BURHAN

Le produit scalaire : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

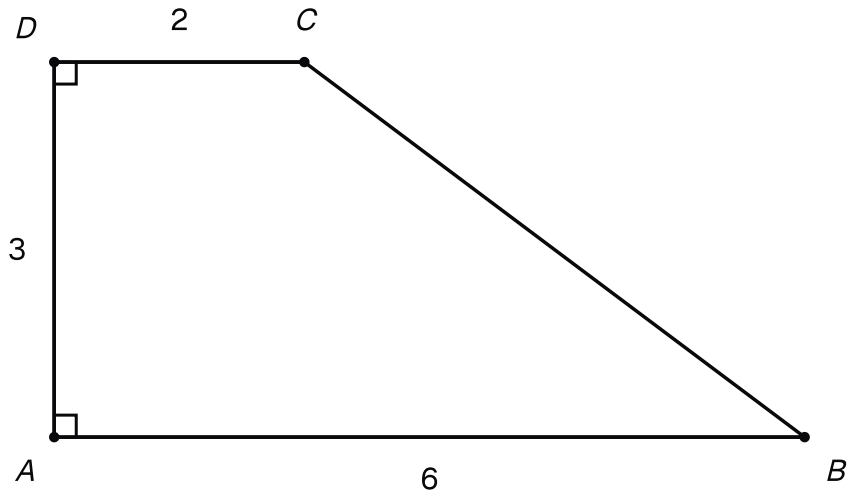
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le produit scalaire	Application	9

Exercice 1

Trois projections dans un trapèze rectangle

$ABCD$ est un trapèze rectangle : les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, et la droite (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (DC). On donne $AB = 6$, $DC = 2$ et $AD = 3$; les points B et C sont du même côté de la droite (AD). Fais la figure sur ton cahier.



Le trapèze rectangle ABCD : bases parallèles [AB] et [DC] de longueurs 6 et 2, et côté [AD] de longueur 3, perpendiculaire aux deux bases.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : la définition par projection. **Début :** où se projette le point D sur la droite (AB) ?

CORRIGÉ

Projeté de D. La droite (AD) passe par A et elle est perpendiculaire à (AB). Le projeté orthogonal de D sur (AB) est donc le point A lui-même.

Produit. Le projeté de D est l'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}$: par définition du produit scalaire, le produit est nul.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

2.

On note H le projeté orthogonal de C sur (AB). Justifier que $AH = 2$ et que H est sur le segment $[AB]$.

INDICE

Début : le quadrilatère $AHCD$ a trois angles droits. **Point délicat :** pour situer H, sers-toi des points B et C placés du même côté de (AD).

CORRIGÉ

Longueur. Le quadrilatère $AHCD$ a trois angles droits, en A, en D et en H : c'est un rectangle. Ses côtés opposés sont égaux et parallèles, donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ et $AH = DC = 2$.

Sens. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, et les points B, C sont du même côté de (AD) : les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens. Comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont eux aussi le même sens.

Position. Le point H est donc sur la demi-droite $[AB)$, et $AH = 2 < AB = 6$.

Conclusion. $AH = 2$, et le point H est sur le segment $[AB]$.

3.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la définition par projection, avec le point H de la question 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2, le projeté orthogonal H de C sur (AB) est sur $[AB]$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AH \\ &= 6 \times 2 = 12.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$.

4.

On note K le projeté orthogonal de B sur la droite (DC). Calculer CK.

INDICE

Début : comme à la question 2, $DK = AB$. **Point délicat :** le point K est-il du côté de D par rapport à C ?

