BURHAN

Le produit scalaire

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/produit-scalaire/cours

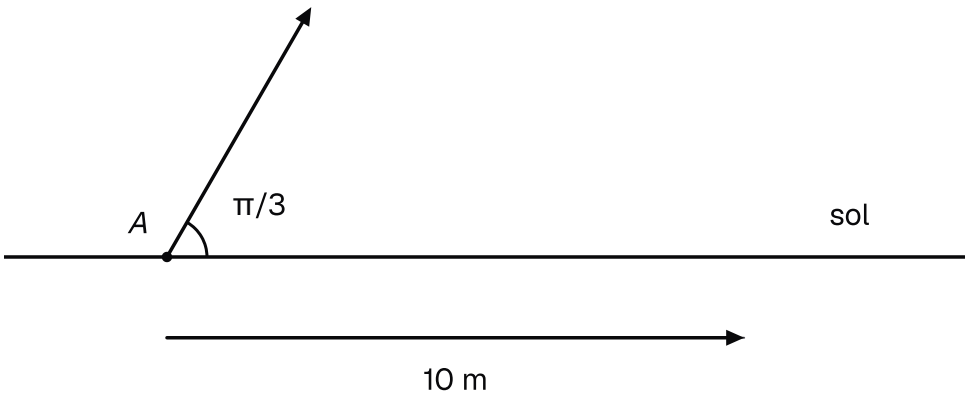
Chapitre	Semestre
Le produit scalaire	Semestre 2

Quelle part de la force fait avancer ?

Tu tires un chariot sur un sol horizontal avec une corde inclinée. La corde fait un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec le sol, et tu tires avec une force de 50 N.

Le chariot avance de 10 m.

Toute ta force sert-elle à faire avancer le chariot ? Une partie tire le chariot vers le haut : elle ne le fait pas avancer.



Le chariot part de A ; la flèche de la corde fait un angle de π/3 avec le sol, et la flèche du bas figure le déplacement de 10 m.

Devine : Une prédiction

Tu gardes la même force de 50 N, mais tu lèves la corde : elle fait un angle plus grand avec le sol. Que devient la part de la force qui fait avancer le chariot ?

A. Elle augmente.

Faux.

Plus la corde se lève, plus la force tire vers le haut, et moins elle tire vers l'avant.

B. Elle diminue.

Juste.

Juste : l'« ombre » de la force sur le sol raccourcit quand la corde se lève.

C. Elle ne change pas : la force vaut toujours 50 N.

Faux.

La force garde sa valeur, mais pas sa direction : seule sa part horizontale fait avancer le chariot.

D. Elle devient nulle dès que la corde quitte le sol.

Faux.

Avec une corde inclinée, le chariot avance encore : la part horizontale n'est pas nulle.

Correction

Imagine le soleil juste au-dessus du chariot : la flèche de la force fait une ombre sur le sol. Cette ombre est la part utile de la force.

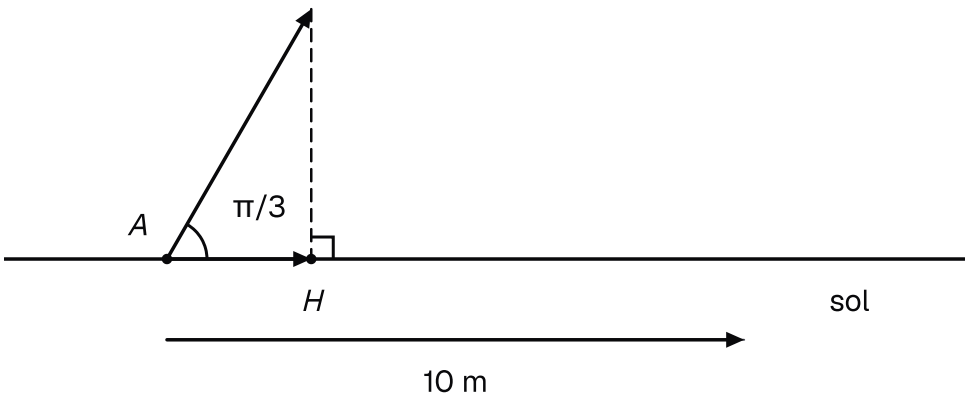
Avec une corde à $\frac{\pi}{3}$ du sol, elle mesure $50 \times \cos \frac{\pi}{3} = 25$ N.

Si la corde se lève, l'ombre raccourcit. Si la corde est verticale, l'ombre est nulle.

Cette ombre, multipliée par le déplacement, donne le travail de la force : $25 \times 10 = 250$ J, soit 250 joules.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs fait ce calcul.

Dans ce chapitre, il te sert à démontrer que deux droites sont perpendiculaires, et à calculer des longueurs, des angles et des aires.



L'ombre de la force sur le sol : la flèche de A jusqu'au pied H est la part horizontale, de 25 N, qui fait avancer le chariot.

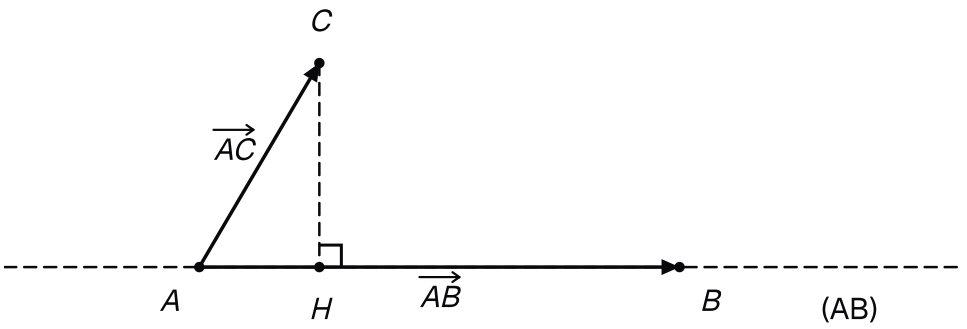
Le produit scalaire par la projection orthogonale

L'ombre d'un vecteur

Rappel du chapitre sur la projection. Le projeté orthogonal d'un point C sur une droite (d) est le point H de (d) tel que $(CH) \perp (d)$. Si C est sur (d), alors $H = C$.

En clair. Pour le chariot, l'ombre de la force est son projeté orthogonal sur le sol.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ suit la même idée : on projette C sur la droite (AB), puis on multiplie AB par la longueur de l'ombre AH.



L'ombre du vecteur AC sur la droite (AB) est le segment [AH] ; le point H est le pied de la perpendiculaire à (AB) menée par C.

Devine : Où tombe l'ombre ?

Soit ABC un triangle dont l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Où se trouve H ? Fais la figure sur ton cahier.

A. Sur le segment $[AB]$, entre A et B.

Faux.

C'est le cas d'un angle aigu en A et en B : ici, l'angle en A est obtus.

B. Au point A lui-même.

Faux.

Le projeté est A seulement si $(AC) \perp (AB)$, c'est-à-dire pour un angle droit.

C. Sur la droite (AB), au-delà de A.

Juste.

Juste : l'angle obtus fait partir $[AC)$ « vers l'arrière » de $[AB)$.

D. Sur la droite (AB), au-delà de B.

Faux.

Ce serait le cas d'un angle obtus en B, pas en A.

Correction

L'angle $\widehat{BAC}$ est obtus : la demi-droite $[AC)$ part « vers l'arrière » par rapport à $[AB)$.

Le projeté H de C est donc sur la droite (AB), au-delà de A. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont alors de sens contraires.

La définition qui suit en tient compte avec un signe.

La définition

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel**, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, défini par :
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ;
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires ;
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $H = A$.

On admet que ce réel ne dépend pas du choix du point A.

Exemple : dans un carré

Soit $ABCD$ un carré de côté 4, de sommets nommés dans cet ordre. Fais la figure.

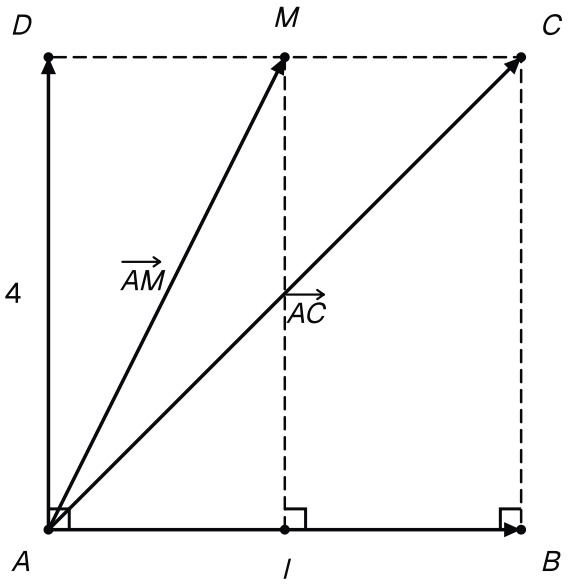
Produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, car $(CB) \perp (AB)$. Ici $H = B$, et $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que lui-même. Par projection :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = 16.$$

Produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. Le projeté de D sur (AB) est A. Par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Avec un milieu. Soit M le milieu de $[CD]$. Son projeté sur (AB) est le milieu I de $[AB]$, et $\overrightarrow{AI}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$. Par projection :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \times 2 = 8.$$



Dans le carré ABCD de côté 4, C se projette sur (AB) en B, D en A, et le milieu M de [CD] au milieu I de [AB].

Exemple : un produit scalaire négatif

Dans le même carré, calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Les deux vecteurs n'ont pas la même origine.

Soit E le symétrique de B par rapport à A. Alors :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

Le point E est sur (AB) : son projeté est E lui-même, et $AE = 4$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont de sens contraires. Par projection :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= -4 \times 4 \\ &= -16. \end{aligned}$$

La méthode et un piège

Méthode : calculer un produit scalaire par projection

1. **Ramène** les deux vecteurs à une même origine, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en remplaçant un vecteur par un vecteur égal si besoin.
2. **Trace** le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB).
3. **Compare** le sens de $\overrightarrow{AH}$ à celui de $\overrightarrow{AB}$.
4. **Écris** $AB \times AH$ pour un même sens, $-AB \times AH$ pour des sens contraires, et 0 si $H = A$.

