BURHAN

Résumé : Les polynômes

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/resume

Chapitre	Semestre
Les polynômes	Semestre 1

Polynôme, degré, égalité

À retenir : L'essentiel en une phrase

Un polynôme est une somme de termes $a_k x^k$, où chaque exposant k est un entier naturel. Pour le lire, range ses termes de la plus haute à la plus basse puissance de x.

Le premier coefficient non nul donne le degré et le coefficient dominant. Le terme sans x est le terme constant ; s'il n'est pas écrit, il vaut 0.

Définition : Polynôme, coefficients et degré

On appelle **polynôme** toute expression $P(x)$ qui peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont des réels, appelés **coefficients** du polynôme.

- Les expressions $a_k x^k$ sont les **termes** du polynôme ; a_0 est son **terme constant**.
- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est le **degré** du polynôme, noté $\deg P$, et a_n est son **coefficient dominant**.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est le **polynôme nul** : il n'a pas de degré.

Pour tout réel x, $P(x)$ est un réel : on définit ainsi la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$.

Méthode : lire un polynôme

1. **Développer et réduire** l'expression.
2. **Ranger** les termes selon les puissances de x décroissantes.
3. **Lire** le degré, le coefficient dominant et le terme constant ; un terme absent a pour coefficient 0.
4. **Contrôler** : une expression où x figure au dénominateur ou sous une racine carrée n'est en général pas un polynôme ; vérifie si elle se réécrit, pour tout réel x, sans dénominateur ni racine : $\dfrac{x^2-1}{x-1}$, qui n'est pas défini en 1, n'est pas un polynôme.

Exemple

Énoncé. Lis le polynôme $P(x) = (x-4)(x+1)$.

Développement. $P(x) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$.

Lecture. $\deg P = 2$, le coefficient dominant vaut 1 et le terme constant vaut -4.

À l'inverse. $\dfrac{1}{x-4}$ n'est pas un polynôme : cette expression n'existe pas pour $x = 4$.

Propriété : Égalité de deux polynômes

Soit P et Q deux polynômes. On a $P(x) = Q(x)$ **pour tout réel** x si et seulement si P et Q ont les mêmes coefficients pour les termes de même degré. On dit alors que P et Q sont **égaux** et on écrit $P = Q$.

En particulier :

- deux polynômes égaux et non nuls ont le même degré ;
- un polynôme vérifie $P(x) = 0$ pour tout réel x si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il fonde toutes les identifications de coefficients de ce chapitre.

Méthode : identifier des coefficients

1. **Développe** et **réduis** les deux membres de l'égalité.
2. **Range**-les selon les puissances décroissantes de x, en écrivant les coefficients nuls.
3. **Égale** les coefficients des plus hautes puissances, puis ceux des suivantes, jusqu'aux termes constants.
4. **Résous** les petites équations obtenues, puis **contrôle** en développant.

Exemple

Énoncé. Trouve les réels b et c tels que $x^2 + bx + c = (x+1)(x-4)$ pour tout réel x.

Développement. $(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$.

Identification. D'après l'égalité de deux polynômes, $b = -3$ et $c = -4$.

Attention : Quelques valeurs ne suffisent pas

Les polynômes x^3 et x prennent les mêmes valeurs en -1, en 0 et en 1. Pourtant, ils ne sont pas égaux : pour $x = 4$, on obtient 64 d'un côté et 4 de l'autre. L'égalité de deux polynômes porte sur **tous** les réels x, pas sur quelques-uns.

Somme, produit et degré

Propriété : Degré d'un produit et d'une somme

Soit P et Q deux polynômes non nuls.

- Le **produit** PQ, défini par $(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$, est un polynôme non nul, et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- La **somme** $P + Q$, définie par $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$, est un polynôme. Si elle n'est pas nulle, son degré est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés $\deg P$ et $\deg Q$.
- Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q)$ est égal au plus grand des deux degrés.

À retenir : Prévoir un degré sans tout développer

Pour un produit, multiplie seulement les deux termes dominants : tu obtiens le terme de plus haut degré. Pour une somme, compare d'abord les degrés. S'ils sont égaux, additionne les coefficients dominants avant de conclure.

Exemple

Énoncé. Prévois le degré de $P(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + x + 4)$.

Termes dominants. $2x^2 \times x^3 = 2x^5$.

Conclusion. D'après le degré d'un produit, $\deg P = 2 + 3 = 5$, et le coefficient dominant vaut 2.

