^2=25$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_0}&=\frac{10}{25}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Le coefficient est compris entre 0 et 1, et $\dfrac{2}{5}\times 5=2$: H_0 est le point du segment $[AB]$ tel que $AH_0=2$.

Ensemble. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$, $\mathcal{D}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par H_0. Pour la tracer, on place H_0 sur $[AB]$ à 2 de A, puis on trace la perpendiculaire en ce point.

Conclusion. $\mathcal{D}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H_0 de $[AB]$ tel que $AH_0=2$.

2.

Déterminer et tracer $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : le cercle de diamètre $[AB]$ et le produit scalaire.

CORRIGÉ

D'après la propriété du cercle de diamètre $[AB]$, les points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ forment ce cercle. Son centre est le milieu I de $[AB]$, et son rayon vaut $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{5}{2}$.

3.

La droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. Calculer la distance PH_0.

INDICE

Début : le triangle APB est rectangle en P, et $[PH_0]$ est sa hauteur issue de P. **Ensuite :** une relation métrique.

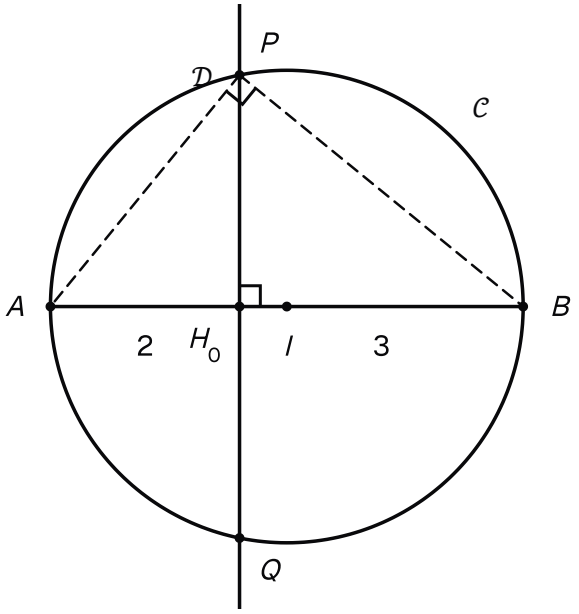
CORRIGÉ

Position de P. La droite $\mathcal{D}$ ne coupe (AB) qu'au point H_0, distinct de A et de B. Les points A et B ne sont donc pas sur $\mathcal{D}$, et $P \neq A$ et $P \neq B$. Le point H_0 est sur $[AI]$, car $AH_0 = 2 < AI = \dfrac{5}{2}$, donc $IH_0 = AI - AH_0 = \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}$. Cette distance diffère du rayon $\dfrac{5}{2}$: H_0 n'est pas sur $\mathcal{C}$, donc $P \neq H_0$.

Triangle rectangle. Le point P est sur $\mathcal{C}$, donc $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, et ces vecteurs ne sont pas nuls. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, le triangle APB est rectangle en P. Comme P est sur $\mathcal{D}$ et $P \neq H_0$, $(PH_0) \perp (AB)$: H_0 est le pied de la hauteur issue de P.

Calcul. On a $H_0B = 5 - 2 = 3$. D'après les relations métriques dans le triangle APB, $PH_0^2 = H_0A \times H_0B = 2 \times 3 = 6$, donc $PH_0 = \sqrt{6}$. Le même raisonnement pour Q donne $QH_0 = \sqrt{6}$.

Conclusion. $PH_0 = \sqrt{6}$.

