BURHAN

Les polynômes : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Entraînement	7

Exercice 1

De la racine évidente à l'équation

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

1.

Calcule $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$ et $P(-2)$. Donne une racine évidente de P.

INDICE

Début : $P(1)$ est la somme des coefficients ; pour les autres valeurs, calcule chaque terme séparément.

CORRIGÉ

On calcule chaque terme séparément :

- $P(1) = 2 - 3 - 11 + 6 = -6$;
- $P(-1) = -2 - 3 + 11 + 6 = 12$;
- $P(2) = 16 - 12 - 22 + 6 = -12$;
- $P(-2) = -16 - 12 + 22 + 6 = 0$.

Conclusion. Seul $P(-2)$ est nul : -2 est une racine évidente de P.

2.

Effectue la division de $P(x)$ par $x + 2$, puis écris $P(x)$ sous la forme $(x + 2)\,Q(x)$.

INDICE

Début : $x + 2 = x - (-2)$. Le premier terme du quotient est $2x^2$, et le reste doit valoir $P(-2)$.

CORRIGÉ

On divise par $x + 2 = x - (-2)$; le reste attendu est $P(-2) = 0$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 & \underline{x + 2} \\ -\left(2x^3 + 4x^2\right) & \\ -7x^2 - 11x & \\ -\left(-7x^2 - 14x\right) & \\ 3x + 6 & \\ -\left(3x + 6\right) & \\ 0 & \end{array}$$

Le reste est nul, égal à $P(-2)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (x + 2)\,Q(x)$ avec $Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

3.

Vérifie que 3 est une racine de Q, puis écris $P(x)$ comme un produit de trois facteurs du premier degré.

INDICE

Début : après le calcul de $Q(3)$, écris $Q(x) = (x-3)(ax+b)$ et identifie a et b.

CORRIGÉ

3 est une racine de Q.

$$Q(3) = 18 - 21 + 3 = 0.$$

Donc, d'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, Q est divisible par $x - 3$: comme Q est de degré 2, il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $Q(x) = (x-3)(ax+b)$.

Identification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-3)(ax+b)\\&= ax^2 + (b-3a)x - 3b.\end{aligned}$$

On compare avec $2x^2 - 7x + 3$. D'après l'égalité de deux polynômes, $a = 2$ et $-3b = 3$, donc $b = -1$. Contrôle du coefficient de x : $b - 3a = -1 - 6 = -7$.

Factorisation. Ainsi $Q(x) = (x-3)(2x-1)$ pour tout réel x.

Contrôle. $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$, puis, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x^2 - x - 6)(2x-1)\\&= 2x^3 - x^2 - 2x^2\\&\quad + x - 12x + 6\\&= 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.\end{aligned}$$

Conclusion. 3 est une racine de Q et, pour tout réel x, $P(x) = (x+2)(x-3)(2x-1)$.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil (rappel du collège) : la règle du produit nul : un produit vaut 0 lorsqu'un de ses facteurs vaut 0, et seulement dans ce cas.

CORRIGÉ

D'après la question 3, $P(x) = 0$ équivaut à $(x + 2)(x - 3)(2x - 1) = 0$.

D'après la règle du produit nul, l'un des facteurs est nul :

- $x + 2 = 0$ donne $x = -2$;
- $x - 3 = 0$ donne $x = 3$;
- $2x - 1 = 0$ donne $x = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$ est :

$$S = \left\{-2, \frac{1}{2}, 3\right\}.$$

Exercice 2

Un quotient à coefficients inconnus

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 - 7x - 6.$$

1.

Vérifie que 3 est une racine de P. Quel est le degré du quotient Q de la division de P par $x - 3$?

INDICE

Outil : la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, qui donne aussi le degré du quotient.

CORRIGÉ

Racine. On calcule :

$$P(3) = 27 - 21 - 6 = 0.$$

Le réel 3 est donc une racine de P.

Degré du quotient. P est de degré 3. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, il existe un polynôme Q de degré $3 - 1 = 2$ tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 3)\,Q(x)$.

Conclusion. 3 est une racine de P, et le quotient Q est de degré 2.

