BURHAN

Le produit scalaire : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

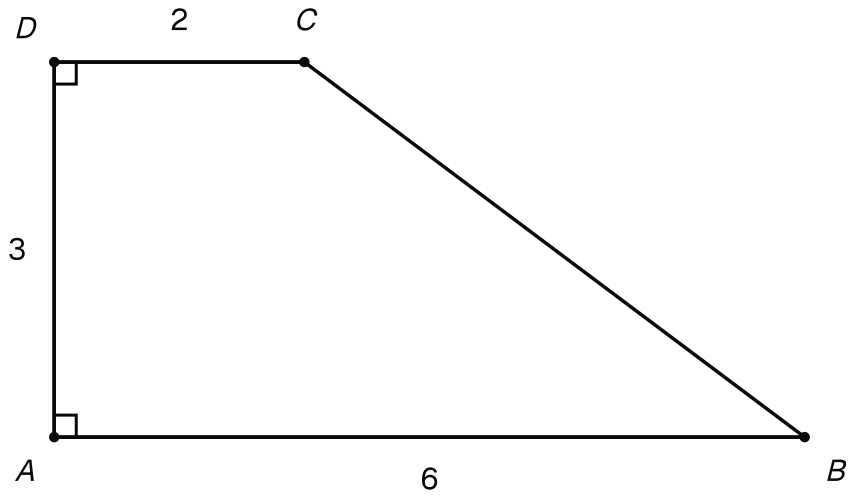
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Application	9

Exercice 1

Trois projections dans un trapèze rectangle

$ABCD$ est un trapèze rectangle : les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, et la droite (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (DC). On donne $AB = 6$, $DC = 2$ et $AD = 3$; les points B et C sont du même côté de la droite (AD). Fais la figure sur ton cahier.



Le trapèze rectangle ABCD : bases parallèles [AB] et [DC] de longueurs 6 et 2, et côté [AD] de longueur 3, perpendiculaire aux deux bases.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : la définition par projection. **Début :** où se projette le point D sur la droite (AB) ?

2.

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). Justifier que $AH = 2$ et que H est sur le segment $[AB]$.

INDICE

Début : le quadrilatère $AHCD$ a trois angles droits. **Point délicat :** pour situer H, sers-toi des points B et C placés du même côté de (AD).

3.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la définition par projection, avec le point H de la question 2.

4.

On note K le projeté orthogonal de B sur la droite (DC). Calculer CK.

INDICE

Début : comme à la question 2, $DK = AB$. **Point délicat :** le point K est-il du côté de D par rapport à C ?

5.

Calculer $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

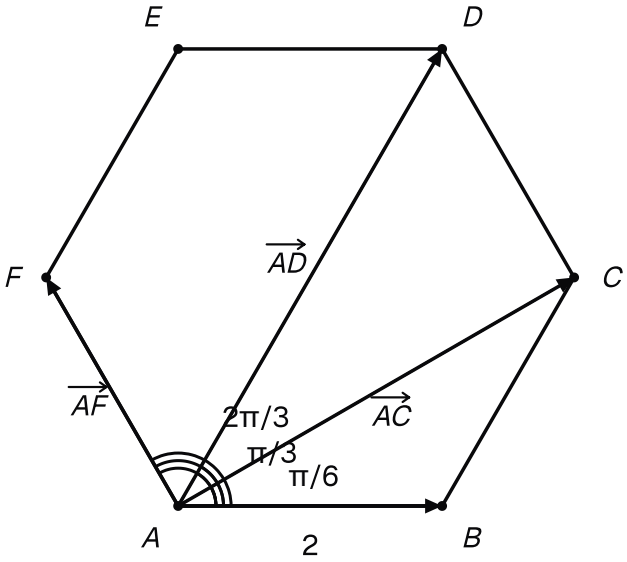
INDICE

Outil : la définition par projection, avec le point K. **Point délicat :** compare les sens de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{CK}$.

Exercice 2

Produits scalaires dans un hexagone régulier

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 2. On admet les résultats suivants : $AC = 2\sqrt{3}$, $AD = 4$, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{BAF} = \dfrac{2\pi}{3}$.



L'hexagone régulier ABCDEF de côté 2, ses diagonales [AC] et [AD], et les trois angles admis en A.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique, avec AB, AD et l'angle $\widehat{BAD}$.

2.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la même formule ; la valeur remarquable utile est $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$. Expliquer le signe du résultat.

INDICE

Outil : $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3}$. **Point délicat :** compare la mesure de $\widehat{BAF}$ à $\dfrac{\pi}{2}$ avant de calculer.

Exercice 3

Le signe des trois produits d'un triangle

ABC est un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 5$.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

2.

Calculer de même $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

INDICE

Point délicat : en B, le côté opposé est $[AC]$; en C, c'est $[AB]$.

3.

L'un des angles du triangle est-il obtus ? Justifier.

INDICE

Outil : chaque produit vaut le produit de deux longueurs par le cosinus de l'angle ; les longueurs sont positives.

Exercice 4

Normes et carrés scalaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

1.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

INDICE

Outil : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$, puis l'identité remarquable de la somme.

2.

Calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

INDICE

Point délicat : le double produit change de signe.

3.

Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

INDICE

Outil : la troisième identité remarquable.

Exercice 5

Angle droit ou non ?

On considère deux triangles : le triangle ABC, avec $AB = 5$, $AC = 12$ et $BC = 13$; le triangle DEF, avec $DE = 4$, $DF = 6$ et $EF = 7$.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs.

2.

Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

INDICE

Outil : la caractérisation de l'orthogonalité ; les vecteurs ne sont pas nuls.

3.

Le triangle DEF est-il rectangle en D ?