Attention : Une somme peut perdre des degrés

Les polynômes $x^2 + 3x$ et $-x^2 + 1$ sont tous deux de degré 2. Leur somme vaut pourtant $3x + 1$, de degré 1. Quand deux degrés sont égaux, les termes dominants peuvent se compenser.

Racine et divisibilité

Définition : Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et α un réel. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Méthode : chercher une racine évidente

1. **Additionne** les coefficients : cette somme est $P(1)$.
2. **Calcule** $P(-1)$: une puissance paire de -1 vaut 1, une puissance impaire vaut -1.
3. **Essaie** ensuite de petits entiers positifs et négatifs. Note que $P(0)$ est le terme constant.
4. **Dès que** $P(\alpha) = 0$, conclus : P est divisible par $x - \alpha$.

Exemple

Énoncé. Cherche une racine évidente de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$.

Essais. $P(1) = 1 - 2 - 7 - 4 = -12$, puis $P(-1) = -1 - 2 + 7 - 4 = 0$.

Conclusion. -1 est une racine évidente : P est divisible par $x + 1$.

Propriété : Factorisation de x^n – α^n

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tous réels x et α :

$$\begin{aligned} &x^n - \alpha^n \\ &= (x - \alpha)\big(x^{n-1} + \alpha\, x^{n-2} + \dots \\ &\qquad + \alpha^{n-2}\, x + \alpha^{n-1}\big). \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, la parenthèse vaut 1 ; pour $n = 2$, elle vaut $x + \alpha$. Par exemple :

$$\begin{aligned} x^2 - \alpha^2 &= (x - \alpha)(x + \alpha), \\ x^3 - \alpha^3 &= (x - \alpha) \\ &\qquad \times \left(x^2 + \alpha x + \alpha^2\right). \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Factorise $x^3 - 64$ et $x^3 + 1$.

Premier cas. $64 = 4^3$, donc :

$$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16).$$

Second cas. $1 = -(-1)^3$, donc :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= x^3 - (-1)^3 \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Théorème : Racine et divisibilité par x – α

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel. Le réel α est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que, **pour tout réel** x,

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x).$$

Dans ce cas, $\deg Q = n - 1$, et on dit que P est **divisible** par $x - \alpha$.

Attention : Le signe dans le facteur

Si -1 est une racine de P, le facteur est $x - (-1) = x + 1$, et non $x - 1$. Si 4 est une racine, le facteur est $x - 4$. Pour contrôler, remplace x par la racine : le facteur doit valoir 0.

Division euclidienne par x – α

Propriété : Division euclidienne par x – α

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel. Il existe un **unique** polynôme Q tel que, pour tout réel x,

$$P(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + P(\alpha).$$

Le polynôme Q, de degré $n - 1$, est le **quotient** de la division euclidienne de P par $x - \alpha$; le réel $P(\alpha)$ en est le **reste**. C'est la seule écriture $P(x) = (x - \alpha)\,Q_1(x) + r$, avec Q_1 polynôme et r réel. Le reste est nul si et seulement si α est une racine de P.

Méthode : diviser en potence

1. **Écris** le dividende avec toutes les puissances de x, en plaçant 0 devant celles qui manquent.
2. **Divise** le terme de plus haut degré par x : tu obtiens un terme du quotient.
3. **Multiplie** $x - \alpha$ par ce terme. Écris ce produit entre parenthèses, précédé d'un signe moins, **sous-trais**-le, puis abaisse le terme suivant.
4. **Arrête-toi** quand il reste une constante : c'est le reste, qui doit être égal à $P(\alpha)$.

Exemple

Énoncé. Divise $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ par $x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 7x - 4 & \dfrac{x - 4}{x^2 + 2x + 1} \\ -\left(x^3 - 4x^2\right) & \\ 2x^2 - 7x & \\ -\left(2x^2 - 8x\right) & \\ x - 4 & \\ -\left(x - 4\right) & \\ 0 & \end{array}$$

Conclusion. Le reste est nul, comme $P(4) = 64 - 32 - 28 - 4 = 0$. Donc $P(x) = (x - 4)(x^2 + 2x + 1)$.

Exemple

Énoncé. Trouve le reste de la division de $x^3 + 5$ par $x + 1$, sans la poser.

Calcul. Le reste est la valeur en -1 : $(-1)^3 + 5 = 4$.

Contrôle.

$$(x+1)(x^2 - x + 1) + 4$$
$$= x^3 + 1 + 4 = x^3 + 5.$$

Attention : Une colonne pour chaque puissance

Pour diviser $2x^3 + x - 4$ par $x + 1$, écris d'abord $2x^3 + 0x^2 + x - 4$. Sans la colonne des x^2, les termes se décalent, et le quotient devient faux.