Vérifie : Un autre carré

Soit $PQRS$ un carré de côté 2, de centre O.

Rappel : ses diagonales sont perpendiculaires, de même longueur $2\sqrt{2}$, et se coupent en leur milieu.

Que vaut $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ}$?

A. $4\sqrt{2}$

Faux.
C'est $PR \times PQ$: tu as multiplié les longueurs sans projeter Q sur (PR).

B. -4

Faux.
Le projeté O est sur $[PR]$: $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PR}$ ont le même sens, le signe est positif.

C. 0

Faux.
Les droites (PR) et (PQ) ne sont pas perpendiculaires : le projeté de Q n'est pas P.

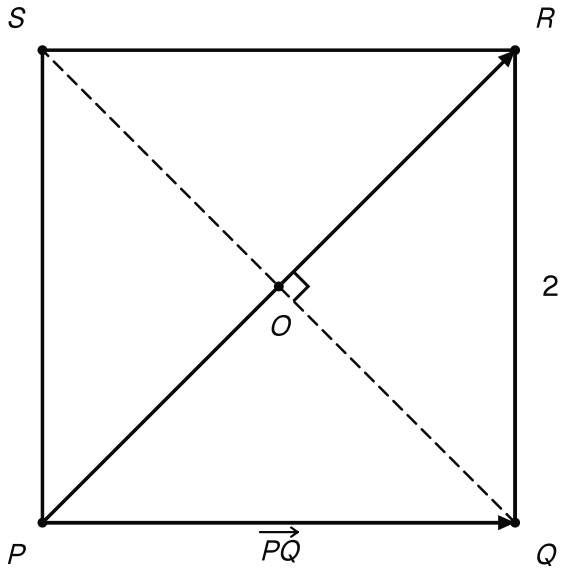
D. 4

Juste.
Juste : le projeté de Q sur (PR) est le centre O.

Correction
Le projeté orthogonal de Q sur (PR) est O, car $(QO) \perp (PR)$.

Le point O est le milieu de $[PR]$: $\overrightarrow{PO}$ a le même sens que $\overrightarrow{PR}$, et $PO = \sqrt{2}$. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} &= PR \times PO \\ &= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= 4.\end{aligned}$$



Le carré PQRS de côté 2 et son centre O, où se coupent les diagonales perpendiculaires, avec les deux vecteurs PR et PQ du produit demandé.

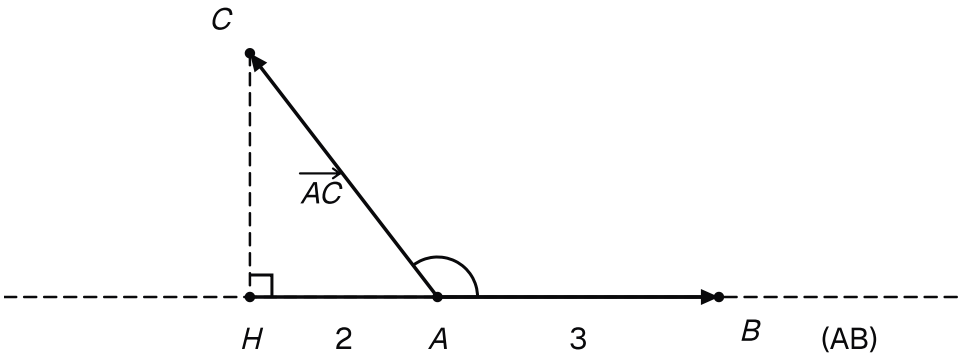
Attention : le signe

✗ « Le projeté H de C sur (AB) est au-delà de A, avec $AB = 3$ et $AH = 2$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 = 6$. »

✓ Ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires. Par projection :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 2 = -6.$$

Un produit scalaire peut être négatif : c'est le cas dès que l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.



Avec un angle BAC obtus, le pied H se trouve au-delà de A : AH = 2 et AB = 3, mais les vecteurs AH et AB sont de sens contraires.

Un nombre, pas un vecteur, puis à toi

Attention : un nombre, pas un vecteur

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **réel**.

Dans le carré $ABCD$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$: ce n'est pas une flèche.

✗ « $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ » n'a pas de sens : on ne fait pas le produit scalaire du réel 16 et d'un vecteur.

✓ En revanche, $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}=16\,\overrightarrow{AD}$ est un vecteur, de longueur 64.

À toi : Trois produits dans le carré

Soit $ABCD$ le carré de côté 4 et O son centre. Calcule par projection $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque produit, cherche l'origine commune, puis projette l'extrémité du second vecteur sur la droite portée par le premier.

Indice 2
Rappel : les diagonales du carré sont perpendiculaires, de longueur $4\sqrt{2}$, et se coupent en leur milieu O ; donc $OA=OC=2\sqrt{2}$.

Indice 3
Point délicat : C est sur la droite (OA), de l'autre côté de O ; compare bien les sens.

Réponse
Produit $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}$. Le projeté de O sur (BA) est le milieu I de $[AB]$, et $\overrightarrow{BI}$ a le même sens que $\overrightarrow{BA}$. Par projection :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}&=BA\times BI\\&=4\times 2=8.\end{aligned}$$

Produit $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. Les diagonales sont perpendiculaires : le projeté de B sur (OA) est O. Par projection, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

Produit $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$. Le point C est sur (OA) : son projeté est C, et $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires. Par projection :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=-OA\times OC\\&=-2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\\&=-8.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=8$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-8$.

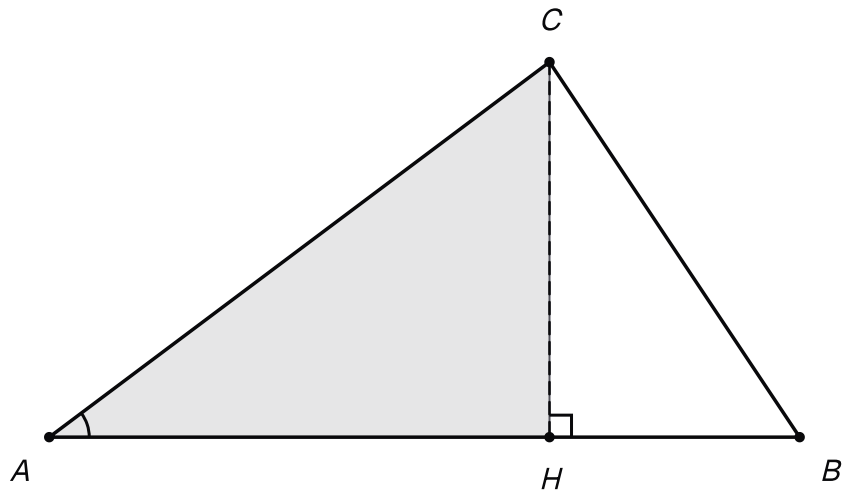
Expression trigonométrique, symétrie, carré scalaire

L'ombre et le cosinus

Rappel du collège. Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse.

En clair. Soit ABC un triangle d'angle $\widehat{BAC}$ aigu, et H le projeté de C sur (AB).

Le triangle AHC est rectangle en H : l'ombre AH est le côté adjacent à l'angle en A, et $[AC]$ est l'hypoténuse. L'ombre de la force du chariot se calculait de la même façon.



Le triangle AHC, rectangle en H, est teinté : l'ombre [AH] y est le côté adjacent à l'angle en A, et [AC] l'hypoténuse.

Devine : La longueur de l'ombre

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$, et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Que vaut AH ?

A. 5

Juste.

Juste : $AH = 10 \times \cos\dfrac{\pi}{3} = 5$.

B. $5\sqrt{3}$

Faux.

C'est $10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: tu as pris la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{6}$ au lieu de $\cos\dfrac{\pi}{3}$.

C. $\dfrac{3}{2}$

Faux.

Tu as pris la moitié de AB ; or l'ombre est celle de $[AC]$, l'hypoténuse du triangle AHC.

D. 10

Faux.

10 est l'hypoténuse AC : le côté AH est plus court.

Correction

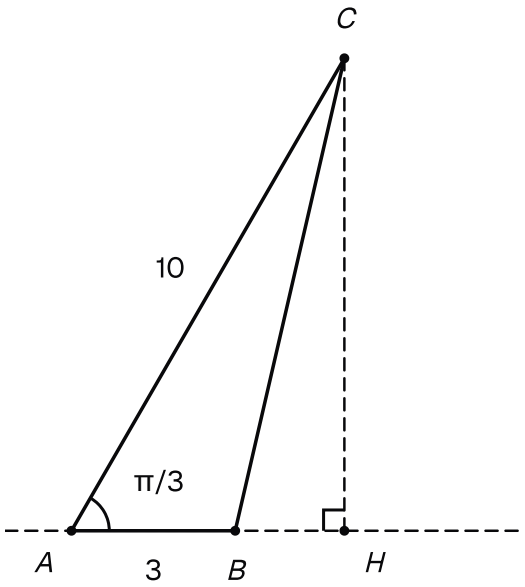
Le triangle AHC est rectangle en H, et son angle en A est l'angle $\widehat{BAC}$, aigu. Donc :

$$\begin{aligned} AH &= AC \times \cos\frac{\pi}{3} \\ &= 10 \times \frac{1}{2} = 5. \end{aligned}$$

Ici H est au-delà de B, sur la demi-droite $[AB)$: $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens. Par projection :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 5 = 15.$$

C'est exactement $AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3}$.



Les données de l'activité : AB = 3, AC = 10, un angle de π/3 en A, et H, le pied de la perpendiculaire à (AB) menée par C.

On devine une formule avec l'angle :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right). \end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai ? Pour un angle aigu, c'est le triangle rectangle AHC. Pour un angle obtus, H passe au-delà de A et un signe moins apparaît.

Rappel du chapitre de trigonométrie : pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Ce signe moins compense celui de la définition.