2.

On écrit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Développe $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$, puis détermine a, b et c par identification.

INDICE

Début : $P(x)$ n'a pas de terme en x^2 : son coefficient est 0. Identifie en partant du plus haut degré.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x - 3)(ax^2 + bx + c) \\ = ax^3 + (b - 3a)x^2 \\ + (c - 3b)x - 3c.\end{aligned}$$

Identification. On écrit $P(x) = x^3 + 0x^2 - 7x - 6$. D'après l'égalité de deux polynômes, du plus haut degré au terme constant :

- $a = 1$;
- $b - 3a = 0$, donc $b = 3$;
- $c - 3b = -7$, donc $c = 2$;
- contrôle du terme constant : $-3c = -6$.

Conclusion. $a = 1$, $b = 3$ et $c = 2$: pour tout réel x, $Q(x) = x^2 + 3x + 2$.

3.

Trouve une racine évidente de Q, puis écris $P(x)$ comme un produit de trois facteurs du premier degré.

INDICE

Début : essaie $Q(-1)$, puis écris $Q(x) = (x+1)(x+d)$.

CORRIGÉ

Racine évidente de Q. On a $Q(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, Q est divisible par $x + 1$.

Second facteur. On écrit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+d)\\&= x^2 + (d+1)x + d.\end{aligned}$$

Le terme constant donne $d = 2$, et le coefficient de x donne bien $d + 1 = 3$. Donc $Q(x) = (x+1)(x+2)$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-3)(x^2+3x+2)\\&= x^3 + 3x^2 + 2x\\&\quad - 3x^2 - 9x - 6\\&= x^3 - 7x - 6.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Exercice 3

Des paramètres fixés par une racine ou par un reste

Soit m un réel. On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 + mx^2 + 3x + 10.$$

1.

Détermine m pour que 5 soit une racine de P.

INDICE

Début : écris $P(5) = 0$: c'est une équation du premier degré d'inconnue m.

CORRIGÉ

On calcule $P(5)$ en fonction de m :

$$\begin{aligned} P(5) &= 125 + 25m + 15 + 10 \\ &= 25m + 150. \end{aligned}$$

Le réel 5 est une racine de P si et seulement si $P(5) = 0$, c'est-à-dire $25m + 150 = 0$, soit $m = -6$.

Conclusion. 5 est une racine de P pour $m = -6$, et pour cette seule valeur.

2.

On prend $m = -6$. Divise $P(x)$ par $x - 5$, puis factorise complètement $P(x)$.

INDICE

Début : le quotient est de degré 2. Cherche ensuite une racine évidente de ce quotient parmi 1 et -1.

CORRIGÉ

Division. Avec $m = -6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ pour tout réel x.

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+3x+10 & \underline{x-5} \\ -\left(x^3-5x^2\right) & x^2-x-2 \\ -x^2+3x & \\ -\left(-x^2+5x\right) & \\ -2x+10 & \\ -(-2x+10) & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x - 5)(x^2 - x - 2)$ pour tout réel x.

Factorisation du quotient. Pour $x = -1$, le quotient vaut $1 + 1 - 2 = 0$: d'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, il est divisible par $x + 1$. En écrivant $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x + d)$, le terme constant donne $d = -2$.

Contrôle. $(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (x - 5)(x + 1)(x - 2)$.

3.

On pose maintenant $R(x) = 2x^3 + x^2 + kx - 4$, où k est un réel. Détermine k pour que le reste de la division de R par $x + 2$ soit égal à 6.

INDICE

Outil : le reste de la division par $x + 2 = x - (-2)$ est le nombre $R(-2)$.

CORRIGÉ

Comme $x + 2 = x - (-2)$, d'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste de la division de R par $x + 2$ est $R(-2)$:

$$\begin{aligned} R(-2) &= -16 + 4 - 2k - 4 \\ &= -16 - 2k. \end{aligned}$$

On veut $-16 - 2k = 6$, soit $-2k = 22$, donc $k = -11$.

Contrôle. Avec $k = -11$, $R(-2) = -16 + 4 + 22 - 4 = 6$.

