BURHAN

Les polynômes : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un polynôme à paramètre, de la racine à l'équation

Soit m un réel. On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x + 3.$$

1. 1 pts

a) Calcule $P(3)$ en fonction de m.

b) En déduire la valeur de m pour laquelle 3 est une racine de P.

INDICE

Début : remplace x par 3, avec $3^3 = 27$ et $3^2 = 9$.

2. 1,25 pts

Dans toute la suite, $m = -5$, donc $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

a) Calcule $P(1)$ et $P(-1)$. En déduire une seconde racine de P.

b) Les réels 3 et -1 sont deux racines distinctes de P. Quel est le degré du polynôme R tel que $P(x) = (x-3)(x+1)\,R(x)$ pour tout réel x ?

c) Développe $(x-3)(x+1)$.

INDICE

Outil : la propriété du polynôme ayant deux racines distinctes. **Début :** $P(1)$ est la somme des coefficients.

3. 1,25 pts

On écrit $R(x) = ax + b$.

a) Développe $(x^2 - 2x - 3)(ax + b)$, puis détermine a et b par identification.

b) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de trois facteurs du premier degré. Contrôle-la en développant.

INDICE

Outil : l'égalité de deux polynômes. **Début :** le terme en x^3 donne a, le terme constant donne b.

4. 0,75 pts

a) À l'aide de la question 3, écris l'équation $P(x) = 0$ sous la forme d'un produit nul.

b) Résous-la dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la règle du produit nul.

5. 0,75 pts

a) Sans poser la division, calcule le reste de la division de P par $x+2$.

b) Le polynôme P est-il divisible par $x+2$? Le réel $\dfrac{1}{2}$ est-il une racine de P ?

INDICE

Outil : le reste de la division par $x+2=x-(-2)$ est $P(-2)$. **Début :** pour $\dfrac{1}{2}$, relis la question 4.

Exercice 2 5 pts

Le bénéfice d'un artisan dinandier

Un artisan dinandier fabrique et vend des plateaux en cuivre. Lorsqu'il vend x centaines de plateaux, avec $0 \leq x \leq 6$, son bénéfice, en milliers de dirhams, est

$$B(x) = -2x^3 + 7x^2 + 17x - 10.$$

Un bénéfice négatif correspond à une perte.

1. 1 pts

a) Donne le degré, le coefficient dominant et le terme constant de $B(x)$.

b) Calcule $B(0)$ et $B(3)$, puis interprète ces deux valeurs.

INDICE

Début : $B(0)$ est le terme constant. **Attention :** $3^3 = 27$, donc $-2 \times 27 = -54$.

2. 1,5 pts

a) Vérifie que 5 est une racine de B.

b) Effectue la division de $B(x)$ par $x-5$, et écris $B(x) = (x-5)\,Q(x)$.

INDICE

Début : le premier terme du quotient est $\dfrac{-2x^3}{x} = -2x^2$. **Attention :** le reste doit valoir $B(5)$.

3. 1,25 pts

a) Vérifie que -2 est une racine de Q.

b) Détermine les réels a et b tels que $Q(x) = (x+2)(ax+b)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : l'identification des coefficients. **Début :** commence par le terme en x^2 et par le terme constant.

4. 1,25 pts

a) En déduire une factorisation de $B(x)$, que tu contrôleras en développant.

b) Pour quelles quantités de plateaux vendus le bénéfice est-il nul ?

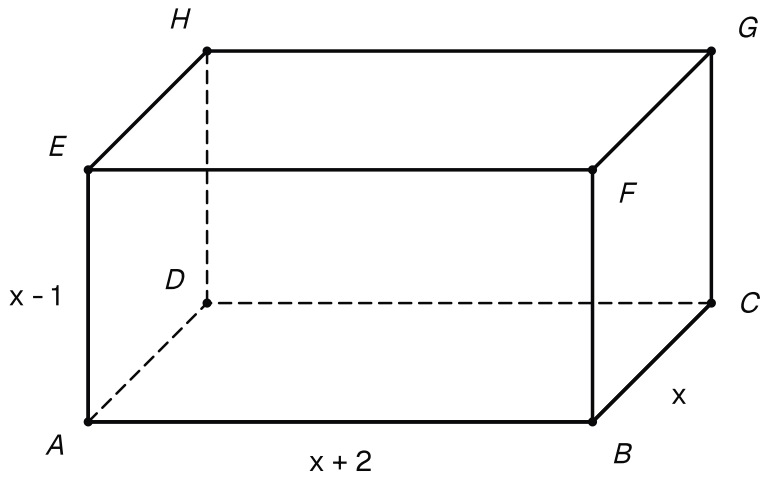
INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** seules les valeurs de x telles que $0 \leq x \leq 6$ conviennent.

Exercice 3 — 5 pts

Le volume d'une citerne

Une citerne a la forme d'un pavé droit. Sa longueur mesure $x + 2$ mètres, sa largeur x mètres et sa hauteur $x - 1$ mètres, avec $x > 1$. On note $V(x)$ son volume, en m³.



La citerne en pavé droit, avec ses trois dimensions écrites en fonction de x, en mètres.

1. — 1 pts

a) Sans développer, prévois le degré de $V(x)$.

b) Développe et réduis $V(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'un produit, appliqué deux fois. **Début :** calcule d'abord $x(x + 2)$.

2. — 1 pts

On veut une citerne de 30 m³.

a) Écris l'équation $V(x) = 30$ sous la forme $P(x) = 0$.

b) Calcule $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$. En déduire une racine évidente de P.