L'expression trigonométrique

Propriété : Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit A, B, C trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

On note $\|\vec{u}\|$ la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$: c'est la longueur AB pour tout représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$. Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où θ, compris entre 0 et π, est une mesure en radians de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et θ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

Étape 1. Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, la droite (AC) est perpendiculaire à (AB) en A, donc $H = A$. Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Étape 2. Si C appartient à la droite (AB), alors $H = C$, $AH = AC$, et $\theta = 0$ (même sens) ou $\theta = \pi$ (sens contraires). Le produit vaut $AB \times AC$ ou $-AB \times AC$, c'est-à-dire $AB \times AC \times \cos\theta$, car $\cos 0 = 1$ et $\cos\pi = -1$.

Étape 3. Sinon, $H \neq C$, et $H \neq A$ car $H = A$ donnerait $(AC) \perp (AB)$: le triangle AHC est rectangle en H. Si H appartient à la demi-droite $[AB)$, alors $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$, les sens sont les mêmes et $AH = AC \times \cos\theta$; donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos\theta$. Sinon, les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires, les sens sont contraires et $AH = AC \times \cos(\pi - \theta) = -AC \times \cos\theta$; donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = AB \times AC \times \cos\theta$.

Vérifie : L'angle du cas « au-delà de A »

Dans la preuve, lorsque H n'appartient pas à la demi-droite $[AB)$, quel angle du triangle rectangle AHC sert à calculer AH ?

A. L'angle $\widehat{HAC}$, de mesure θ.

Faux.

Quand H n'est pas sur $[AB)$, l'angle $\widehat{HAC}$ n'est plus $\widehat{BAC}$: c'est son supplémentaire.

B. L'angle $\widehat{AHC}$, qui est droit.

Faux.

Le cosinus d'un angle droit est nul : il ne donne pas la longueur cherchée.

C. L'angle $\widehat{HAC}$, de mesure $\pi - \theta$.

Juste.

Juste : $[AH)$ et $[AB)$ sont opposées, donc les angles en A sont supplémentaires.

D. L'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.

Faux.

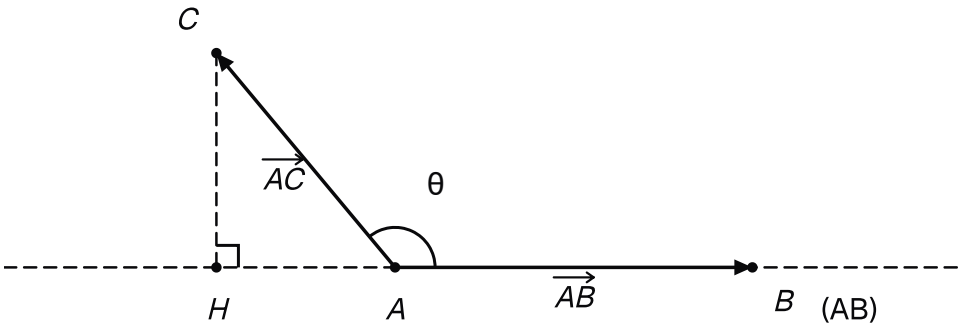
Cet angle n'est pas un angle du triangle AHC.

Correction

Le point H est sur la demi-droite opposée à $[AB)$. Les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires : $\widehat{HAC}$ mesure $\pi - \theta$, et il est aigu.

Dans le triangle AHC rectangle en H :

$$\begin{aligned} AH &= AC \times \cos(\pi - \theta) \\ &= -AC \times \cos\theta. \end{aligned}$$



Le cas de la preuve où H n'est pas sur la demi-droite [AB) : l'angle BAC, de mesure θ, est obtus, et H est placé au-delà de A.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **raisonne sur la position du projeté** H :

- si $H = A$, l'angle est droit ;
- si $H = C$, le point C est sur (AB), et l'angle est nul ou plat ;
- sinon, elle **se ramène au triangle rectangle** AHC.

Quand H n'est pas sur $[AB)$, l'angle $\widehat{HAC}$ mesure $\pi - \theta$: les deux signes moins se compensent.

Une seule formule couvre donc tous les cas : angle nul, aigu, droit, obtus ou plat.

Exemple : le triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6. Ses angles mesurent $\dfrac{\pi}{3}$.

Produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. D'après l'expression trigonométrique :

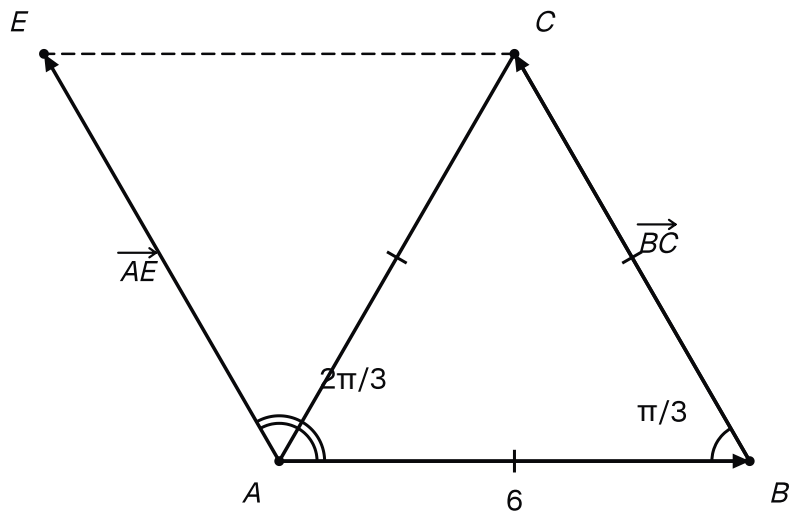
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 \times 6 \times \cos\frac{\pi}{3} \\ &= 18. \end{aligned}$$

Contrôle par projection : le projeté de C sur (AB) est le milieu de $[AB]$, de même sens, et $6 \times 3 = 18$.

Produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. Attention à l'angle. Soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$: $ABCE$ est un parallélogramme.

L'angle $\widehat{BAE}$ est le supplémentaire de $\widehat{ABC}$: il mesure $\dfrac{2\pi}{3}$. D'après l'expression trigonométrique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 6 \times 6 \times \cos\frac{2\pi}{3} \\ &= -18.\end{aligned}$$



Le triangle équilatéral ABC de côté 6 et le point E tel que le vecteur AE égale le vecteur BC : l'angle BAE mesure 2π/3.

Symétrie et carré scalaire

En clair. La définition projette C sur (AB). Échanger les vecteurs oblige à projeter B sur (AC) : le résultat est-il le même ?

Dans le carré $ABCD$ de côté 4, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$. Le projeté de B sur (AC) est le centre O, de même sens. Par projection :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 16.$$

Pourquoi est-ce vrai ? L'expression trigonométrique emploie deux longueurs et un angle. Ils ne changent pas quand on échange les vecteurs.

Propriété : Symétrie et carré scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Ce réel s'appelle le **carré scalaire** de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$.

En particulier, pour deux points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$: le produit scalaire permet d'exprimer les distances.

Démonstration

Étape 1. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, les deux produits $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$ sont nuls par définition. Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. D'après l'expression trigonométrique, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = AC \times AB \times \cos\left(\widehat{CAB}\right)$. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont le même angle : les deux réels sont égaux.

Étape 2. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 = \|\vec{u}\|^2$. Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ avec $A \neq B$. Le projeté orthogonal de B sur (AB) est B lui-même, et $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que lui-même. Par définition du produit scalaire, $\vec{u} \cdot \vec{u} = AB \times AB = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Vérifie : Le carré scalaire

Dans la preuve de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$, quel est le projeté orthogonal de B sur la droite (AB) ?

A. Le point B lui-même.

Juste.

Juste : un point de la droite est son propre projeté.

B. Le point A.

Faux.

Le projeté serait A pour un point de la perpendiculaire à (AB) en A.

C. Le milieu de $[AB]$.

Faux.

Le milieu n'apparaît pas : B est déjà sur la droite.

D. Il n'en existe pas.

Faux.

Tout point a un projeté orthogonal sur une droite ; ici, c'est un cas simple.

Correction

Le point B appartient à la droite (AB) : son projeté orthogonal est B. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a le même sens que lui-même.

Par définition :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2.$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour la symétrie, la preuve passe par **l'expression trigonométrique**, où les deux vecteurs jouent le même rôle.

Pour le carré scalaire, elle projette B sur (AB) : le projeté est B lui-même.

Retiens la conséquence : une longueur au carré est un produit scalaire,

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2.$$

C'est ce qui permet de calculer des distances.

Exemple : distances et carré scalaire

Reprends le triangle équilatéral ABC de côté 6.

- D'après le carré scalaire, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 36$, et $\|\overrightarrow{AB}\| = 6$.
- D'après la symétrie, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ forment un angle plat. D'après l'expression trigonométrique, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 6 \times 6 \times \cos \pi = -36$: ce n'est pas un carré scalaire.

La méthode, puis à toi

Méthode : calculer un produit scalaire avec un angle

1. **Place** les deux vecteurs à la même origine : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Lis** les longueurs AB et AC, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ formé par ces vecteurs, entre 0 et π.
3. **Calcule** $AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$ avec les valeurs remarquables du cosinus.
4. **Contrôle** le signe : positif pour un angle aigu, négatif pour un angle obtus.

À toi : Deux calculs avec un angle

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Calcule ensuite $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et si les deux vecteurs forment un angle de $\dfrac{\pi}{6}$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique l'expression trigonométrique, une fois pour chaque produit.

Indice 2

Rappel : $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Indice 3

Point délicat : l'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ est obtus ; le premier produit est négatif.

Réponse

Premier produit. D'après l'expression trigonométrique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&= 4\times 3\times\cos\frac{3\pi}{4}\\&= 12\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&= -6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Le signe est négatif, car l'angle est obtus.

Second produit. De même :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 2\times 5\times\cos\frac{\pi}{6}\\&= 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&= 5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6\sqrt{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\sqrt{3}$.

Produit scalaire : règles de calcul et identités remarquables

Calculer comme avec des nombres

En clair. Pour tous réels a, b et c, tu développes $a(b+c) = ab + ac$. Avec les produits scalaires, on veut faire de même : développer, factoriser, sortir un nombre.

Une différence demeure : le résultat d'un produit scalaire est un réel, jamais un vecteur.

Rappel de l'exemple : dans le triangle équilatéral ABC de côté 6, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$.

Devine : Développer comme avec des nombres

Dans ce triangle équilatéral, si l'on développe comme avec des nombres, que vaut $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$?