Conclusion. Le reste vaut 6 pour $k = -11$.

Exercice 4

Factoriser en regroupant des termes

1.

Factorise $P(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 100$ en regroupant les deux premiers termes, puis les deux derniers.

INDICE

Début : $x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$; cherche le même facteur $x + 4$ dans $-25x - 100$.

CORRIGÉ

Regroupement. On a $x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$ et $-25x - 100 = -25(x + 4)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2(x + 4) - 25(x + 4) \\ &= (x + 4)(x^2 - 25). \end{aligned}$$

Identité remarquable. D'après $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x + 4)(x^2 - 25) \\ &= x^3 - 25x + 4x^2 - 100 \\ &= x^3 + 4x^2 - 25x - 100. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (x + 4)(x - 5)(x + 5)$.

2.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : la factorisation de la question 1 et le produit nul.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $P(x) = 0$ équivaut à $(x + 4)(x - 5)(x + 5) = 0$. D'après la règle du produit nul : $x = -4$ ou $x = 5$ ou $x = -5$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \{-5, -4, 5\}.$$

3.

Factorise de même $Q(x) = 4x^3 - 12x^2 + x - 3$, puis résous $Q(x) = 0$.

INDICE

Début : mets $4x^2$ en facteur dans les deux premiers termes. **Attention :** le facteur restant peut-il s'annuler ?

CORRIGÉ

Factorisation. On met $4x^2$ en facteur dans les deux premiers termes. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^2(x-3) \\ &\quad + 1 \times (x-3) \\ &= (x-3)(4x^2+1). \end{aligned}$$

Contrôle. $(x-3)(4x^2+1) = 4x^3 + x - 12x^2 - 3$, c'est bien $Q(x)$.

Signe du second facteur. Pour tout réel x, $4x^2 \geq 0$, donc $4x^2 + 1 \geq 1$: ce facteur n'est jamais nul.

Résolution. D'après la règle du produit nul, $Q(x) = 0$ équivaut donc à $x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

Conclusion. Pour tout réel x, $Q(x) = (x-3)(4x^2+1)$, et l'équation $Q(x) = 0$ a pour ensemble de solutions :

$$S = \{3\}.$$

Exercice 5

Un polynôme de degré 4 dont on connaît deux racines

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 11x^2 - x - 6.$$

1.

Vérifie que -2 et 3 sont des racines de P.

INDICE

Début : $(-2)^4 = 16$ et $3^4 = 81$; calcule chaque terme avant d'additionner.

CORRIGÉ

On calcule chaque terme avant d'additionner :

- $P(-2) = 32 + 16 - 44 + 2 - 6 = 0$;
- $P(3) = 162 - 54 - 99 - 3 - 6 = 0$.

Conclusion. $P(-2) = 0$ et $P(3) = 0$: les réels -2 et 3 sont des racines de P.

2.

Sachant que -2 et 3 sont deux racines distinctes de P, écris $P(x)$ sous la forme $(x+2)(x-3)\,R(x)$. Quel est le degré du polynôme R ? Développe $(x+2)(x-3)$.

INDICE

Outil : le polynôme ayant deux racines distinctes. **Attention :** vérifie le degré de P.

CORRIGÉ

Forme factorisée. Le polynôme P est de degré 4, et $4 \geq 2$. Les racines -2 et 3 sont distinctes. D'après la propriété du polynôme ayant deux racines distinctes, il existe un polynôme R de degré $4 - 2 = 2$ tel que, pour tout réel x :

$$P(x) = (x+2)(x-3)\,R(x).$$

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-3)\\&= x^2 - 3x + 2x - 6\\&= x^2 - x - 6.\end{aligned}$$

Conclusion. R est de degré $4 - 2 = 2$, et $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$ pour tout réel x.

3.

On écrit $R(x) = ax^2 + bx + c$. Détermine a, b et c par identification.