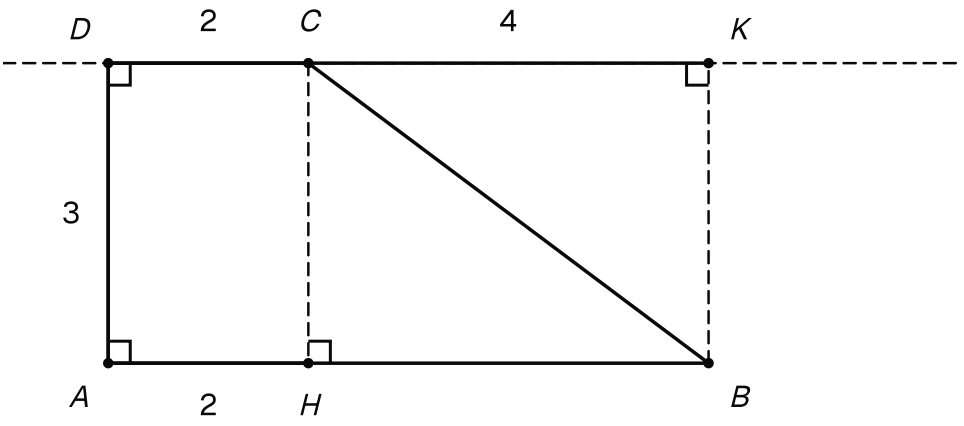
CORRIGÉ

Rectangle $ABKD$. Le quadrilatère $ABKD$ a trois angles droits, en A, en D et en K : c'est un rectangle. Donc $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB}$ et $DK = 6$.

Position de K. D'après la question 2, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le même sens. Les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont donc le même sens : K est sur la demi-droite $[DC)$. Comme $DK = 6 > DC = 2$, le point K est au-delà de C, et C est entre D et K.

Longueur. On en tire $CK = DK - DC = 6 - 2 = 4$.

Conclusion. $CK = 4$.



Les deux projetés du corrigé : H sur [AB], avec AH = 2, et K sur la droite (DC), au-delà de C, avec CK = 4.

5.

Calculer $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

INDICE

Outil : la définition par projection, avec le point K. **Point délicat :** compare les sens de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{CK}$.

CORRIGÉ

Sens. D'après la question 4, le projeté orthogonal K de B sur (DC) est au-delà de C sur la demi-droite $[DC)$. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont donc de sens contraires.

Calcul. Par projection, le produit est négatif :

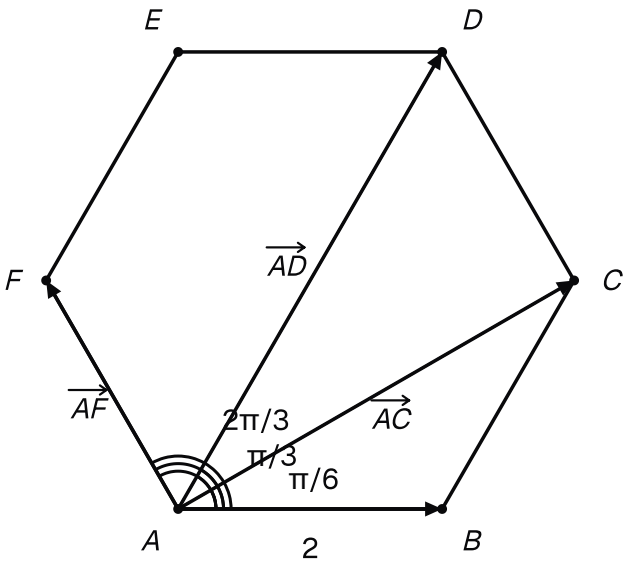
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} &= -CD \times CK \\ &= -2 \times 4 = -8.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = -8$.

Exercice 2

Produits scalaires dans un hexagone régulier

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 2. On admet les résultats suivants : $AC = 2\sqrt{3}$, $AD = 4$, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{BAF} = \dfrac{2\pi}{3}$.



L'hexagone régulier ABCDEF de côté 2, ses diagonales [AC] et [AD], et les trois angles admis en A.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

INDICE

Outil : l'expression trigonométrique, avec AB, AD et l'angle $\widehat{BAD}$.

CORRIGÉ

On applique l'expression trigonométrique du produit scalaire, avec $AB = 2$, $AD = 4$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

D'après cette expression :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)\\ &= 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$.

2.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la même formule ; la valeur remarquable utile est $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRIGÉ

D'après l'expression trigonométrique, avec $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ et $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$.

3.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$. Expliquer le signe du résultat.

INDICE

Outil : $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3}$. **Point délicat :** compare la mesure de $\widehat{BAF}$ à $\dfrac{\pi}{2}$ avant de calculer.