A. 36

Faux.

C'est seulement $\overrightarrow{AB}^2$: il manque le terme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

B. 18

Faux.

C'est seulement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$: il manque le carré scalaire $\overrightarrow{AB}^2$.

C. 54

Juste.

Juste : $36 + 18 = 54$.

D. 72

Faux.

C'est 6×12 : tu as additionné les longueurs, comme si les deux vecteurs avaient la même direction.

Correction

On développe :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

D'après le carré scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 36$. On obtient $36 + 18 = 54$.

L'énoncé qui suit autorise ce développement.

Les règles de calcul

Propriété : Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
- $(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\,\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'emploies pour développer, factoriser et sortir un réel d'un produit scalaire.

Exemple : développer dans le carré

Rappel du chapitre sur les vecteurs. La relation de Chasles permet de passer par un point intermédiaire. Dans le carré $ABCD$ de côté 4, elle donne $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= 16 + 0 = 16.\end{aligned}$$

En effet, $\overrightarrow{AB}^2 = 16$ d'après le carré scalaire. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et que le projeté de D sur (AB) est A, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ par projection.

On retrouve le résultat de la projection. De même, d'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(2\,\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right) &= -2 \times 16 \\ &= -32.\end{aligned}$$

Le carré d'une somme

Devine : Une somme de deux vecteurs

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. D'après l'expression trigonométrique, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}$. Que vaut $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$?

A. 2

Faux.

C'est $1 + 1$: tu as oublié les termes du milieu, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

B. 3

Juste.

Juste : $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = 3$.

C. $\dfrac{5}{2}$

Faux.

C'est $1 + \dfrac{1}{2} + 1$: en développant, le terme du milieu apparaît deux fois.

D. 4

Faux.

C'est $(1 + 1)^2$: la norme d'une somme n'est pas la somme des normes.

Correction

D'après le carré scalaire, puis en développant avec les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &\quad + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

L'identité qui suit écrit ce calcul en général.

En clair. Pour tous réels a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Les vecteurs suivent les mêmes identités, avec des produits scalaires.

Pourquoi est-ce vrai ? C'est le calcul de l'activité, fait pour deux vecteurs quelconques : les deux termes du milieu se rassemblent.

Les identités remarquables

Propriété : Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

En particulier, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Démonstration

Étape 1. D'après les règles de calcul, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$. Par symétrie, $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$: on obtient la première identité.

Étape 2. D'après les règles de calcul, $(-\vec{v})\cdot(-\vec{v}) = \vec{v}^2$ et $\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = -\,\vec{u}\cdot\vec{v}$. La première identité, appliquée à $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, donne la deuxième.

Étape 3. De même, $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$, par symétrie.

Étape 4. D'après le carré scalaire, la deuxième identité s'écrit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$; on isole $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Vérifie : L'argument du terme du milieu

Dans la preuve, quelle propriété transforme $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}$ en $2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$?

A. Le carré scalaire.
Faux.
Le carré scalaire porte sur $\vec{u}\cdot\vec{u}$, pas sur deux vecteurs différents.

B. Les règles de calcul.
Faux.
Elles ont servi à développer ; elles n'échangent pas l'ordre des vecteurs.

C. L'expression trigonométrique.
Faux.
Aucun angle n'intervient dans cette étape.

D. La symétrie.
Juste.
Juste : $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$.

Correction

La symétrie du produit scalaire donne $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

La somme des deux termes du milieu vaut donc $2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$, comme $ab + ba = 2ab$ pour des nombres.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **développe**, puis emploie la **symétrie** pour regrouper $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u}$ en $2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$.

La deuxième identité est la première, appliquée à $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

La dernière formule isole $\vec{u} \cdot \vec{v}$: elle calcule un produit scalaire à partir de trois longueurs.

Exemple : un produit scalaire à partir des longueurs

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

D'après la relation de Chasles :

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}.$$

D'après les identités remarquables :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(25 + 64 - 49)\\ &= 20.\end{aligned}$$

D'après l'expression trigonométrique, $20 = 5 \times 8 \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$. Donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{1}{2}$, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

La méthode, un piège, le coin devoir

Méthode : calculer un produit scalaire avec des longueurs

1. **Vérifie** que tu connais les trois côtés du triangle ABC.
2. **Écris**, d'après les identités remarquables, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$; le côté soustrait est celui qui fait face à A.
3. **Remplace**, puis **contrôle** le signe : un résultat négatif signale un angle $\widehat{BAC}$ obtus.

Attention : le terme du milieu

✗ « Dans le triangle équilatéral de côté 6, $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2 + AC^2 = 72$. »

✓ Il manque le terme $2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36$, nul seulement si $(AB)\perp(AC)$. D'après les identités remarquables :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2 &= 36+36+36\\ &= 108.\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ vaut 18, et non $AB\times AC = 36$.

À toi : Avec trois longueurs

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 8$. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est-il aigu ou obtus ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode par les longueurs à chacun des deux produits.
Indice 2
Pour $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, calcule $\frac{1}{2}(16+36-64)$.
Indice 3
Point délicat : pour $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, l'origine est B ; le côté soustrait est $[AC]$, en face de B.

Réponse
Produit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. D'après les identités remarquables :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}(16+36-64)\\ &= -6.\end{aligned}$$

Produit $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. De même, au sommet B :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\big(BA^2+BC^2\\ &\qquad -AC^2\big)\\ &= \frac{1}{2}(16+64-36)\\ &= 22.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 22$. Le premier produit est négatif : l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Remarque **: Coin devoir : rédiger un calcul par les longueurs**

En devoir, annonce la méthode, écris la formule, puis remplace.

Pour le triangle de côtés 5, 8 et 7, écris : « D'après les identités remarquables, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(25 + 64 - 49) = 20$. »

Termine par un contrôle : le résultat est positif, donc l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

Sans le nom de la propriété ou sans conclusion, la rédaction perd des points.

Vecteurs orthogonaux

Un angle droit, un produit nul

Rappel du collège. Deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

En clair. Dans le carré $ABCD$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$: le projeté de D sur (AB) tombe en A. Avec l'angle, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Un angle droit donne donc un produit scalaire nul. La réciproque est-elle vraie ?

Devine : Un produit nul

Soit A, B, C trois points tels que $A \neq B$, $A \neq C$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Que peux-tu dire du triangle ABC ?

A. Il est isocèle en A.

Faux.

Un produit nul ne dit rien des longueurs AB et AC.

B. Il est rectangle en A.

Juste.

Juste : $AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$ impose $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$.

C. Il est rectangle en B.

Faux.

Les deux vecteurs partent de A : c'est l'angle en A qui compte.

D. Il est aplati.

Faux.

Pour un triangle aplati, l'angle en A vaut 0 ou π, et le produit n'est pas nul.

Correction

D'après l'expression trigonométrique :

$$AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0.$$

Les longueurs AB et AC ne sont pas nulles, donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 0$.

> Entre 0 et π, seul $\dfrac{\pi}{2}$ convient : le triangle est rectangle en A.

Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

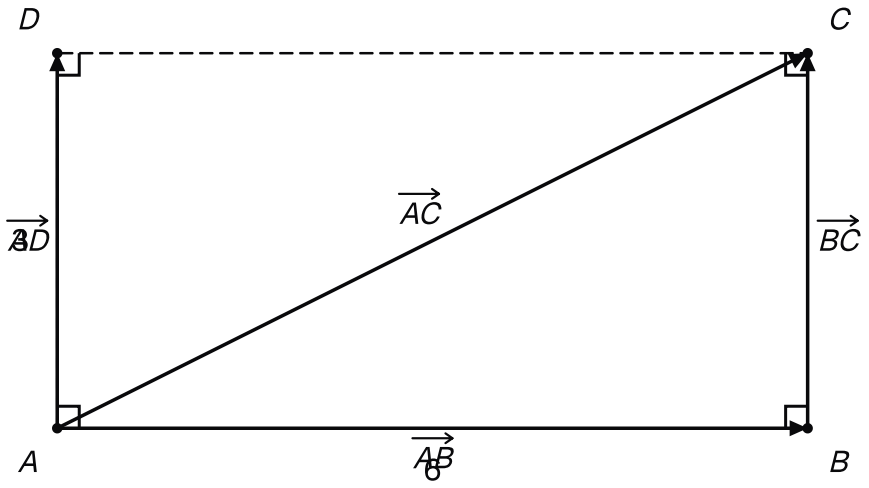
Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si $\vec{u} = \vec{0}$, ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur. Pour deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines quelconques, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ signifie que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exemple : dans un rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Fais la figure.

- Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.
- Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, on a aussi $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, bien que ces deux vecteurs n'aient pas la même origine.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux : l'angle $\widehat{BAC}$ n'est pas droit.
- Le vecteur $\overrightarrow{CC}$ est nul : il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, comme à tout vecteur.



Le rectangle ABCD, avec AB = 6 et AD = 3 : AB est orthogonal à AD et à BC, mais pas à la diagonale AC.

Le test du produit nul

Le produit scalaire va servir de test d'orthogonalité.

Pourquoi est-ce vrai ? Un produit nul, c'est une ombre réduite au point A : la preuve qui suit le vérifie dans les deux sens.

Propriété : Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

Étape 1. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, les deux vecteurs sont orthogonaux par définition, et leur produit scalaire est nul par définition.

Étape 2. Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, avec $A \neq B$ et $A \neq C$, et on note H le projeté orthogonal de C sur (AB). Par définition du produit scalaire, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut $AB \times AH$, $-AB \times AH$, ou 0 lorsque $H = A$. Comme $AB \neq 0$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $AH = 0$, c'est-à-dire $H = A$.

Étape 3. Enfin, $H = A$ signifie que le projeté orthogonal de C sur (AB) est A, c'est-à-dire que la droite (AC) est perpendiculaire à (AB). Par définition, cela signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Vérifie : Le rôle d'une hypothèse

Dans la preuve, pourquoi l'égalité $AB \times AH = 0$ entraîne-t-elle $AH = 0$?

A. Parce que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.
Faux.
C'est ce que l'on veut démontrer : on ne peut pas s'en servir.

B. Parce que AH est une longueur positive.
Faux.
Une longueur positive peut donner un produit nul si l'autre facteur est nul.

