BURHAN

Les polynômes : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un polynôme à paramètre, de la racine à l'équation

Soit m un réel. On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x + 3.$$

1. 1 pts

a) Calcule $P(3)$ en fonction de m.

b) En déduire la valeur de m pour laquelle 3 est une racine de P.

INDICE

Début : remplace x par 3, avec $3^3 = 27$ et $3^2 = 9$.

CORRIGÉ

a) On remplace x par 3, avec $3^3 = 27$ et $3^2 = 9$:

$$\begin{aligned} &P(3) \\ &= 2 \times 27 + 9m - 12 + 3 \\ &= 9m + 45. \end{aligned}$$

b) Le réel 3 est une racine de P si et seulement si $P(3) = 0$, c'est-à-dire $9m + 45 = 0$, soit $m = -5$.

Conclusion. $P(3) = 9m + 45$, et 3 est une racine de P pour $m = -5$.

2. 1,25 pts

Dans toute la suite, $m = -5$, donc $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

a) Calcule $P(1)$ et $P(-1)$. En déduire une seconde racine de P.

b) Les réels 3 et -1 sont deux racines distinctes de P. Quel est le degré du polynôme R tel que $P(x) = (x-3)(x+1)\,R(x)$ pour tout réel x ?

c) Développe $(x-3)(x+1)$.

INDICE

Outil : la propriété du polynôme ayant deux racines distinctes. **Début :** $P(1)$ est la somme des coefficients.

CORRIGÉ

a) On calcule :

- $P(1) = 2 - 5 - 4 + 3 = -4$;
- $P(-1) = -2 - 5 + 4 + 3 = 0$.

Le réel -1 est donc une seconde racine de P.

b) Le polynôme P est de degré 3, et $3 \geq 2$. Ses racines 3 et -1 sont distinctes. D'après la propriété du polynôme ayant deux racines distinctes, R est de degré $3 - 2 = 1$.

c) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-3)(x+1)\\&= x^2 + x - 3x - 3\\&= x^2 - 2x - 3.\end{aligned}$$

Conclusion. -1 est une seconde racine de P, R est de degré 1, et $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$.

3. 1,25 pts

On écrit $R(x) = ax + b$.

a) Développe $(x^2 - 2x - 3)(ax + b)$, puis détermine a et b par identification.

b) En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de trois facteurs du premier degré. Contrôle-la en développant.

INDICE

Outil : l'égalité de deux polynômes. **Début :** le terme en x^3 donne a, le terme constant donne b.

CORRIGÉ

a) **Développement.** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x^2 - 2x - 3)(ax + b)\\ &= ax^3 + (b - 2a)x^2\\ &\quad + (-3a - 2b)x - 3b.\end{aligned}$$

Identification. D'après l'égalité de deux polynômes, en comparant avec $P(x)$: $a = 2$ et $-3b = 3$, donc $b = -1$. Contrôles : $b - 2a = -1 - 4 = -5$ et $-3a - 2b = -6 + 2 = -4$.

b) Donc $R(x) = 2x - 1$, et pour tout réel x : $P(x) = (x - 3)(x + 1)(2x - 1)$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x^2 - 2x - 3)(2x - 1)\\ &= 2x^3 - x^2 - 4x^2\\ &\quad + 2x - 6x + 3\\ &= 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.\end{aligned}$$

Conclusion. $a = 2$, $b = -1$, et $P(x) = (x - 3)(x + 1)(2x - 1)$ pour tout réel x.

4. 0,75 pts

a) À l'aide de la question 3, écris l'équation $P(x) = 0$ sous la forme d'un produit nul.

b) Résous-la dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la règle du produit nul.

CORRIGÉ

a) D'après la question 3, $P(x) = 0$ équivaut à $(x - 3)(x + 1)(2x - 1) = 0$.

b) D'après la règle du produit nul, $x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $2x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2}, 3\right\}.$$

5. 0,75 pts

a) Sans poser la division, calcule le reste de la division de P par $x+2$.

b) Le polynôme P est-il divisible par $x+2$? Le réel $\frac{1}{2}$ est-il une racine de P ?

INDICE

Outil : le reste de la division par $x+2=x-(-2)$ est $P(-2)$. **Début :** pour $\frac{1}{2}$, relis la question 4.