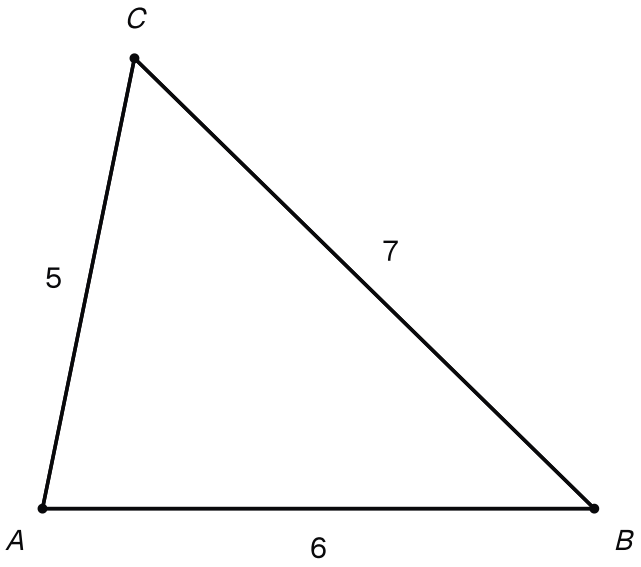


La droite $\mathcal{D}$, perpendiculaire à (AB) en H0, coupe le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] en P et Q ; le triangle APB est rectangle en P, de hauteur [PH0].

Exercice 7

L'aire d'un triangle par une hauteur

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



Le triangle ABC de côtés AB = 6, AC = 5 et BC = 7, sans le projeté H de C, dont la position est à trouver.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs.

CORRIGÉ

D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables, avec $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 7$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(36 + 25 - 49\right) = 6.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.

2.

En déduire la position de H et la longueur AH.

INDICE

Outil : la définition par projection. **Point délicat :** le signe du produit indique le sens de $\overrightarrow{AH}$.

CORRIGÉ

Position. D'après la définition par projection, le produit serait nul si H était le point A, et négatif si $\overrightarrow{AH}$ était de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 > 0$: donc $H \neq A$, et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens. Le point H est sur la demi-droite $[AB)$.

Longueur. Par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$, soit $6 = 6 \times AH$. Donc $AH = \dfrac{6}{6} = 1$. Comme $AH = 1 < AB = 6$, le point H est même sur le segment $[AB]$.

Conclusion. H est sur $[AB]$, distinct de A, et $AH = 1$.

3.

Calculer la hauteur CH, puis l'aire du triangle ABC.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H. **Ensuite :** l'aire vaut la moitié de la base fois la hauteur.

CORRIGÉ

Hauteur. Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore :

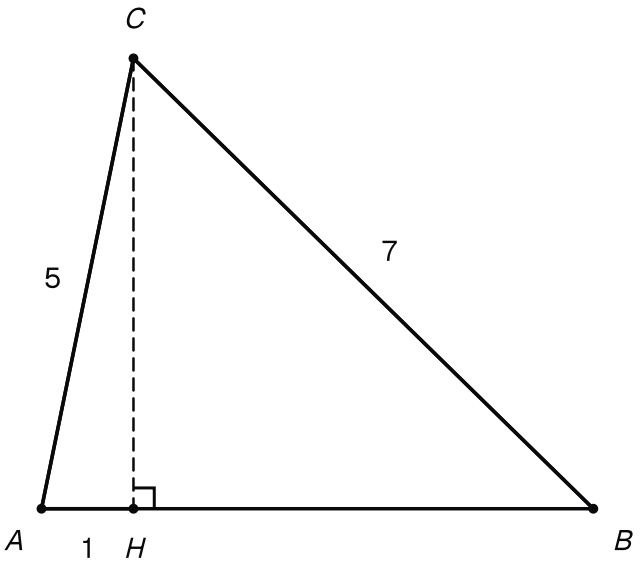
$$\begin{aligned} CH^2 &= AC^2 - AH^2 \\ &= 25 - 1 = 24. \end{aligned}$$

Donc $CH = 2\sqrt{6}$, car $24 = 4 \times 6$.

Aire. Avec la base $[AB]$ et la hauteur $[CH]$, l'aire du triangle ABC vaut :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times AB \times CH \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} \\ &= 6\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Conclusion. $CH = 2\sqrt{6}$, et l'aire du triangle ABC vaut $6\sqrt{6}$.



La hauteur [CH] du corrigé : H est sur [AB], à 1 de A, et l'aire du triangle vaut la moitié de AB fois CH.