C. Parce que $A \neq B$, donc $AB \neq 0$.
Juste.
Juste : un produit de deux réels est nul si l'un d'eux l'est, et AB ne l'est pas.

D. Parce que H est sur la droite (AB).
Faux.
Tout projeté sur (AB) est sur (AB) : cela ne force pas $H = A$.

Correction

Un produit de deux réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Ici $A \neq B$, donc $AB \neq 0$: il reste $AH = 0$, c'est-à-dire $H = A$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

> Tout se joue sur la **position du projeté** : le produit est nul si et seulement si $H = A$, c'est-à-dire si l'angle en A est droit.
>
> Le cas d'un vecteur nul se traite à part, par la définition.
>
> Retiens l'usage : pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de montrer qu'un produit scalaire est nul.

Exemple : démontrer une perpendicularité

Dans le rectangle $ABCD$, soit E le point de $[AB]$ tel que $AE = \dfrac{3}{2}$. Montrons que $(DE) \perp (AC)$.

Décomposition. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Développement. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &\quad + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Calcul des termes.

- Le premier et le dernier produit sont nuls, car $(DA) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (BC)$.
- Comme $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$, on a $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = -DA^2 = -9$.
- Par projection, de même sens, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2} \times 6 = 9$.

Conclusion. La somme vaut $0 - 9 + 9 + 0 = 0$: d'après la caractérisation de l'orthogonalité, $(DE) \perp (AC)$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

1. **Décompose** chaque vecteur par la relation de Chasles, en passant par des points où les angles sont connus.
2. **Développe** le produit avec les règles de calcul.
3. **Calcule** chaque produit : par projection en comparant les sens, avec l'angle, ou zéro pour un angle droit.
4. **Conclus** avec la caractérisation de l'orthogonalité si la somme est nulle.

Attention : un produit nul

✗ « Dans le rectangle, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, donc $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. »

✓ Ces deux vecteurs ne sont pas nuls : ils sont orthogonaux.

Autre piège : le projeté de C sur (AB) est B, de même sens. Par projection, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 36$. Pourtant $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB}$: on ne « simplifie » pas par un vecteur.

À toi : Deux droites dans le carré

Soit $ABCD$ le carré de côté 4, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Démontre que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$, puis développe.
Indice 2
Deux des quatre produits sont nuls, car ils portent sur des côtés perpendiculaires.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont de sens contraires ; ce produit est négatif.

Réponse
Décomposition. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$.

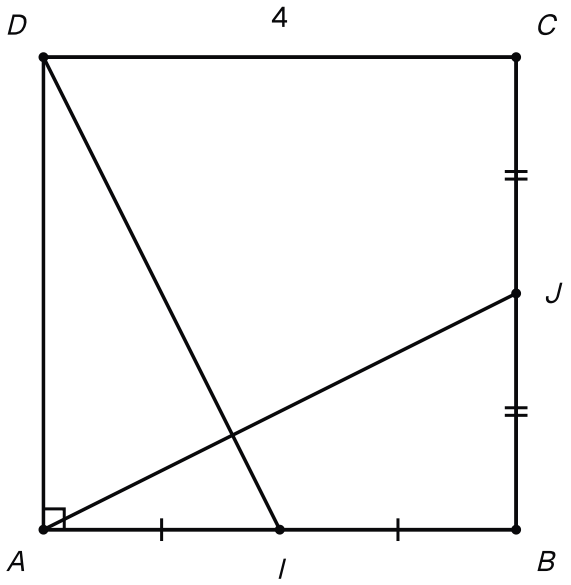
Développement. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &\quad + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} \\ &\quad + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &\quad + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI}.\end{aligned}$$

Calcul des termes.

- Le premier et le dernier produit sont nuls, car $(AB) \perp (DA)$ et $(BJ) \perp (AI)$.
- Par projection, de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 4 \times 2 = 8$.
- Comme $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, les règles de calcul donnent $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$.

Conclusion. La somme vaut $0 + 8 - 8 + 0 = 0$: d'après la caractérisation de l'orthogonalité, les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.



Le carré ABCD de côté 4 avec I au milieu de [AB] et J au milieu de [BC] : les segments [AJ] et [DI] sont ceux dont on étudie la position.

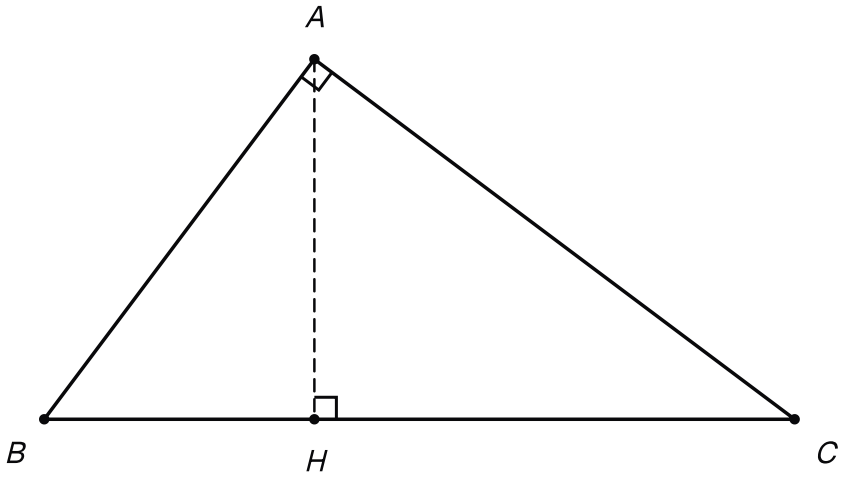
Relations métriques dans le triangle rectangle

La hauteur coupe l'hypoténuse

Rappel du collège. Dans un triangle ABC rectangle en A, le théorème de Pythagore donne $BC^2 = AB^2 + AC^2$. La hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A.

En clair. Trace cette hauteur : son pied H coupe l'hypoténuse $[BC]$ en deux morceaux, $[BH]$ et $[HC]$.

Ces morceaux, la hauteur et les côtés sont liés par des égalités simples. Le produit scalaire les fournit, en projetant de deux façons.



La hauteur issue du sommet A de l'angle droit : son pied H coupe l'hypoténuse [BC] en deux morceaux, [BH] et [HC].

Devine : Une projection dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. Que vaut $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

A. 60

Faux.
C'est $BA \times BC$: il faut d'abord projeter C sur (BA).

B. 48

Faux.
C'est $AB \times AC$: ces deux vecteurs ne sont pas ceux du produit.

C. 100

Faux.
C'est BC^2 : le premier vecteur est $\overrightarrow{BA}$, pas $\overrightarrow{BC}$.

D. 36

Juste.
Juste : le projeté de C sur (BA) est A.

Correction
L'angle en A est droit : le projeté orthogonal de C sur (BA) est A. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a le même sens que lui-même.

Par projection :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BA = 36.$$

Ce même produit se calcule d'une autre façon.

Pourquoi est-ce vrai ? Par symétrie, on peut aussi projeter A sur (BC) : le pied H de la hauteur apparaît, et le signe du produit dira où il se trouve.

Les relations métriques

Propriété : Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Alors H appartient au segment $[BC]$, et :

- $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$;
- $AH^2 = HB \times HC$;
- $AH \times BC = AB \times AC$.

Démonstration

Étape 1. Comme $(AC) \perp (AB)$, le projeté orthogonal de C sur (BA) est A. Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BA = BA^2$.

Étape 2. Par symétrie, ce réel vaut aussi $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, et le projeté orthogonal de A sur (BC) est H. Or $BA^2 > 0$, car $A \neq B$: le produit n'est ni nul ni négatif. Par définition, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont le même sens, et $BA^2 = BC \times BH$. De même, $CA^2 = CB \times CH$, et $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont le même sens : H appartient à $[BC]$, et $H \neq B$.

Étape 3. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, $AH^2 = AB^2 - BH^2 = BH \times BC - BH^2 = BH \times (BC - BH) = BH \times HC$, car H appartient à $[BC]$.

Étape 4. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\, AB \times AC$ et $\frac{1}{2}\, AH \times BC$: donc $AH \times BC = AB \times AC$.

Vérifie : La position du pied de la hauteur

Dans la preuve, pourquoi le point H est-il sur le segment $[BC]$?

A. Parce que H est le milieu de $[BC]$.

Faux.

Ce n'est pas vrai en général : avec 6, 8 et 10, BH et HC sont différents.

B. Parce que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ sont strictement positifs.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{BH}$ a le sens de $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{CH}$ celui de $\overrightarrow{CB}$.

C. Parce que l'énoncé le suppose dès le départ.

Faux.

L'énoncé l'affirme : la preuve le démontre.

D. Parce que le théorème de Pythagore l'impose.

Faux.

Pythagore sert à l'étape suivante, pour AH^2, pas pour la position de H.

Correction

Le produit $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ vaut BA^2, strictement positif car $A \neq B$: il n'est ni nul ni négatif.

Par définition, $\overrightarrow{BH}$ a donc le sens de $\overrightarrow{BC}$. De même, $\overrightarrow{CH}$ a le sens de $\overrightarrow{CB}$.

Vu de B, le point H est du côté de C ; vu de C, il est du côté de B. Il est donc entre B et C.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **calculer deux fois le même produit scalaire**, en projetant une fois C sur (BA), une fois A sur (BC).

Le signe du produit, strictement positif, place H sur le segment $[BC]$: on le démontre, on ne le suppose pas.

Ensuite, Pythagore dans le triangle ABH donne AH^2. Deux calculs de l'aire donnent $AH \times BC$.

Exemple : le triangle de côtés six, huit et dix

Reprends le triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. D'après les relations métriques dans le triangle rectangle :

- $BH = \dfrac{BA^2}{BC} = \dfrac{36}{10} = \dfrac{18}{5}$;
- $CH = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{64}{10} = \dfrac{32}{5}$;
- $AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{48}{10} = \dfrac{24}{5}$.

Contrôle des segments : $\dfrac{18}{5} + \dfrac{32}{5} = 10$.

Contrôle de la hauteur : $AH^2 = \dfrac{576}{25}$ et $HB \times HC = \dfrac{18}{5} \times \dfrac{32}{5} = \dfrac{576}{25}$.