CORRIGÉ

a) Comme $x+2=x-(-2)$, d'après la division euclidienne par $x-\alpha$, le reste est $P(-2)$:

$$\begin{aligned} &P(-2)\\ &=-16-20+8+3\\ &=-25. \end{aligned}$$

b) Ce reste n'est pas nul : P n'est pas divisible par $x+2$. En revanche, d'après la question 4, $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation $P(x)=0$: on a $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Conclusion. Le reste vaut -25, P n'est pas divisible par $x+2$, et $\frac{1}{2}$ est une racine de P.

Exercice 2 5 pts

Le bénéfice d'un artisan dinandier

Un artisan dinandier fabrique et vend des plateaux en cuivre. Lorsqu'il vend x centaines de plateaux, avec $0 \leq x \leq 6$, son bénéfice, en milliers de dirhams, est

$$B(x) = -2x^3 + 7x^2 + 17x - 10.$$

Un bénéfice négatif correspond à une perte.

1. 1 pts

a) Donne le degré, le coefficient dominant et le terme constant de $B(x)$.

b) Calcule $B(0)$ et $B(3)$, puis interprète ces deux valeurs.

INDICE

Début : $B(0)$ est le terme constant. **Attention :** $3^3 = 27$, donc $-2 \times 27 = -54$.

CORRIGÉ

a) B est de degré 3, de coefficient dominant -2 et de terme constant -10.

b) $B(0) = -10$: sans aucune vente, l'artisan perd $10\,000$ dirhams.

On calcule ensuite $B(3) = -54 + 63 + 51 - 10 = 50$: pour 300 plateaux vendus, il gagne $50\,000$ dirhams.

Conclusion. $B(0) = -10$ correspond à une perte de $10\,000$ dirhams, et $B(3) = 50$ à un bénéfice de $50\,000$ dirhams.

2. 1,5 pts

a) Vérifie que 5 est une racine de B.

b) Effectue la division de $B(x)$ par $x-5$, et écris $B(x) = (x-5)\,Q(x)$.

INDICE

Début : le premier terme du quotient est $\dfrac{-2x^3}{x} = -2x^2$. **Attention :** le reste doit valoir $B(5)$.

CORRIGÉ

a) On calcule :

$$\begin{aligned} &B(5)\\ &= -250 + 175 + 85 - 10\\ &= 0. \end{aligned}$$

Le réel 5 est une racine de B.

b) On pose la division ; le reste attendu est $B(5) = 0$.

$$\begin{array}{r|l} -2x^3+7x^2+17x-10 & \underline{x-5} \\ -\left(-2x^3+10x^2\right) & \\ \quad -3x^2+17x & \\ -\left(-3x^2+15x\right) & \\ \quad 2x-10 & \\ -\left(2x-10\right) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $B(x) = (x-5)\,Q(x)$, avec $Q(x) = -2x^2 - 3x + 2$.

3. 1,25 pts

a) Vérifie que -2 est une racine de Q.

b) Détermine les réels a et b tels que $Q(x) = (x+2)(ax+b)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : l'identification des coefficients. **Début :** commence par le terme en x^2 et par le terme constant.

CORRIGÉ

a) $Q(-2) = -8 + 6 + 2 = 0$: le réel -2 est une racine de Q.

b) **Développement.** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x+2)(ax+b)\\ &= ax^2 + (2a+b)x + 2b. \end{aligned}$$

Identification. D'après l'égalité de deux polynômes, $a = -2$ et $2b = 2$, donc $b = 1$; contrôle du coefficient de x : $2a + b = -3$.

Conclusion. $a = -2$ et $b = 1$: pour tout réel x,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+2)(-2x+1)\\ &= (x+2)(1-2x). \end{aligned}$$

4. 1,25 pts

a) En déduire une factorisation de $B(x)$, que tu contrôleras en développant.

b) Pour quelles quantités de plateaux vendus le bénéfice est-il nul ?

INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** seules les valeurs de x telles que $0 \leq x \leq 6$ conviennent.

CORRIGÉ

a) D'après les questions 2 et 3, pour tout réel x, $B(x) = (x-5)(x+2)(1-2x)$.