INDICE

Début : développe $(x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c)$; le terme en x^4 donne a, le terme constant donne c.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x, le produit $(x^2 - x - 6)(ax^2 + bx + c)$ est égal à :

$$\begin{aligned} &ax^4 + (b - a)x^3 \\ &\quad + (c - b - 6a)x^2 \\ &\quad + (-c - 6b)x - 6c. \end{aligned}$$

Identification. D'après l'égalité de deux polynômes, en comparant avec $P(x)$:

- $a = 2$;
- $b - a = -2$, donc $b = 0$;
- $c - b - 6a = -11$, donc $c = 1$;
- contrôles : $-c - 6b = -1$ et $-6c = -6$.

Conclusion. $a = 2$, $b = 0$ et $c = 1$: pour tout réel x, $R(x) = 2x^2 + 1$ et $P(x) = (x + 2)(x - 3)(2x^2 + 1)$

.

4.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : le produit nul. **Attention :** un des facteurs peut-il s'annuler ?

CORRIGÉ

Signe du facteur de degré 2. Pour tout réel x, $2x^2 \geq 0$, donc $2x^2 + 1 \geq 1$: ce facteur n'est jamais nul.

Résolution. D'après la question 3 et la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $x + 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \{-2, 3\}.$$

Exercice 6

Deux équations résolues par factorisation

1.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 = 10x$.

INDICE

Début : passe tous les termes dans le membre de gauche et mets x en facteur. Cherche ensuite une racine évidente du facteur de degré 2 parmi 5 et -5.

CORRIGÉ

Équation produit. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 = 10x \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x^2 - 3x - 10) = 0. \end{aligned}$$

Factorisation du second facteur. Pour $x = 5$, le facteur $x^2 - 3x - 10$ vaut $25 - 15 - 10 = 0$. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, il est divisible par $x - 5$. Par identification, $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$; contrôle : $x^2 + 2x - 5x - 10 = x^2 - 3x - 10$.

Résolution. L'équation s'écrit $x(x - 5)(x + 2) = 0$. D'après la règle du produit nul : $x = 0$ ou $x = 5$ ou $x = -2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \{-2, 0, 5\}.$$

Remarque. Diviser les deux membres par x aurait fait perdre la solution 0.

2.

On considère $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 39x + 20$. Vérifie que $\dfrac{1}{2}$ est une racine de P, puis divise $P(x)$ par $x - \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$. Dans la division, le premier terme du quotient est $\dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$. On soustrait $2x^2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = 2x^3 - x^2$: il reste $-2x^2$, et on abaisse $-39x$. **Attention :** la méthode ne change pas, seuls les calculs portent sur des fractions.

CORRIGÉ

Racine. On calcule, terme par terme :

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{39}{2} + 20 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{39}{2} + 20 \\ &= -20 + 20 = 0. \end{aligned}$$

Division.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 39x + 20 & x - \dfrac{1}{2} \\ \underline{-\left(2x^3 - x^2\right)} & \\ -2x^2 - 39x & \\ \underline{-\left(-2x^2 + x\right)} & \\ -40x + 20 & \\ \underline{-\left(-40x + 20\right)} & \\ 0 & \end{array}$$

Conclusion. $\dfrac{1}{2}$ est une racine de P et, pour tout réel x, $P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x - 40)$.

3.

Factorise $2x^2 - 2x - 40$, puis résous l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Début : mets 2 en facteur ; le facteur $x^2 - x - 20$ a une racine évidente parmi 5 et -5.

CORRIGÉ

Factorisation du quotient. Pour tout réel x, $2x^2 - 2x - 40 = 2(x^2 - x - 20)$. Pour $x = 5$, le facteur $x^2 - x - 20$ vaut $25 - 5 - 20 = 0$. Par identification, $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$; contrôle : $x^2 + 4x - 5x - 20 = x^2 - x - 20$.

Factorisation de P. Comme $2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(x) \\ &= (2x - 1)(x - 5)(x + 4). \end{aligned}$$

Résolution. D'après la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $2x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$ ou $x + 4 = 0$.