Factoriser un polynôme

Propriété : Polynôme ayant deux racines distinctes

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$, et α et β deux racines **distinctes** de P. Il existe un polynôme R de degré $n - 2$ tel que, pour tout réel x,

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\, R(x).$$

Méthode : factoriser pas à pas

1. **Regarde** d'abord s'il existe un facteur commun, une identité remarquable ou un regroupement utile.
2. **Sinon**, cherche une racine évidente α.
3. **Mets** $x - \alpha$ en facteur, par la division en potence ou par identification.
4. **Recommence** avec le quotient, puis **développe** le résultat final pour le contrôler.

Méthode : trouver un quotient par identification

1. **Vérifie** que $P(\alpha) = 0$.
2. **Écris** $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$, avec un quotient Q de degré $\deg P - 1$ dont les coefficients sont inconnus.
3. **Développe** le produit, puis **égale** les coefficients des termes de même degré.
4. **Contrôle** avec l'équation qui reste : elle doit être vérifiée.

Exemple

Énoncé. Factorise $P(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 4$.

Racines. $P(-1) = 1 + 3 - 3 + 3 - 4 = 0$ et $P(4) = 256 - 192 - 48 - 12 - 4 = 0$.

Deux racines distinctes. $P(x) = (x+1)(x-4)\,R(x)$ avec $\deg R = 2$, et $(x+1)(x-4) = x^2 - 3x - 4$.

Identification. On écrit $R(x) = ax^2 + bx + c$. Dans $(x^2 - 3x - 4)(ax^2 + bx + c)$, le coefficient de x^4 est a, celui de x^3 est $b - 3a$ et le terme constant est $-4c$.

Donc $a = 1$, $b - 3 = -3$ et $-4c = -4$: $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. Donc $P(x) = (x+1)(x-4)(x^2+1)$.

Exemple

Énoncé. Résous l'équation $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$.

Factorisation. D'après la division ci-dessus, le premier membre vaut $(x-4)(x^2+2x+1) = (x-4)(x+1)^2$.

Produit nul. $x - 4 = 0$ ou $x + 1 = 0$, donc $S = \{-1, 4\}$.

Attention : Garder le facteur numérique

On a $2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$. Écrire seulement $(x+1)^2$ ferait perdre le facteur 2. Développe ta factorisation : tu dois retrouver le polynôme de départ.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Lire** un polynôme : développer, réduire, ranger.
- **Trouver** des coefficients inconnus : l'égalité de deux polynômes.
- **Prévoir** un degré : le produit des termes dominants.
- **Tester** un réel α : calculer $P(\alpha)$.
- **Trouver** une racine : essayer 1, -1, puis de petits entiers.
- **Diviser** par $x - \alpha$: la potence, ou l'identification du quotient.
- **Obtenir** un reste sans division : calculer $P(\alpha)$.
- **Factoriser** : facteur commun, identité remarquable, regroupement, puis racine évidente.
- **Résoudre** $P(x) = 0$: factoriser, puis appliquer le produit nul.
- **Écarter** un facteur qui reste au moins égal à un réel strictement positif, comme $x^2 + 1 \geq 1$: il n'est jamais nul. Si ce n'est vrai que pour $x > 1$, écris « il ne s'annule pas pour $x > 1$ ».

Degré d'un produit, P et Q non nuls

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Racine

$$\alpha \text{ racine de } P \text{ si et seulement si } P(\alpha) = 0$$

Différence de deux puissances, n entier au moins égal à 1 ; la parenthèse vaut 1 si n = 1, et x + α si n = 2

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha\, x^{n-2} + \dots + \alpha^{n-2}\, x + \alpha^{n-1})$$

Divisibilité, P de degré n au moins égal à 1, Q polynôme de degré n – 1

$$P(\alpha) = 0 \text{ si et seulement s'il existe } Q \text{ tel que, pour tout } x, P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$$

Division euclidienne, le reste est P(α)

$$P(x) = (x-\alpha)\, Q(x) + P(\alpha)$$

Deux racines distinctes, P de degré au moins 2

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\, R(x)$$

Carré d'une somme

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

Carré d'une différence

$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

Différence de deux carrés

$$u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$$

À retenir : Rédiger en devoir

Pour chaque racine annoncée, écris le calcul de $P(\alpha)$. Nomme la propriété utilisée : « d'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$ ». Termine chaque factorisation par un développement de contrôle. Pour une équation, annonce le produit nul, puis donne l'ensemble des solutions.