Contrôle. $(x-5)(x+2) = x^2 - 3x - 10$, puis, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x^2 - 3x - 10)(1-2x)\\ &= x^2 - 3x - 10 - 2x^3\\ &\quad + 6x^2 + 20x\\ &= -2x^3 + 7x^2 + 17x - 10.\end{aligned}$$

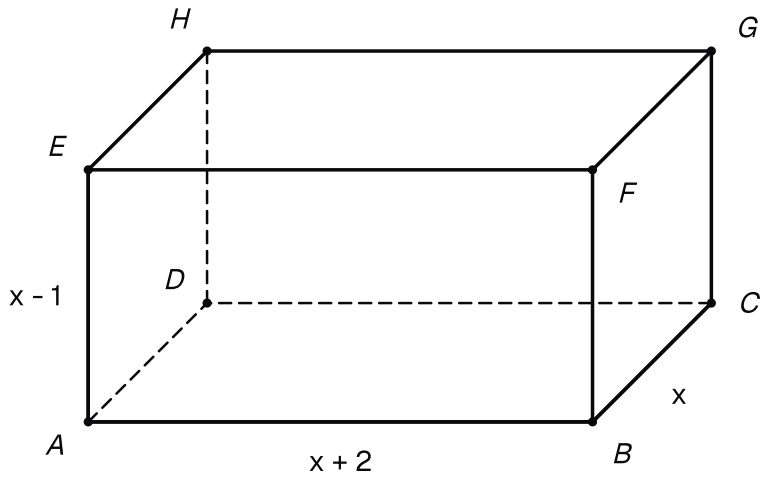
b) D'après la règle du produit nul, $B(x) = 0$ équivaut à $x = 5$ ou $x = -2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$. La valeur -2 ne vérifie pas $0 \leq x \leq 6$.

Conclusion. Le bénéfice est nul pour $x = \dfrac{1}{2}$ et pour $x = 5$, c'est-à-dire pour 50 et pour 500 plateaux vendus.

Exercice 3 5 pts

Le volume d'une citerne

Une citerne a la forme d'un pavé droit. Sa longueur mesure $x + 2$ mètres, sa largeur x mètres et sa hauteur $x - 1$ mètres, avec $x > 1$. On note $V(x)$ son volume, en m³.



La citerne en pavé droit, avec ses trois dimensions écrites en fonction de x, en mètres.

1. 1 pts

a) Sans développer, prévois le degré de $V(x)$.

b) Développe et réduis $V(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'un produit, appliqué deux fois. **Début :** calcule d'abord $x(x + 2)$.

CORRIGÉ

a) $V(x) = (x + 2) \times x \times (x - 1)$ est un produit de trois polynômes de degré 1. D'après le degré d'un produit, $\deg V = 1 + 1 + 1 = 3$.

b) Pour tout réel x, $x(x + 2) = x^2 + 2x$, puis :

$$\begin{aligned}&(x^2 + 2x)(x - 1)\\ &= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x\\ &= x^3 + x^2 - 2x.\end{aligned}$$

Conclusion. V est de degré 3 et, pour tout réel $x > 1$, $V(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

2. 1 pts

On veut une citerne de 30 m³.

a) Écris l'équation $V(x) = 30$ sous la forme $P(x) = 0$.

b) Calcule $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$. En déduire une racine évidente de P.

INDICE

Début : passe 30 dans le membre de gauche, puis calcule chaque valeur terme par terme.

CORRIGÉ

a) $V(x) = 30$ équivaut à $x^3 + x^2 - 2x - 30 = 0$. On pose, pour tout réel x, $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 30$.

b) On calcule terme par terme :

- $P(1) = 1 + 1 - 2 - 30 = -30$;
- $P(2) = 8 + 4 - 4 - 30 = -22$;
- $P(3) = 27 + 9 - 6 - 30 = 0$.

Conclusion. L'équation s'écrit $P(x) = 0$, et 3 est une racine évidente de P.

3. 1,25 pts

a) Effectue la division en potence de $P(x)$ par $x - 3$.

b) Contrôle le quotient obtenu en développant.