CORRIGÉ

Données. L'hexagone a pour côté 2, donc $AF = 2$. Comme $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$, on a $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Produit. D'après l'expression trigonométrique :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}\\ &= AB \times AF \times \cos\left(\widehat{BAF}\right)\\ &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -2.\end{aligned}$$

Signe. L'angle $\widehat{BAF}$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$, qui dépasse $\dfrac{\pi}{2}$: il est obtus. Son cosinus est négatif, alors que AB et AF sont positifs.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -2$; ce produit est négatif parce que l'angle $\widehat{BAF}$ est obtus.

Exercice 3

Le signe des trois produits d'un triangle

ABC est un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 5$.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

CORRIGÉ

D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables, avec $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 5$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\&= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\\&= \frac{1}{2}\left(64 + 36 - 25\right)\\&= \frac{75}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{75}{2}$.

2.

Calculer de même $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

INDICE

Point délicat : en B, le côté opposé est $[AC]$; en C, c'est $[AB]$.

CORRIGÉ

Au sommet B. Le côté opposé à B est $[AC]$. D'après la même formule des longueurs :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\\&= \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AC^2\right)\\&= \frac{1}{2}\left(64 + 25 - 36\right)\\&= \frac{53}{2}.\end{aligned}$$

Au sommet C. Le côté opposé à C est $[AB]$. De même :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\\&= \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right)\\&= \frac{1}{2}\left(36 + 25 - 64\right)\\&= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{53}{2}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{3}{2}$.

3.

L'un des angles du triangle est-il obtus ? Justifier.

INDICE

Outil : chaque produit vaut le produit de deux longueurs par le cosinus de l'angle ; les longueurs sont positives.

CORRIGÉ

Signe et angle. D'après l'expression trigonométrique, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos\left(\widehat{ACB}\right)$, avec $CA\times CB>0$. Le cosinus de l'angle en C a donc le signe de ce produit ; il en va de même aux sommets A et B.

Angle en C. D'après la question 2, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\dfrac{3}{2}$, qui est négatif. Donc $\cos\left(\widehat{ACB}\right)<0$: l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus.

Angles en A et en B. Les produits $\dfrac{75}{2}$ et $\dfrac{53}{2}$ sont positifs : les cosinus de $\widehat{BAC}$ et de $\widehat{ABC}$ le sont aussi, et ces deux angles sont aigus.

Conclusion. Oui : l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus, et c'est le seul angle obtus du triangle.

Exercice 4

Normes et carrés scalaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

1.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

INDICE

Outil : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$, puis l'identité remarquable de la somme.

CORRIGÉ

D'après le carré scalaire, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$, avec $\vec{u}^2 = 9$ et $\vec{v}^2 = 4$. D'après les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= 9 - 2 + 4 = 11.\end{aligned}$$

Une norme est positive, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{11}$.

Conclusion. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{11}$.

2.

Calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

INDICE

Point délicat : le double produit change de signe.

CORRIGÉ

De même, d'après le carré scalaire et les identités remarquables, le double produit change de signe :

$$\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= 9 + 2 + 4 = 15.\end{aligned}$$

Une norme est positive, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{15}$.

Conclusion. $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{15}$.

3.

Calculer $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

INDICE

Outil : la troisième identité remarquable.

CORRIGÉ

D'après les identités remarquables, une somme multipliée par une différence donne la différence des carrés :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \\ &= 9 - 4 = 5.\end{aligned}$$

Conclusion. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 5$.

Exercice 5

Angle droit ou non ?

On considère deux triangles : le triangle ABC, avec $AB = 5$, $AC = 12$ et $BC = 13$; le triangle DEF, avec $DE = 4$, $DF = 6$ et $EF = 7$.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : la formule des longueurs.

CORRIGÉ

D'après la formule des longueurs, conséquence des identités remarquables, avec $AB = 5$, $AC = 12$ et $BC = 13$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(25 + 144 - 169\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

2.

Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

INDICE

Outil : la caractérisation de l'orthogonalité ; les vecteurs ne sont pas nuls.

CORRIGÉ

Vecteurs orthogonaux. D'après la question 1, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est nul. D'après la caractérisation de l'orthogonalité, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Droites. Ils ne sont pas nuls, car $AB = 5$ et $AC = 12$, et ils dirigent les droites (AB) et (AC) : ces droites sont donc perpendiculaires.

Conclusion. $(AB) \perp (AC)$: le triangle ABC est rectangle en A.

3.