La méthode, puis à toi

Méthode : calculer des longueurs dans un triangle rectangle

1. **Trouve** l'angle droit, en A, et le pied H de la hauteur issue de ce sommet.
2. **Choisis** la relation métrique qui relie la longueur cherchée à deux longueurs connues.
3. **Calcule**, puis **contrôle** avec le théorème de Pythagore dans l'un des triangles rectangles de la figure.

À toi : Un autre triangle rectangle

Soit PQR un triangle rectangle en P, et K le pied de la hauteur issue de P, avec $QK = 1$ et $KR = 4$. Calcule PK, puis PQ et PR.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique les relations métriques au triangle PQR : l'angle droit est en P, l'hypoténuse est $[QR]$.
Indice 2
Pour PK : $PK^2 = KQ \times KR$; pour PQ : $PQ^2 = QK \times QR$.
Indice 3
Point délicat : le pied K est sur le segment $[QR]$, donc $QR = QK + KR$.

Réponse
D'après les relations métriques dans le triangle rectangle, K appartient au segment $[QR]$, donc $QR = QK + KR = 1 + 4 = 5$.

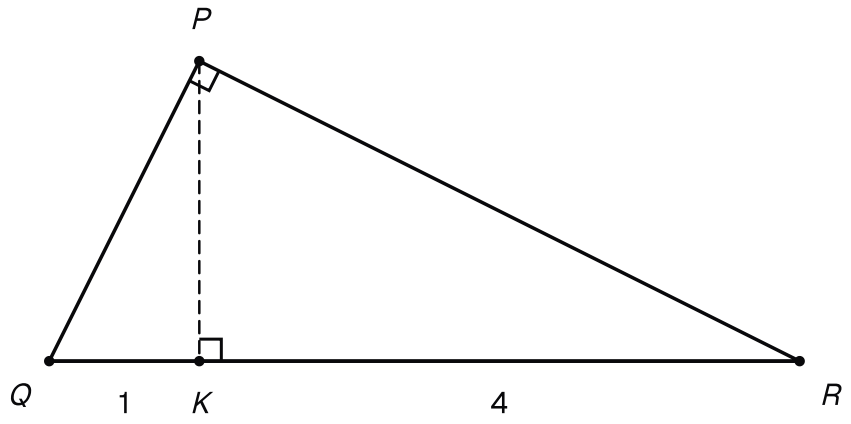
Hauteur. $PK^2 = KQ \times KR = 1 \times 4 = 4$, donc $PK = 2$.

Côtés.

- $PQ^2 = QK \times QR = 1 \times 5 = 5$, donc $PQ = \sqrt{5}$.
- $PR^2 = RK \times RQ = 4 \times 5 = 20$, donc $PR = 2\sqrt{5}$.

Contrôle. Par Pythagore, $PQ^2 + PR^2 = 5 + 20 = 25 = QR^2$. Et $PK \times QR = 10 = PQ \times PR$.

Conclusion. $PK = 2$, $PQ = \sqrt{5}$ et $PR = 2\sqrt{5}$.



Le triangle PQR rectangle en P et le pied K de la hauteur menée de P, qui découpe [QR] en QK = 1 et KR = 4.

Théorème de la médiane

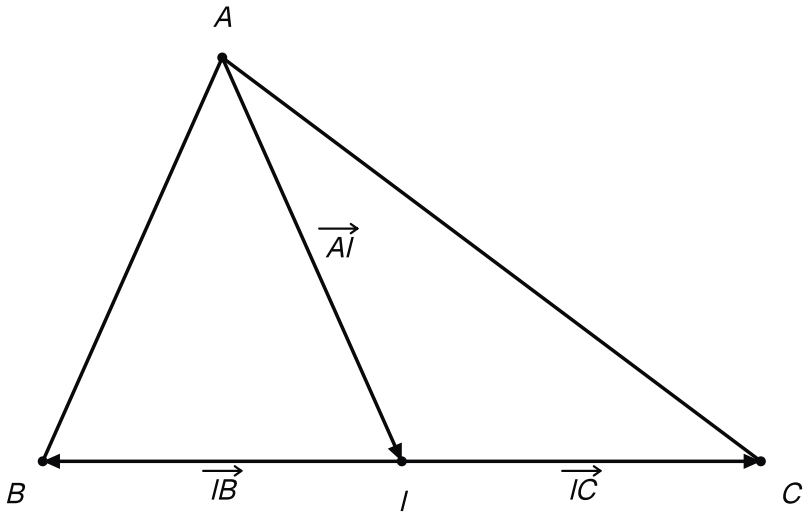
Passer par le milieu

Rappel du collège. Une médiane d'un triangle joint un sommet au milieu du côté opposé.

Rappel du calcul vectoriel. Si I est le milieu de $[BC]$, alors $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$.

En clair. Pour relier AB, AC et la médiane $[AI]$, on passe par le milieu I : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même partie $\overrightarrow{AI}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les identités remarquables relient alors leurs carrés à AI et à IB.



La médiane [AI] du triangle ABC : partis du milieu I, les vecteurs IB et IC sont opposés, et le vecteur AI est commun aux deux chemins vers B et vers C.

Devine : Une relation à deviner

Dans le carré $ABCD$ de côté 4, soit I le milieu de $[BC]$.

Par Pythagore, $AB^2 + AC^2 = 16 + 32 = 48$, $AI^2 = 16 + 4 = 20$, et $BC^2 = 16$.

Quelle égalité est vérifiée ?

A. $AB^2 + AC^2 = AI^2 + BC^2$

Faux.

Ici, $20 + 16 = 36$, et non 48.

B. $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + BC^2$

Faux.

Ici, $40 + 16 = 56$, et non 48.

C. $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

Juste.

Juste : $40 + 8 = 48$.

D. $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2$

Faux.

Ici, $2 \times 20 = 40$, et non 48.

Correction

On teste chaque égalité avec 48, 20 et 16. Seule celle qui contient $\dfrac{BC^2}{2}$ convient :

$$2 \times 20 + \frac{16}{2} = 40 + 8 = 48.$$

L'énoncé qui suit affirme que cette égalité est vraie dans tout triangle, et même pour tout point A du plan.

Le théorème de la médiane

Théorème : Théorème de la médiane

Soit B et C deux points distincts, I le milieu du segment $[BC]$ et A un point du plan. Alors

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$. Comme I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$ et $IB = \dfrac{BC}{2}$.

Étape 2. D'après le carré scalaire et les identités remarquables,

$$AB^2 + AC^2 = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\right)^2 = \left(AI^2 + 2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2\right) + \left(AI^2 - 2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + IB^2\right) = 2\,AI^2 + 2\,IB^2,$$

et $2\,IB^2 = 2 \times \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{BC^2}{2}$.

Étape 3. De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\right) = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

Vérifie : Les termes qui disparaissent

Dans la preuve, pourquoi les termes en $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ disparaissent-ils de la somme $AB^2 + AC^2$?

A. Ils apparaissent deux fois, avec des signes contraires.

Juste.

Juste : $+2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ dans un carré, $-2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ dans l'autre.

B. La médiane $[AI]$ est perpendiculaire à $[BC]$.

Faux.

C'est faux en général : la médiane n'est une hauteur que dans des cas particuliers.

C. Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est le vecteur nul.

Faux.

$IB = \dfrac{BC}{2}$, qui n'est pas nul car $B \neq C$.

D. Le produit $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ vaut toujours 0.

Faux.

Ce produit n'est pas nul en général : il disparaît pour une autre raison.

Correction

D'après les identités remarquables :

- $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$ contient $+2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$;
- $\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}\right)^2$ contient $-2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$.

Dans la somme, ces deux termes s'annulent, quelle que soit la position de A.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **passe par le milieu** I grâce à la relation de Chasles. Les deux vecteurs s'écrivent $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}$.

En additionnant leurs carrés, les termes $2\,\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB}$ se compensent. Leur produit scalaire est une différence de deux carrés.

Il ne reste que AI et $IB=\dfrac{BC}{2}$.

Exemple : la longueur d'une médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB=7$, $AC=9$ et $BC=8$, et I le milieu de $[BC]$. Fais la figure.

D'après le théorème de la médiane :

$$49+81=2\,AI^2+\frac{64}{2}.$$

Donc $2\,AI^2=130-32=98$. Ainsi $AI^2=49$, et $AI=7$, car une longueur est positive.

Un produit, un piège, puis à toi

Exemple : un produit scalaire par la médiane

Dans le même triangle, d'après le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AI^2-\frac{BC^2}{4}\\&=49-16=33.\end{aligned}$$

Contrôle par les longueurs : d'après les identités remarquables, $\dfrac{1}{2}(49+81-64)=33$.

Le produit est positif : l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

Attention : la moitié du carré du côté

✗ « $AB^2+AC^2=2\,AI^2+BC^2$, donc $130=2\,AI^2+64$ et $AI^2=33$. »

✓ Le carré du côté $[BC]$ est **divisé par** 2 : $130 = 2\,AI^2 + 32$, d'où $AI^2 = 49$. Le point I est le milieu du côté opposé à A.

Contrôle sur le carré : $2\,AI^2 + BC^2$ donnait 56 au lieu de 48.

À toi : Une autre médiane

Soit ABC le triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$, et J le milieu de $[AC]$. Calcule la longueur BJ de la médiane issue de B, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ par le théorème de la médiane.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique le théorème de la médiane au point B et au segment $[AC]$.
Indice 2
Calcule $BA^2 + BC^2 = 25 + 49$ et $\dfrac{AC^2}{2} = 32$.
Indice 3
Point délicat : le côté divisé est $[AC]$, opposé à B ; pour le produit, on divise AC^2 par 4.

Réponse
Médiane. D'après le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned} BA^2 + BC^2 \\ = 2\,BJ^2 + \frac{AC^2}{2}, \end{aligned}$$

soit $74 = 2\,BJ^2 + 32$. Donc $BJ^2 = 21$ et $BJ = \sqrt{21}$.

Produit scalaire. De même :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= BJ^2 - \frac{AC^2}{4} \\ &= 21 - 16 = 5. \end{aligned}$$

Contrôle par les longueurs : $\dfrac{1}{2}(25 + 49 - 64) = 5$.