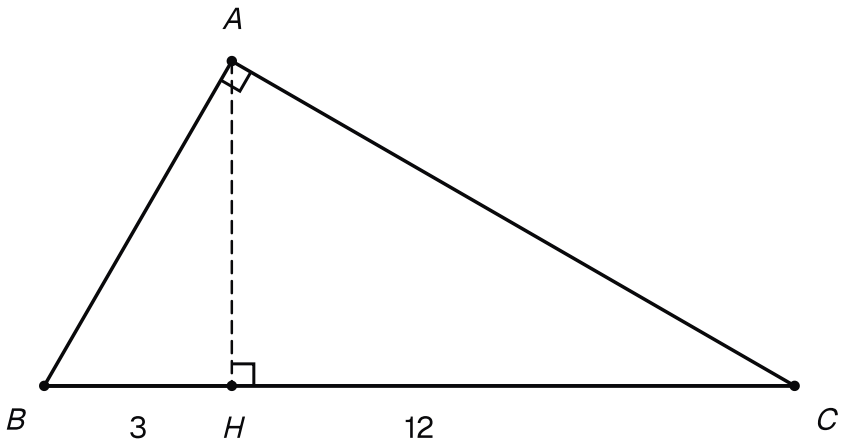
INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ de la même façon.

Exercice 6

Les longueurs autour d'une hauteur

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A. On donne $BH = 3$ et $BC = 12$.



Le triangle ABC rectangle en A et le pied H de la hauteur issue de A, avec BH = 3 sur l'hypoténuse de longueur 12.

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : la relation métrique qui contient BA, BH et BC.

2.

Calculer HC.

INDICE

Début : d'après les relations métriques, H appartient au segment $[BC]$.

3.

Calculer AH.

INDICE

Outil : la relation métrique de la hauteur, avec HB et HC.

4.

Calculer AC.

INDICE

Outil : $CA^2 = CH \times CB$.

5.

Contrôler les résultats par le théorème de Pythagore, puis par l'égalité $AH \times BC = AB \times AC$.

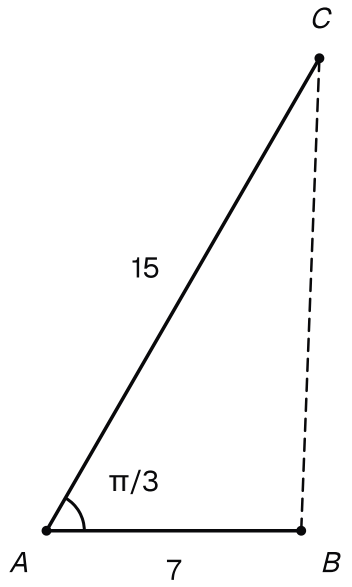
INDICE

Contrôle : compare $AB^2 + AC^2$ à BC^2, puis calcule les deux produits.

Exercice 7

Deux sentiers et un raccourci

Deux sentiers rectilignes partent d'un refuge A. Le premier mène à une source B, avec $AB = 7$ km ; le second mène à un col C, avec $AC = 15$ km. Les deux sentiers forment l'angle $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. On veut tracer un raccourci rectiligne de B à C.



Les deux sentiers partis du refuge A, longs de 7 km vers la source B et de 15 km vers le col C, et le raccourci [BC] en pointillés.

1.

Calculer la longueur BC du raccourci.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi, avec l'angle en A, encadré par $[AB]$ et $[AC]$.

2.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ à l'aide des trois longueurs. L'angle $\widehat{ABC}$ est-il aigu ou obtus ?

INDICE

Outil : la formule des longueurs au sommet B ; le côté opposé à B est $[AC]$.

Exercice 8

Trois ensembles de points autour d'un segment

$[AB]$ est un segment de longueur 6 et I est son milieu. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

INDICE

Outil : l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, avec $k = 0$.

2.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -18$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{k}{AB^2}$ pour placer H_0. **Point délicat :** le signe de k.

3.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

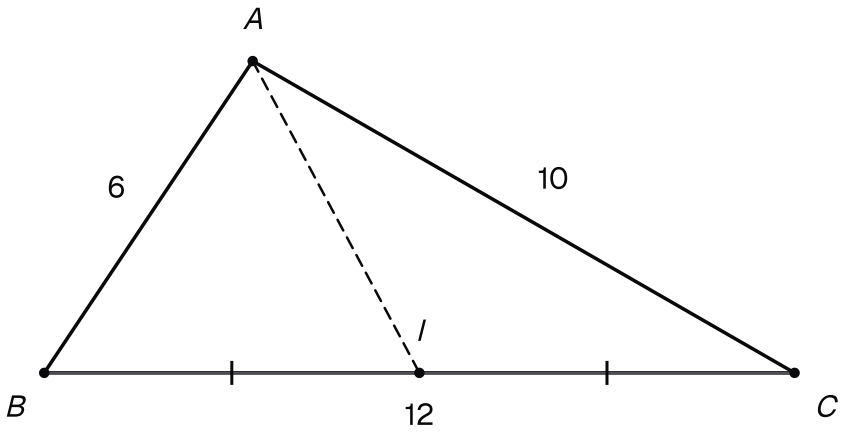
INDICE

Outil : le cercle de diamètre $[AB]$ et le produit scalaire.

Exercice 9

Une médiane en un geste

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 10$ et $BC = 12$; I est le milieu de $[BC]$.



Le triangle ABC de côtés AB = 6, AC = 10 et BC = 12, avec le milieu I de [BC] et la médiane [AI], dont la longueur est demandée.

1.

Calculer AI.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane. **Point délicat :** le carré de $[BC]$ est divisé par 2.

2.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : l'autre égalité du théorème de la médiane. **Point délicat :** cette fois, le carré de $[BC]$ est divisé par 4.