Le triangle DEF est-il rectangle en D ?

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ de la même façon.

CORRIGÉ

Produit. D'après la formule des longueurs, avec $DE = 4$, $DF = 6$ et $EF = 7$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}\\ &= \frac{1}{2}\left(DE^2 + DF^2 - EF^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(16 + 36 - 49\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

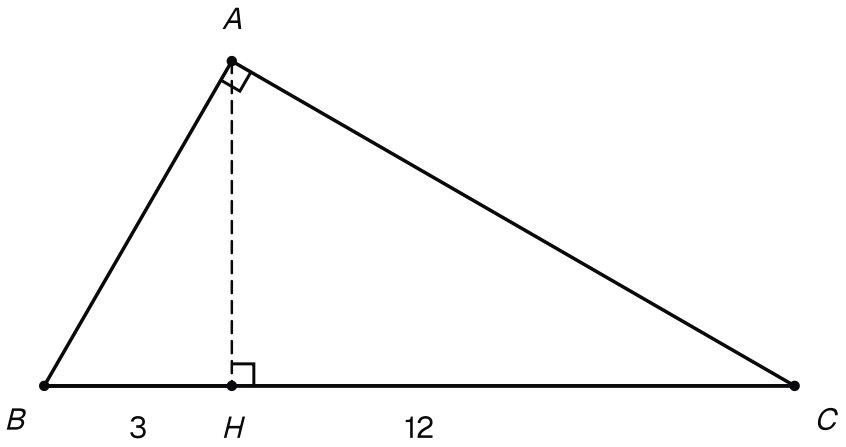
Orthogonalité. Ce produit n'est pas nul : d'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (DE) et (DF) ne sont pas perpendiculaires. L'angle en D est pourtant proche d'un angle droit : seul le calcul permet de trancher.

Conclusion. Non : le triangle DEF n'est pas rectangle en D.

Exercice 6

Les longueurs autour d'une hauteur

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A. On donne $BH = 3$ et $BC = 12$.



Le triangle ABC rectangle en A et le pied H de la hauteur issue de A, avec BH = 3 sur l'hypoténuse de longueur 12.

1.

Calculer AB.

INDICE

Outil : la relation métrique qui contient BA, BH et BC.

CORRIGÉ

Le point H est le pied de la hauteur issue de l'angle droit. D'après les relations métriques dans le triangle rectangle :

$$\begin{aligned} BA^2 &= BH \times BC \\ &= 3 \times 12 = 36. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $AB = 6$.

Conclusion. $AB = 6$.

2.

Calculer HC.

INDICE

Début : d'après les relations métriques, H appartient au segment $[BC]$.

CORRIGÉ

Position de H. D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, le pied H de la hauteur issue de A appartient au segment $[BC]$.

Longueur. Ainsi $HC = BC - BH = 12 - 3 = 9$.

Conclusion. $HC = 9$.

3.

Calculer AH.

INDICE

Outil : la relation métrique de la hauteur, avec HB et HC.

CORRIGÉ

D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, le carré de la hauteur est le produit des deux segments qu'elle détermine sur $[BC]$:

$$\begin{aligned} AH^2 &= HB \times HC \\ &= 3 \times 9 = 27. \end{aligned}$$

Donc $AH = 3\sqrt{3}$, car $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$.

Conclusion. $AH = 3\sqrt{3}$.

4.

Calculer AC.

INDICE

Outil : $CA^2 = CH \times CB$.

CORRIGÉ

D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, au sommet C :

$$\begin{aligned} CA^2 &= CH \times CB \\ &= 9 \times 12 = 108. \end{aligned}$$

Donc $AC = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, car $108 = 36 \times 3$.

Conclusion. $AC = 6\sqrt{3}$.

5.

Contrôler les résultats par le théorème de Pythagore, puis par l'égalité $AH \times BC = AB \times AC$.

INDICE

Contrôle : compare $AB^2 + AC^2$ à BC^2, puis calcule les deux produits.