INDICE

Début : le premier terme du quotient est x^2. **Attention :** le reste doit valoir $P(3)$.

CORRIGÉ

a) On pose la division ; le reste attendu est $P(3) = 0$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2x-30 & \underline{x-3} \\ -\left(x^3-3x^2\right) & \\ 4x^2-2x & \\ -\left(4x^2-12x\right) & \\ 10x-30 & \\ -\left(10x-30\right) & \\ 0 & \end{array}$$

b) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-3)(x^2+4x+10) &= x^3+4x^2+10x \\ &\quad -3x^2-12x-30 \\ &= x^3+x^2-2x-30.\end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $P(x)$: pour tout réel x, $P(x) = (x-3)(x^2+4x+10)$.

4. 1 pts

a) Justifie que $x^2 + 4x + 10 > 0$ lorsque $x > 1$.

b) En déduire la seule valeur de x qui convient, puis les dimensions de la citerne.

INDICE

Outil : le signe d'une somme de termes positifs, puis la règle du produit nul.

CORRIGÉ

a) Pour $x > 1$, on a $x^2 > 0$, $4x > 0$ et $10 > 0$: la somme $x^2 + 4x + 10$ est strictement positive.

b) Pour $x > 1$, le facteur $x^2 + 4x + 10$ n'est donc pas nul. D'après la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

Contrôle. $5 \times 3 \times 2 = 30$.

Conclusion. La seule valeur qui convient est $x = 3$: la citerne mesure 5 m de long, 3 m de large et 2 m de haut.

5. 0,75 pts

a) Calcule $V(5)$ à l'aide des dimensions de la citerne pour $x = 5$.

b) Sans poser de division, en déduire le reste de la division de P par $x - 5$.

INDICE

Début : pour $x = 5$, les dimensions sont 7, 5 et 4. **Attention :** relie $P(5)$ à $V(5)$.

CORRIGÉ

a) Pour $x = 5$, les dimensions sont 7 m, 5 m et 4 m, donc $V(5) = 7 \times 5 \times 4 = 140$.

b) Pour tout réel x, $P(x) = V(x) - 30$. D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste de la division de P par $x - 5$ est $P(5) = V(5) - 30 = 110$.

Contrôle. $P(5) = 125 + 25 - 10 - 30 = 110$.

Conclusion. Le reste de la division de P par $x - 5$ est 110.

Exercice 4 — 5 pts

Une différence qui révèle un facteur commun

On considère les polynômes P et Q définis, pour tout réel x, par $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 32x + 80$ et $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 42x^2 + 16x + 160$.

1. — 1 pts

a) Donne le degré et le coefficient dominant de P et de Q.

b) Sans développer, prévois le degré et le coefficient dominant du produit $x\,P(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'un produit. **Début :** multiplie seulement les termes dominants x et $2x^3$.

CORRIGÉ

a) $\deg P = 3$ et le coefficient dominant de P vaut 2 ; $\deg Q = 4$ et le coefficient dominant de Q vaut 2.

b) Le terme de plus haut degré du produit est $x \times 2x^3 = 2x^4$. D'après le degré d'un produit, $x\,P(x)$ est de degré $1 + 3 = 4$.

Conclusion. $x\,P(x)$ est de degré 4, de coefficient dominant 2.

2. 1,25 pts

On pose $D(x) = Q(x) - x\,P(x)$.

a) Les polynômes $Q(x)$ et $x\,P(x)$ ont le même degré et le même coefficient dominant. Que peux-tu dire du terme en x^4 de $D(x)$?

b) Développe $x\,P(x)$, puis calcule et réduis $D(x)$.

c) Compare les coefficients de $D(x)$ et ceux de $P(x)$. En déduire une écriture de $D(x)$ à l'aide de $P(x)$.

INDICE

Outil : le degré d'une somme. **Attention :** pour soustraire $x\,P(x)$, change le signe de chacun de ses termes.