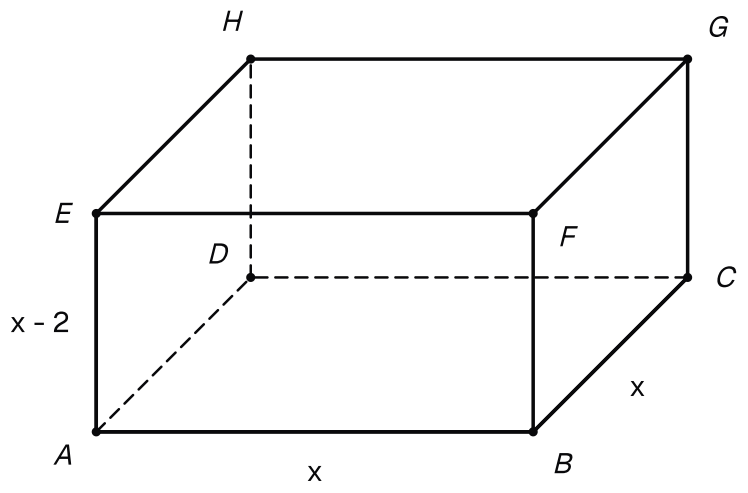
Conclusion. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{-4, \frac{1}{2}, 5\right\}.$$

Exercice 7

Le volume d'un aquarium

Un aquarium a la forme d'un pavé droit. Sa base est un carré de côté x dm, et sa hauteur mesure $x - 2$ dm, avec $x > 2$. Un décimètre cube contient un litre d'eau.



L'aquarium en pavé droit : une base carrée de côté x et une hauteur de x - 2, en décimètres.

1.

Exprime le volume $V(x)$ de l'aquarium, en dm³, sous la forme d'un polynôme. Donne son degré.

INDICE

Outil (rappel du collège) : le volume d'un pavé droit est le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

CORRIGÉ

D'après le volume d'un pavé droit, on multiplie l'aire de la base, x^2, par la hauteur $x - 2$. Pour tout réel $x > 2$:

$$V(x) = x^2(x - 2) = x^3 - 2x^2.$$

D'après le degré d'un produit, $\deg V = 2 + 1 = 3$.

Conclusion. $V(x) = x^3 - 2x^2$: un polynôme de degré 3, de coefficient dominant 1.

2.

On veut un aquarium de 75 litres. Écris l'équation correspondante sous la forme $P(x) = 0$, puis vérifie que 5 est une racine de P.

INDICE

Début : 75 litres font 75 dm³ ; passe 75 dans le membre de gauche.

CORRIGÉ

Équation. 75 litres font 75 dm³. On veut $V(x) = 75$, c'est-à-dire $x^3 - 2x^2 - 75 = 0$. On pose, pour tout réel x, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$.

Racine.

$$P(5) = 125 - 50 - 75 = 0.$$

Conclusion. L'équation s'écrit $P(x) = 0$, et le réel 5 est une racine de P.

3.

Divise $P(x)$ par $x - 5$, puis justifie que 5 est la seule valeur de x qui convient. Donne les dimensions de l'aquarium.

INDICE

Début : n'oublie pas le terme $0x$ dans la division. **Attention :** le quotient peut-il s'annuler quand $x > 2$?

CORRIGÉ

Division. On écrit le terme en x avec un coefficient nul.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2+0x-75 & \underline{x-5} \\ -\left(x^3-5x^2\right) & \\ 3x^2+0x & \\ -\left(3x^2-15x\right) & \\ 15x-75 & \\ -\left(15x-75\right) & \\ 0 & \end{array}$$

Donc, pour tout réel x, $P(x) = (x - 5)(x^2 + 3x + 15)$.

Signe du quotient. Pour $x > 2$, les termes x^2, $3x$ et 15 sont positifs : $x^2 + 3x + 15 > 0$, donc ce facteur ne s'annule pas pour $x > 2$.

Résolution. D'après la règle du produit nul, pour $x > 2$, $P(x) = 0$ équivaut donc à $x = 5$.

Contrôle. $5 \times 5 \times 3 = 75$.

Conclusion. La seule valeur qui convient est $x = 5$: l'aquarium a une base carrée de 5 dm de côté et une hauteur de 3 dm.