INDICE

Début : passe 30 dans le membre de gauche, puis calcule chaque valeur terme par terme.

3. — 1,25 pts

a) Effectue la division en potence de $P(x)$ par $x - 3$.

b) Contrôle le quotient obtenu en développant.

INDICE

Début : le premier terme du quotient est x^2. **Attention :** le reste doit valoir $P(3)$.

4. 1 pts

a) Justifie que $x^2 + 4x + 10 > 0$ lorsque $x > 1$.

b) En déduire la seule valeur de x qui convient, puis les dimensions de la citerne.

INDICE

Outil : le signe d'une somme de termes positifs, puis la règle du produit nul.

5. 0,75 pts

a) Calcule $V(5)$ à l'aide des dimensions de la citerne pour $x = 5$.

b) Sans poser de division, en déduire le reste de la division de P par $x - 5$.

INDICE

Début : pour $x = 5$, les dimensions sont 7, 5 et 4. **Attention :** relie $P(5)$ à $V(5)$.

Exercice 4 5 pts

Une différence qui révèle un facteur commun

On considère les polynômes P et Q définis, pour tout réel x, par $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 32x + 80$ et $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 42x^2 + 16x + 160$.

1. 1 pts

a) Donne le degré et le coefficient dominant de P et de Q.

b) Sans développer, prévois le degré et le coefficient dominant du produit $x\,P(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'un produit. **Début :** multiplie seulement les termes dominants x et $2x^3$.

2. 1,25 pts

On pose $D(x) = Q(x) - x\,P(x)$.

a) Les polynômes $Q(x)$ et $x\,P(x)$ ont le même degré et le même coefficient dominant. Que peux-tu dire du terme en x^4 de $D(x)$?

b) Développe $x\,P(x)$, puis calcule et réduis $D(x)$.

c) Compare les coefficients de $D(x)$ et ceux de $P(x)$. En déduire une écriture de $D(x)$ à l'aide de $P(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'une somme. **Attention :** pour soustraire $x\,P(x)$, change le signe de chacun de ses termes.

3. 0,75 pts

a) À l'aide de la question 2, écris $Q(x) = x\,P(x) + 2P(x)$, puis en déduire une factorisation de $Q(x)$ par le facteur commun $P(x)$.

b) Contrôle cette factorisation en calculant $Q(0)$ et $P(0)$.

INDICE

Outil : la mise en facteur, comme $x \times A + 2 \times A = (x + 2) \times A$.

4. 1,25 pts

a) Écris $2x^3 - 5x^2$ et $-32x + 80$ comme multiples d'un même polynôme du premier degré, puis mets ce facteur commun en évidence dans $P(x)$.

b) En déduire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1, puis vérifie ce résultat par un développement.

INDICE

Début : $2x^3 - 5x^2 = x^2(2x - 5)$; cherche le même facteur $2x - 5$ dans $-32x + 80$. **Outil :** l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

5. 0,75 pts

a) En déduire une factorisation de $Q(x)$ en produit de quatre facteurs du premier degré.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.

INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** un produit de quatre facteurs du premier degré peut donner quatre solutions.

Exercice 5 5 pts

Un polynôme retrouvé à partir de ses racines et d'un reste

On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie les trois conditions suivantes :

- son coefficient dominant vaut 2 ;
- les réels 6 et -1 sont des racines de P ;
- le reste de la division euclidienne de P par $x-2$ vaut -12.

1. 1 pts

a) Traduis la deuxième condition par deux égalités, puis cite la propriété du cours qui permet d'écrire $P(x)=(x-6)(x+1)\,R(x)$ pour tout réel x. Donne le degré de R.

b) Développe $(x-6)(x+1)$.

INDICE

Outil : une racine α de P s'écrit $P(\alpha)=0$. **Attention :** la racine -1 donne le facteur $x-(-1)=x+1$.

2. 1,25 pts

On écrit $R(x)=ax+b$, avec $a\neq 0$, donc $P(x)=(x^2-5x-6)(ax+b)$.

a) Sans développer, donne le terme de plus haut degré de $P(x)$. En déduire a.

b) Exprime $P(2)$ en fonction de b, puis utilise la troisième condition pour trouver b.

INDICE

Outil : le degré d'un produit, puis le reste de la division par $x-2$, égal à $P(2)$. **Début :** calcule $P(2)$ sur la forme $(x-6)(x+1)(ax+b)$, sans développer.

3. 1 pts

a) Écris $R(x)$, puis développe et réduis $P(x)$.

b) Contrôle deux conditions de l'énoncé en calculant $P(-1)$ et $P(2)$ sur la forme développée.

INDICE

Début : développe $(x^2-5x-6)(2x-3)$ terme à terme. **Attention :** $(-1)^3=-1$ et $(-1)^2=1$.

4. 1 pts

a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

b) Détermine le polynôme T tel que $P(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)T(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** $2x-3=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$: ne perds pas le facteur 2.

5. 0,75 pts

On cherche maintenant un polynôme de degré 3, de coefficient dominant 2, ayant 6 et -1 pour racines, de terme constant 18 et divisible par $x-1$.

a) D'après les questions 1 et 2, un tel polynôme s'écrit $(x^2-5x-6)(2x+b)$. Exprime son terme constant en fonction de b, puis trouve b.

b) Calcule $P(1)$. En déduire si un tel polynôme existe.

INDICE

Début : le terme constant d'un produit est le produit des termes constants. **Outil :** un polynôme est divisible par $x-1$ si et seulement si 1 en est une racine.