CORRIGÉ

a) Les deux termes $2x^4$ s'annulent dans la différence : $D(x)$ n'a pas de terme en x^4, et son degré est au plus 3.

b) Pour tout réel x, $x\,P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 32x^2 + 80x$. Donc :

$$\begin{aligned} &D(x) \\ &= 2x^4 - x^3 - 42x^2 \\ &\quad + 16x + 160 - 2x^4 \\ &\quad + 5x^3 + 32x^2 - 80x \\ &= 4x^3 - 10x^2 - 64x + 160. \end{aligned}$$

c) Chaque coefficient de $D(x)$ est le double du coefficient de même degré de $P(x)$:

- $4 = 2 \times 2$ et $-10 = 2 \times (-5)$;
- $-64 = 2 \times (-32)$ et $160 = 2 \times 80$.

Donc $2P(x) = 4x^3 - 10x^2 - 64x + 160$.

Conclusion. Pour tout réel x, $D(x) = 2P(x)$.

3. 0,75 pts

a) À l'aide de la question 2, écris $Q(x) = x\,P(x) + 2P(x)$, puis en déduire une factorisation de $Q(x)$ par le facteur commun $P(x)$.

b) Contrôle cette factorisation en calculant $Q(0)$ et $P(0)$.

INDICE

Outil : la mise en facteur, comme $x \times A + 2 \times A = (x+2) \times A$.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, pour tout réel x, $Q(x) = x\,P(x) + D(x) = x\,P(x) + 2P(x)$. On met en facteur le facteur commun $P(x)$.

b) On a $Q(0) = 160$ et $P(0) = 80$; on vérifie $(0+2) \times 80 = 160$.

Conclusion. Pour tout réel x, $Q(x) = (x+2)\,P(x)$, ce que confirme le calcul en 0.

4. 1,25 pts

a) Écris $2x^3 - 5x^2$ et $-32x + 80$ comme multiples d'un même polynôme du premier degré, puis mets ce facteur commun en évidence dans $P(x)$.

b) En déduire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs de degré 1, puis vérifie ce résultat par un développement.

INDICE

Début : $2x^3 - 5x^2 = x^2(2x-5)$; cherche le même facteur $2x-5$ dans $-32x+80$. **Outil :** l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

CORRIGÉ

a) On a $2x^3 - 5x^2 = x^2(2x-5)$ et $-32x + 80 = -16(2x-5)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(x) \\ &= x^2(2x-5) - 16(2x-5) \\ &= (2x-5)(x^2-16). \end{aligned}$$

b) D'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$.

Contrôle. $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$, puis, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(2x-5)(x^2-16) \\ &= 2x^3 - 32x - 5x^2 + 80 \\ &= 2x^3 - 5x^2 - 32x + 80. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (2x-5)(x-4)(x+4)$.

5. 0,75 pts

a) En déduire une factorisation de $Q(x)$ en produit de quatre facteurs du premier degré.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.

INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** un produit de quatre facteurs du premier degré peut donner quatre solutions.

CORRIGÉ

a) D'après les questions 3 et 4, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+2)(2x-5) \\ &\quad \times (x-4)(x+4). \end{aligned}$$

b) D'après la règle du produit nul, $Q(x) = 0$ équivaut à $x+2=0$ ou $2x-5=0$ ou $x-4=0$ ou $x+4=0$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{-4, -2, \frac{5}{2}, 4\right\}.$$

Exercice 5 5 pts

Un polynôme retrouvé à partir de ses racines et d'un reste

On cherche un polynôme P de degré 3 qui vérifie les trois conditions suivantes :

- son coefficient dominant vaut 2 ;
- les réels 6 et -1 sont des racines de P ;
- le reste de la division euclidienne de P par $x-2$ vaut -12.

1. 1 pts

a) Traduis la deuxième condition par deux égalités, puis cite la propriété du cours qui permet d'écrire $P(x)=(x-6)(x+1)\,R(x)$ pour tout réel x. Donne le degré de R.

b) Développe $(x-6)(x+1)$.

INDICE

Outil : une racine α de P s'écrit $P(\alpha)=0$. **Attention :** la racine -1 donne le facteur $x-(-1)=x+1$.

CORRIGÉ

a) La deuxième condition s'écrit $P(6)=0$ et $P(-1)=0$. Le polynôme P est de degré 3, et $3\geq 2$; ses racines 6 et -1 sont distinctes. D'après la propriété du polynôme ayant deux racines distinctes, il existe un polynôme R tel que, pour tout réel x, $P(x)=(x-6)(x+1)\,R(x)$, et R est de degré $3-2=1$.

b) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-6)(x+1)\\&=x^2+x-6x-6\\&=x^2-5x-6.\end{aligned}$$

Conclusion. R est de degré 1, et $(x-6)(x+1)=x^2-5x-6$.