Conclusion. $BJ = \sqrt{21}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5$.

Théorème d'Al Kashi

Quand l'angle n'est plus droit

En clair. Dans un triangle ABC rectangle en A, Pythagore donne BC^2.

Garde maintenant AB et AC, et fais varier l'angle en A. Que devient le côté $[BC]$?

Pour répondre, il faut une formule qui corrige Pythagore par un terme qui dépend de l'angle.

Devine : Ouvrir l'angle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, que peux-tu dire de BC ?

A. $BC > 5$

Juste.

Juste : en ouvrant l'angle, on éloigne C de B.

B. $BC < 5$

Faux.

C'est le cas d'un angle aigu : le triangle se referme.

C. $BC = 5$

Faux.

$BC = 5$ correspond à l'angle droit, d'après Pythagore.

D. On ne peut rien dire.

Faux.

Le signe du cosinus suffit à comparer BC^2 à 25.

Correction

Avec un angle droit, $BC^2 = 9 + 16 = 25$, donc $BC = 5$.

Le théorème qui suit donne :

$$BC^2 = 25 - 24\cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Pour un angle obtus, le cosinus est négatif : $BC^2 > 25$, donc $BC > 5$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le côté $[BC]$ s'écrit avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: son carré scalaire fait apparaître le produit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc le cosinus de l'angle en A.

Le théorème d'Al Kashi

Théorème : Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle. Alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, on retrouve le théorème de Pythagore.

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Étape 2. D'après le carré scalaire et les identités remarquables,

$$BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 - 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2.$$

Étape 3. Comme ABC est un triangle, $A \neq B$ et $A \neq C$. Par symétrie et d'après l'expression trigonométrique, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$. En remplaçant, on obtient la formule. Si l'angle est droit, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et la formule devient $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$?

A. D'une projection orthogonale de C sur (AB).

Faux.

Aucune projection n'intervient dans cette étape.

B. Du théorème de la médiane.

Faux.

Aucun milieu n'intervient dans cette preuve.

C. De la relation de Chasles, en passant par A.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

D. De l'expression trigonométrique.

Faux.

Elle sert plus loin, pour le terme du milieu.

Correction

D'après la relation de Chasles, on va de B à C en passant par A : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, on obtient $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Retiens l'enchaînement : **Chasles, carré scalaire, identité remarquable, expression trigonométrique**.

Le théorème d'Al Kashi est la formule du produit scalaire par les longueurs, où le produit est remplacé par $AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Pour un angle droit, le cosinus est nul : on retrouve Pythagore.

Exemple : le troisième côté

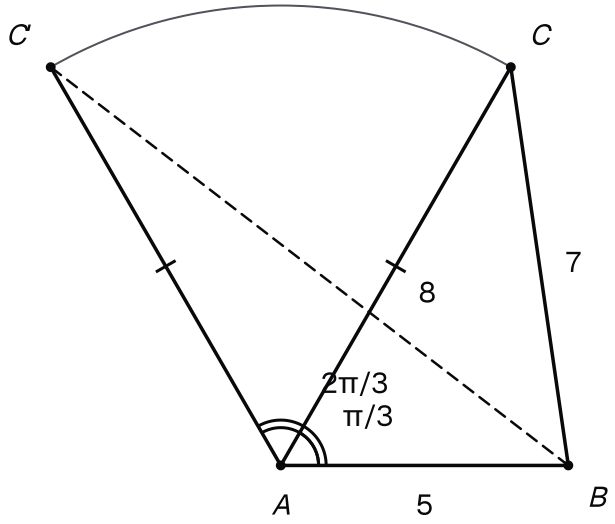
Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. D'après le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 25 + 64 \\ &\quad - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} \\ &= 49. \end{aligned}$$

Donc $BC = 7$, car une longueur est positive.

On retrouve le triangle de côtés 5, 8 et 7 de la section sur les règles de calcul.

Si l'angle mesurait $\frac{2\pi}{3}$, on aurait $BC^2 = 89 + 40 = 129$: le côté s'allonge.



Avec AB = 5 et AC = 8, un angle de π/3 en A donne BC = 7 ; si l'on ouvre l'angle jusqu'à 2π/3, le sommet passe en C' et le côté opposé s'allonge.

Un angle, une aire

Exemple : un angle à partir des trois côtés

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $BC = 7$. D'après le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned} &\cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \times AC} \\ &= \frac{9 + 25 - 49}{30} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

Dans le triangle de côtés 5, 8 et 7, le même calcul donne :

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{25 + 49 - 64}{70} = \frac{1}{7}.$$

Cet angle n'est pas remarquable : on s'arrête à son cosinus.

Exemple : une aire par une hauteur

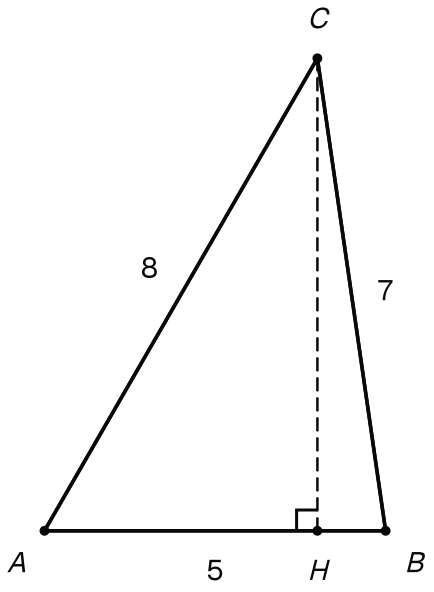
Rappel du collège. L'aire d'un triangle est la moitié du produit d'un côté par la hauteur correspondante.

Reprends le triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$, où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$. Soit H le projeté de C sur (AB).

Pied de la hauteur. Le produit est positif : $\overrightarrow{AH}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$. Par projection, $5 \times AH = 20$, donc $AH = 4$.

Hauteur. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H, $CH^2 = 64 - 16 = 48$, donc $CH = 4\sqrt{3}$.

Aire. L'aire du triangle vaut $\frac{1}{2} \times AB \times CH = 10\sqrt{3}$.



Le triangle de côtés 5, 8 et 7 et sa hauteur [CH] : le pied H est sur [AB], avec AH = 4, et l'aire est la moitié de AB fois CH.

Méthode : calculer une longueur ou un angle dans un triangle

1. **Deux côtés et l'angle qu'ils forment** : le théorème d'Al Kashi donne le troisième côté.
2. **Trois côtés** : le théorème d'Al Kashi donne le cosinus d'un angle, puis sa mesure si elle est remarquable.

3. **Trois côtés et un milieu** : le théorème de la médiane donne la longueur de la médiane.

4. **Une aire** : projette un sommet pour obtenir une hauteur, puis applique Pythagore.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : l'angle compris entre les deux côtés

✗ Dans le triangle de côtés $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$, écrire :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2\,AB \times AC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right). \end{aligned}$$

✓ Le côté $[BC]$ fait face à l'angle en A : seul l'angle $\widehat{BAC}$, formé par $[AB]$ et $[AC]$, convient.

Avec $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{1}{7}$, on trouverait $89 - \dfrac{80}{7}$, et non 49.

À toi : Un côté, puis un angle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3\sqrt{2}$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Calcule BC, puis $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Deux côtés et l'angle qu'ils forment : commence par le théorème d'Al Kashi.

Indice 2

Rappel : $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$.

Indice 3

Point délicat : l'angle en B est formé par $[BA]$ et $[BC]$; le côté opposé est $[AC]$.

Réponse

Côté BC. D'après le théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned} BC^2 &= 16 + 18 \\ &\quad - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 34 - 24 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{10}$, car une longueur est positive.

Angle en B. D'après le théorème d'Al Kashi en B :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\&=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\,BA\times BC}\\&=\frac{16+10-18}{8\sqrt{10}}\\&=\frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Conclusion. $BC=\sqrt{10}$ et $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul par Al Kashi

En devoir, nomme le triangle et le théorème, écris la formule avec les bonnes lettres, puis remplace.

Pour l'exemple du troisième côté, écris : « D'après le théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC, $BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, donc $BC^2=49$. Comme BC est une longueur, $BC=7$. »

Pour un angle, termine par sa mesure, ou par son cosinus s'il n'est pas remarquable.

Sans le nom du théorème, la rédaction perd des points.

Ensembles de points et produit scalaire

Tous les points de même ombre

En clair. Fixe deux points A et B, et fais bouger un point M.

D'après la définition, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ ne dépend que de l'ombre de M sur la droite (AB). Tous les points qui ont la même ombre H donnent le même produit.

Où sont les points dont le produit est nul ?

Devine : Un produit nul

Soit A et B deux points tels que $AB=4$. Où sont les points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$?

A. Sur la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Juste.

Juste : ces points ont A pour ombre sur (AB).

B. Sur la droite (AB) tout entière.

Faux.

Sur (AB), seul le point A convient : les autres points donnent un produit non nul.

C. Au point A seulement.

Faux.

Le point A convient, mais il n'est pas le seul.

D. Sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Faux.

Ce cercle correspond à une autre condition, étudiée plus loin.

Correction

D'après la caractérisation de l'orthogonalité, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ signifie $M = A$ ou $(AM) \perp (AB)$.

Les points cherchés forment la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Pour un produit égal à un réel k, on cherche d'abord un point H_0 de (AB) qui convient.

Pourquoi est-ce vrai ? Une fois H_0 trouvé, la condition se ramène à un produit nul, c'est-à-dire à une orthogonalité.

Une droite perpendiculaire

Propriété : Ensemble des points M tels que le produit scalaire de AB et AM vaut k

Soit A et B deux points distincts et k un réel. On note H_0 le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2}\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H_0.

Démonstration

Étape 1. D'après les règles de calcul et le carré scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2} \times AB^2 = k$.

Étape 2. Soit M un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH_0} + \overrightarrow{H_0M}$, donc, d'après les règles de calcul, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M}$.

Étape 3. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M} = 0$, c'est-à-dire, d'après la caractérisation de l'orthogonalité, si et seulement si $\overrightarrow{H_0M}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$: $M = H_0$, ou la droite (H_0M) est perpendiculaire à (AB). Cela signifie que M appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par H_0.

