BURHAN

Les polynômes : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Entraînement	7

Exercice 1

De la racine évidente à l'équation

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

1.

Calcule $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ et $P(-2)$. Donne une racine évidente de P.

INDICE

Début : $P(1)$ est la somme des coefficients ; pour les autres valeurs, calcule chaque terme séparément.

2.

Effectue la division de $P(x)$ par $x + 2$, puis écris $P(x)$ sous la forme $(x + 2)\,Q(x)$.

INDICE

Début : $x + 2 = x - (-2)$. Le premier terme du quotient est $2x^2$, et le reste doit valoir $P(-2)$.

3.

Vérifie que 3 est une racine de Q, puis écris $P(x)$ comme un produit de trois facteurs du premier degré.

INDICE

Début : après le calcul de $Q(3)$, écris $Q(x) = (x - 3)(ax + b)$ et identifie a et b.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil (rappel du collège) : la règle du produit nul : un produit vaut 0 lorsqu'un de ses facteurs vaut 0, et seulement dans ce cas.

Exercice 2

Un quotient à coefficients inconnus

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 - 7x - 6.$$

1.

Vérifie que 3 est une racine de P. Quel est le degré du quotient Q de la division de P par $x - 3$?

INDICE

Outil : la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, qui donne aussi le degré du quotient.

2.

On écrit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Développe $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$, puis détermine a, b et c par identification.

INDICE

Début : $P(x)$ n'a pas de terme en x^2 : son coefficient est 0. Identifie en partant du plus haut degré.

3.

Trouve une racine évidente de Q, puis écris $P(x)$ comme un produit de trois facteurs du premier degré.

INDICE

Début : essaie $Q(-1)$, puis écris $Q(x) = (x + 1)(x + d)$.

Exercice 3

Des paramètres fixés par une racine ou par un reste

Soit m un réel. On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 + mx^2 + 3x + 10.$$

1.

Détermine m pour que 5 soit une racine de P.

INDICE

Début : écris $P(5) = 0$: c'est une équation du premier degré d'inconnue m.

2.

On prend $m = -6$. Divise $P(x)$ par $x - 5$, puis factorise complètement $P(x)$.

INDICE

Début : le quotient est de degré 2. Cherche ensuite une racine évidente de ce quotient parmi 1 et -1.

3.

On pose maintenant $R(x) = 2x^3 + x^2 + kx - 4$, où k est un réel. Détermine k pour que le reste de la division de R par $x + 2$ soit égal à 6.

INDICE

Outil : le reste de la division par $x + 2 = x - (-2)$ est le nombre $R(-2)$.

Exercice 4

Factoriser en regroupant des termes

1.

Factorise $P(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$ en regroupant les deux premiers termes, puis les deux derniers.

INDICE

Début : $x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$; cherche le même facteur $x + 4$ dans $-25x - 100$.

2.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : la factorisation de la question 1 et le produit nul.

3.

Factorise de même $Q(x) = 4x^3 - 12x^2 + x - 3$, puis résous $Q(x) = 0$.

INDICE

Début : mets $4x^2$ en facteur dans les deux premiers termes. **Attention :** le facteur restant peut-il s'annuler ?

Exercice 5

Un polynôme de degré 4 dont on connaît deux racines

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6.$$

1.

Vérifie que -2 et 3 sont des racines de P.

INDICE

Début : $(-2)^4 = 16$ et $3^4 = 81$; calcule chaque terme avant d'additionner.

2.

Sachant que -2 et 3 sont deux racines distinctes de P, écris $P(x)$ sous la forme $(x+2)(x-3)\,R(x)$. Quel est le degré du polynôme R ? Développe $(x+2)(x-3)$.

INDICE

Outil : le polynôme ayant deux racines distinctes. **Attention :** vérifie le degré de P.

3.

On écrit $R(x) = ax^2 + bx + c$. Détermine a, b et c par identification.

INDICE

Début : développe $(x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c)$; le terme en x^4 donne a, le terme constant donne c.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : le produit nul. **Attention :** un des facteurs peut-il s'annuler ?

Exercice 6

Deux équations résolues par factorisation

1.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 = 10x$.

INDICE

Début : passe tous les termes dans le membre de gauche et mets x en facteur. Cherche ensuite une racine évidente du facteur de degré 2 parmi 5 et -5.

2.

On considère $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 39x + 20$. Vérifie que $\frac{1}{2}$ est une racine de P, puis divise $P(x)$ par $x - \frac{1}{2}$.

INDICE

Début : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Dans la division, le premier terme du quotient est $\frac{2x^3}{x} = 2x^2$. On soustrait $2x^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x^3 - x^2$: il reste $-2x^2$, et on abaisse $-39x$. **Attention :** la méthode ne change pas, seuls les calculs portent sur des fractions.

3.

Factorise $2x^2 - 2x - 40$, puis résous l'équation $P(x) = 0$.

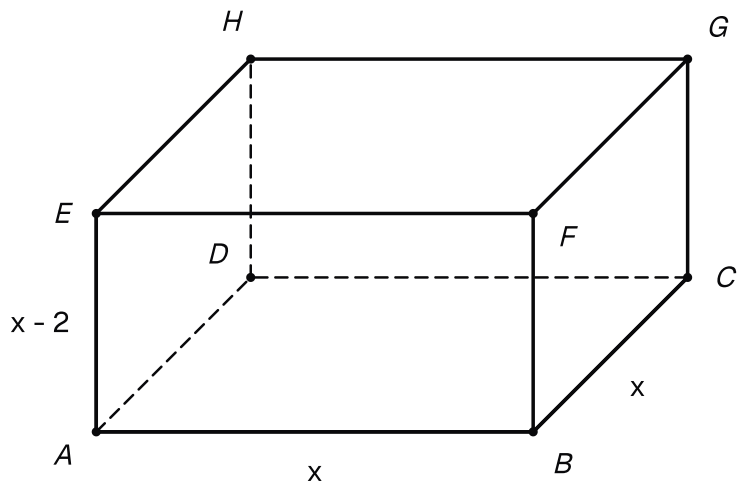
INDICE

Début : mets 2 en facteur ; le facteur $x^2 - x - 20$ a une racine évidente parmi 5 et -5.

Exercice 7

Le volume d'un aquarium

Un aquarium a la forme d'un pavé droit. Sa base est un carré de côté x dm, et sa hauteur mesure $x - 2$ dm, avec $x > 2$. Un décimètre cube contient un litre d'eau.



L'aquarium en pavé droit : une base carrée de côté x et une hauteur de x - 2, en décimètres.

1.

Exprime le volume $V(x)$ de l'aquarium, en dm³, sous la forme d'un polynôme. Donne son degré.

INDICE

Outil (rappel du collège) : le volume d'un pavé droit est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

2.

On veut un aquarium de 75 litres. Écris l'équation correspondante sous la forme $P(x) = 0$, puis vérifie que 5 est une racine de P.

INDICE

Début : 75 litres font 75 dm³ ; passe 75 dans le membre de gauche.

3.

Divise $P(x)$ par $x - 5$, puis justifie que 5 est la seule valeur de x qui convient. Donne les dimensions de l'aquarium.

INDICE

Début : n'oublie pas le terme $0x$ dans la division. **Attention :** le quotient peut-il s'annuler quand $x > 2$?