CORRIGÉ

Pythagore. Le triangle est rectangle en A : d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2$ doit valoir $BC^2 = 144$. On trouve bien :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 36 + 108 \\ &= 144 = BC^2. \end{aligned}$$

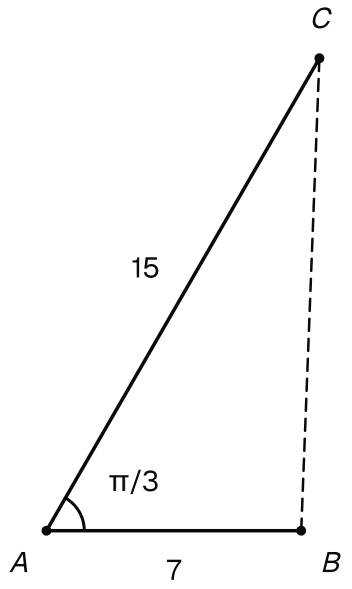
Produits. D'une part $AH \times BC = 3\sqrt{3} \times 12 = 36\sqrt{3}$ et $AB \times AC = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ d'autre part : les deux produits sont égaux.

Conclusion. Les deux contrôles sont vérifiés : les valeurs $AB = 6$, $AH = 3\sqrt{3}$ et $AC = 6\sqrt{3}$ sont cohérentes.

Exercice 7

Deux sentiers et un raccourci

Deux sentiers rectilignes partent d'un refuge A. Le premier mène à une source B, avec $AB = 7$ km ; le second mène à un col C, avec $AC = 15$ km. Les deux sentiers forment l'angle $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. On veut tracer un raccourci rectiligne de B à C.



Les deux sentiers partis du refuge A, longs de 7 km vers la source B et de 15 km vers le col C, et le raccourci [BC] en pointillés.

1.

Calculer la longueur BC du raccourci.

INDICE

Outil : le théorème d'Al Kashi, avec l'angle en A, encadré par $[AB]$ et $[AC]$.

CORRIGÉ

L'angle en A est encadré par les côtés $[AB]$ et $[AC]$, et le côté opposé est $[BC]$. D'après le théorème d'Al Kashi, avec $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2\,AB \times AC \\ &\quad \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= 49 + 225 \\ &\quad - 2 \times 7 \times 15 \times \frac{1}{2} \\ &= 169. \end{aligned}$$

Donc $BC = 13$ km, car BC est positif et $13^2 = 169$.

Conclusion. Le raccourci de B à C mesure 13 km.

2.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ à l'aide des trois longueurs. L'angle $\widehat{ABC}$ est-il aigu ou obtus ?

INDICE

Outil : la formule des longueurs au sommet B ; le côté opposé à B est $[AC]$.

CORRIGÉ

Produit. Au sommet B, le côté opposé est $[AC]$. D'après la formule des longueurs, avec $BA = 7$, $BC = 13$ et $AC = 15$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AC^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(49 + 169 - 225\right)\\ &= -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Angle. D'après l'expression trigonométrique, ce produit vaut $BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$, avec $BA \times BC > 0$. Il est négatif, donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) < 0$.

Conclusion. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{7}{2}$, et l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus.

Exercice 8

Trois ensembles de points autour d'un segment

$[AB]$ est un segment de longueur 6 et I est son milieu. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

INDICE

Outil : l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, avec $k = 0$.

CORRIGÉ

Point H_0. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, cet ensemble est la perpendiculaire à (AB) passant par le point H_0 défini par $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2}\,\overrightarrow{AB}$. Ici $k = 0$, donc $\overrightarrow{AH_0} = \vec{0}$ et $H_0 = A$.

Conclusion. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.

2.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -18$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{k}{AB^2}$ pour placer H_0. **Point délicat :** le signe de k.

CORRIGÉ

Point H_0. Ici $k = -18$ et $AB^2 = 36$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_0} &= \frac{-18}{36}\,\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Le coefficient est négatif : H_0 est sur la droite (AB), du côté opposé à B par rapport à A, avec $AH_0 = \dfrac{1}{2} \times 6 = 3$.

Ensemble. D'après la même propriété, l'ensemble cherché est la perpendiculaire à (AB) passant par H_0.

Conclusion. Les points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -18$ forment la perpendiculaire à (AB) passant par le point H_0 situé à 3 de A, du côté opposé à B.

3.