Vérifie : Le produit qui doit s'annuler

Dans la preuve, une fois H_0 placé, quel produit doit être nul pour que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH_0}$

Faux.

Ce produit vaut k, par construction de H_0.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M}$

Juste.

Juste : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{H_0M}$

Faux.

Ce produit n'apparaît pas dans la décomposition.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

Faux.

Ce produit vaut AB^2, qui n'est pas nul.

Correction

D'après la relation de Chasles et les règles de calcul :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH_0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M}\\ &= k + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M}.\end{aligned}$$

Le produit vaut k si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M} = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Retiens le geste : **fabriquer un point particulier** H_0, sur (AB), qui réalise le produit k.

Ensuite, la relation de Chasles ramène la condition à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H_0M} = 0$. La caractérisation de l'orthogonalité conclut.

Le signe de k place H_0 : du côté de B si $k > 0$, au-delà de A si $k < 0$, en A si $k = 0$.

Exemple : placer le point de passage

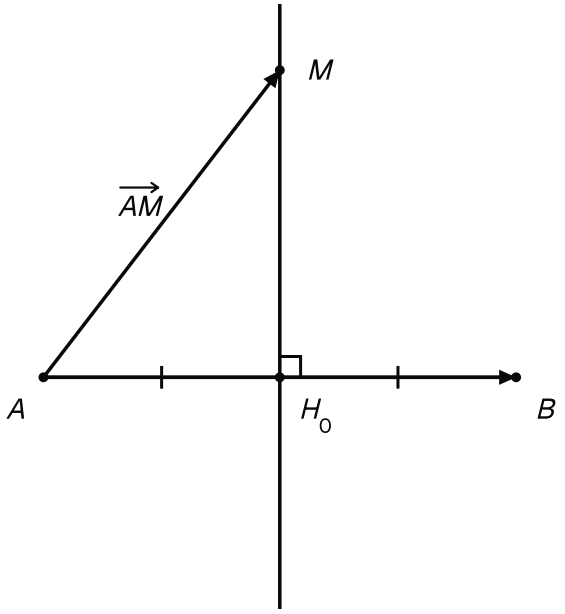
Soit A et B deux points tels que $AB = 4$, donc $AB^2 = 16$.

Pour $k = 8$. Le point H_0 vérifie :

$$\overrightarrow{AH_0} = \frac{8}{16}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

C'est le milieu de $[AB]$. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, l'ensemble cherché est la médiatrice de $[AB]$.

Pour $k = -4$. Le point H_0 vérifie $\overrightarrow{AH_0} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Il est sur (AB), au-delà de A, et $AH_0 = 1$. L'ensemble est la perpendiculaire à (AB) en ce point.



Pour AB = 4 et k = 8, H0 est le milieu de [AB] : chaque point M de la perpendiculaire à (AB) en H0, la médiatrice, a H0 pour ombre.

Un angle droit sur un cercle

Devine : Un angle vu du cercle

Sur ton cahier, trace un segment $[AB]$ de 8 cm, son milieu I et le cercle de centre I passant par A. Place un point M du cercle, distinct de A et de B, et vérifie l'angle $\widehat{AMB}$ avec ton équerre. Recommence avec d'autres points M. Que constates-tu ?

A. L'angle $\widehat{AMB}$ est aigu pour certains points, obtus pour d'autres.

Faux.

Refais la mesure avec soin : l'angle ne change pas quand M se déplace sur le cercle.

B. L'angle $\widehat{AMB}$ est droit seulement au milieu d'un arc.

Faux.

Le milieu d'un arc convient, mais les autres points du cercle aussi.

C. L'angle $\widehat{AMB}$ est toujours droit.

Juste.

Juste : c'est une propriété du collège, rappelée juste après.

D. Cela dépend de la longueur de $[AB]$.

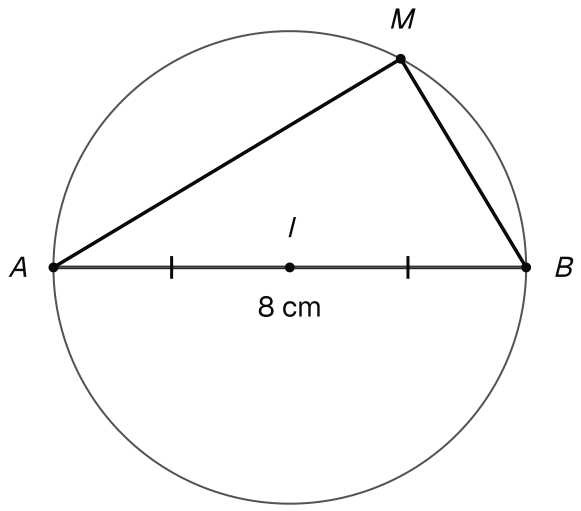
Faux.

Avec un autre segment, le constat reste le même : l'angle est droit.

Correction

Pour chaque point M du cercle, distinct de A et de B, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Le rappel qui suit l'explique, puis le produit scalaire donne la réciproque.



Le segment [AB] de 8 cm, son milieu I et le cercle de centre I qui passe par A, avec un point M du cercle relié à A et à B.

Rappel du collège. Si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, distinct de A et B, le triangle AMB est rectangle en M. Alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le théorème de la médiane, au milieu I de $[AB]$, compare la distance MI au rayon du cercle.

Le cercle de diamètre donné

Propriété : Cercle de diamètre [AB] et produit scalaire

Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

Étape 1. Soit I le milieu de $[AB]$ et M un point du plan. D'après le théorème de la médiane, appliqué au point M et au segment $[AB]$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

Étape 2. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $MI^2 = \dfrac{AB^2}{4}$, c'est-à-dire, les longueurs étant positives, $MI = \dfrac{AB}{2}$.

Étape 3. Cela signifie que M appartient au cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$, qui est le cercle de diamètre $[AB]$.

Vérifie : L'égalité de la médiane

Dans la preuve, avec I le milieu de $[AB]$, quelle égalité donne le théorème de la médiane ?

A. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{2}$

Faux.

Dans la formule du produit, AB^2 est divisé par 4, pas par 2.

B. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 + \dfrac{AB^2}{4}$

Faux.

Avec un signe plus, le produit ne serait jamais nul.

C. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2\,MI^2 - AB^2$

Faux.

Le coefficient 2 vient de la formule de la somme des carrés, pas de celle du produit.

D. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Juste.

Juste : c'est la seconde égalité du théorème, avec M à la place de A.

Correction

Le théorème de la médiane, écrit pour le point M et le segment $[AB]$, donne :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Le produit est nul si et seulement si $MI^2 = \dfrac{AB^2}{4}$, c'est-à-dire $MI = \dfrac{AB}{2}$, car les longueurs sont positives.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **ramène tout au milieu** I de $[AB]$, grâce au théorème de la médiane appliqué au point M.

Le produit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ devient une différence, $MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

Son signe dit où est M : négatif à l'intérieur du cercle, nul sur le cercle, positif à l'extérieur.

Exemple : un cercle de diamètre donné

Soit A et B deux points tels que $AB = 10$, et I le milieu de $[AB]$. D'après la propriété du cercle de diamètre $[AB]$, les points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ forment le cercle de centre I et de rayon 5.

Un point du cercle. Un point M de ce cercle tel que $MA = 6$ forme un triangle AMB rectangle en M. D'après le théorème de Pythagore, $MB^2 = 100 - 36 = 64$, donc $MB = 8$.

Deux points hors du cercle. Si $NI = 3$, le théorème de la médiane donne $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 9 - 25 = -16$: le point N est à l'intérieur du cercle. Si $PI = 7$, le produit vaut $49 - 25 = 24$.

La méthode, puis à toi

Méthode : déterminer un ensemble de points

1. **Reconnais** la forme de la condition : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, ou $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Pour $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, **place** H_0 sur (AB) avec $\overrightarrow{AH_0} = \dfrac{k}{AB^2}\,\overrightarrow{AB}$: l'ensemble est la perpendiculaire à (AB) en H_0.
3. Pour $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, **reconnais** le cercle de diamètre $[AB]$.
4. **Décris** l'ensemble : une droite et l'un de ses points, ou un cercle, son centre et son rayon.

À toi : Deux ensembles

Soit A et B deux points tels que $AB = 6$. Détermine l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -12$.

Détermine ensuite l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Reconnais la forme de chaque condition, puis applique la méthode.
Indice 2
Pour $\mathcal{D}$, calcule $\dfrac{k}{AB^2} = \dfrac{-12}{36}$.
Indice 3
Point délicat : k est négatif ; le point H_0 est du côté opposé à B par rapport à A.

Réponse
Ensemble $\mathcal{D}$. On a $AB^2 = 36$. Le point H_0 vérifie :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH_0} &= \frac{-12}{36}\,\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Il est sur (AB), au-delà de A, et $AH_0 = 2$. D'après la propriété des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, l'ensemble $\mathcal{D}$ est la perpendiculaire à (AB) en H_0.

Ensemble $\mathcal{C}$. D'après la propriété du cercle de diamètre $[AB]$, l'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de rayon 3.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle formule pour quelles données

- **Un projeté connu** : par projection, $AB \times AH$ ou $-AB \times AH$, selon les sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.
- **Deux longueurs et l'angle** : $AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
- **Trois longueurs** : $\frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.
- **Une médiane** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$, avec I le milieu de $[BC]$.
- **Une perpendicularité** : décomposer par Chasles, développer, trouver un produit nul.
- **Un triangle rectangle** : les relations métriques ; **un triangle quelconque** : Al Kashi.
- **Un ensemble de points** : une perpendiculaire à (AB), ou le cercle de diamètre $[AB]$.

Le mot du prof. Le produit scalaire est un nombre qui compare la direction de deux vecteurs : positif quand l'angle est aigu, nul quand il est droit, négatif quand il est obtus.

Avant chaque calcul, regarde les données : un projeté, un angle ou des longueurs. Puis nomme la méthode que tu emploies.

En physique, tu retrouveras ce calcul dans le travail d'une force.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le produit scalaire » (tc · sciences · mathematiques)