2. 1,25 pts

On écrit $R(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$, donc $P(x) = (x^2 - 5x - 6)(ax + b)$.

a) Sans développer, donne le terme de plus haut degré de $P(x)$. En déduire a.

b) Exprime $P(2)$ en fonction de b, puis utilise la troisième condition pour trouver b.

INDICE

Outil : le degré d'un produit, puis le reste de la division par $x - 2$, égal à $P(2)$. **Début :** calcule $P(2)$ sur la forme $(x - 6)(x + 1)(ax + b)$, sans développer.

CORRIGÉ

a) Le terme de plus haut degré est $x^2 \times ax = ax^3$: le coefficient dominant de P est a. La première condition donne $a = 2$.

b) D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste de la division de P par $x - 2$ est $P(2)$. Sur la forme factorisée :

$$\begin{aligned} &P(2) \\ &= (2 - 6)(2 + 1)(2 \times 2 + b) \\ &= -12(4 + b). \end{aligned}$$

La troisième condition s'écrit $-12(4 + b) = -12$, soit $4 + b = 1$, donc $b = -3$.

Conclusion. $a = 2$ et $b = -3$.

3. 1 pts

a) Écris $R(x)$, puis développe et réduis $P(x)$.

b) Contrôle deux conditions de l'énoncé en calculant $P(-1)$ et $P(2)$ sur la forme développée.

INDICE

Début : développe $(x^2 - 5x - 6)(2x - 3)$ terme à terme. **Attention :** $(-1)^3 = -1$ et $(-1)^2 = 1$.

CORRIGÉ

a) $R(x) = 2x - 3$, donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 5x - 6)(2x - 3) \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 10x^2 \\ &\quad + 15x - 12x + 18 \\ &= 2x^3 - 13x^2 + 3x + 18. \end{aligned}$$

b) On calcule sur la forme développée :

- $P(-1) = -2 - 13 - 3 + 18 = 0$;
- $P(2) = 16 - 52 + 6 + 18 = -12$.

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 3x + 18$, et les conditions $P(-1) = 0$ et $P(2) = -12$ sont bien vérifiées.

4. 1 pts

a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b) Détermine le polynôme T tel que $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) T(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la règle du produit nul. **Attention :** $2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$: ne perds pas le facteur 2.

CORRIGÉ

a) Pour tout réel x, $P(x) = (x - 6)(x + 1)(2x - 3)$. D'après la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $x - 6 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $2x - 3 = 0$. Donc :

$$S = \left\{-1, \frac{3}{2}, 6\right\}.$$

b) Comme $2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$, on a, pour tout réel x, $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \times 2(x - 6)(x + 1)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $T(x) = 2(x - 6)(x + 1) = 2x^2 - 10x - 12$.

5. 0,75 pts

On cherche maintenant un polynôme de degré 3, de coefficient dominant 2, ayant 6 et -1 pour racines, de terme constant 18 et divisible par $x - 1$.

a) D'après les questions 1 et 2, un tel polynôme s'écrit $(x^2 - 5x - 6)(2x + b)$. Exprime son terme constant en fonction de b, puis trouve b.

b) Calcule $P(1)$. En déduire si un tel polynôme existe.

INDICE

Début : le terme constant d'un produit est le produit des termes constants. **Outil :** un polynôme est divisible par $x - 1$ si et seulement si 1 en est une racine.

CORRIGÉ

a) Le terme constant d'un produit est le produit des termes constants : ici $-6 \times b = -6b$. La condition $-6b = 18$ donne $b = -3$: le seul polynôme possible est le polynôme P des questions précédentes.

b) On calcule :

$$P(1) = 2 - 13 + 3 + 18 = 10.$$

Ce nombre n'est pas nul : 1 n'est pas une racine de P, donc P n'est pas divisible par $x - 1$.

Conclusion. Aucun polynôme ne vérifie toutes ces conditions.