Décrire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

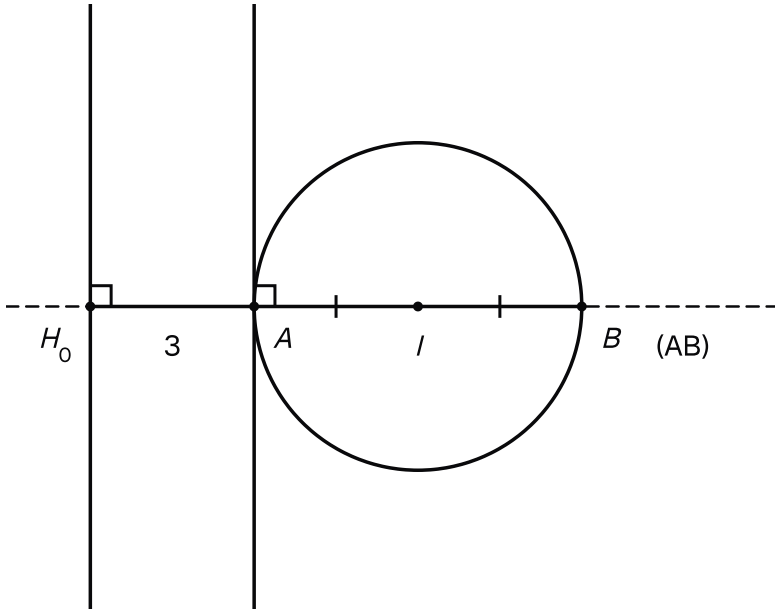
INDICE

Outil : le cercle de diamètre $[AB]$ et le produit scalaire.

CORRIGÉ

D'après la propriété du cercle de diamètre $[AB]$, les points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ sont exactement les points de ce cercle. Son centre est le milieu I de $[AB]$, et son rayon vaut $\frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Conclusion. L'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon 3.

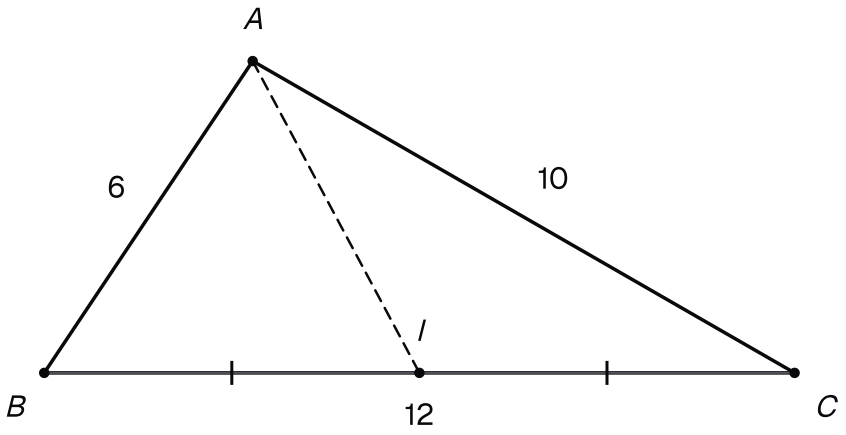


Les trois ensembles de l'exercice : la perpendiculaire à (AB) en A, la perpendiculaire en H0, à 3 de A à l'opposé de B, et le cercle de centre I et de rayon 3.

Exercice 9

Une médiane en un geste

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 10$ et $BC = 12$; I est le milieu de $[BC]$.



Le triangle ABC de côtés AB = 6, AC = 10 et BC = 12, avec le milieu I de [BC] et la médiane [AI], dont la longueur est demandée.

1.

Calculer AI.

INDICE

Outil : le théorème de la médiane. **Point délicat :** le carré de $[BC]$ est divisé par 2.

CORRIGÉ

Le point I est le milieu de $[BC]$. D'après le théorème de la médiane :

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Numériquement, $36 + 100 = 2\,AI^2 + 72$. Donc $2\,AI^2 = 64$, $AI^2 = 32$ et $AI = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, car $32 = 16 \times 2$.

Conclusion. $AI = 4\sqrt{2}$.

2.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : l'autre égalité du théorème de la médiane. **Point délicat :** cette fois, le carré de $[BC]$ est divisé par 4.

CORRIGÉ

D'après la seconde égalité du théorème de la médiane, avec $AI^2 = 32$ trouvé à la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AI^2 - \frac{BC^2}{4} \\ &= 32 - \frac{144}{4} \\ &= 32 - 36 = -4.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$.