BURHAN

Les polynômes : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Application	8

Exercice 1

Polynôme ou pas ? Degré et coefficients

On considère quatre expressions, où x désigne un réel :

- $A(x) = 4x - 7x^3 + 2$;
- $B(x) = (x + 5)(2x - 1) - 2x^2$;
- $C(x) = \dfrac{3}{x} + x$;
- $D(x) = \dfrac{x^4 - 6}{2}$.

1.

Laquelle de ces expressions n'est pas un polynôme ? Justifie ta réponse.

INDICE

Début : un polynôme se calcule pour n'importe quel réel x. Que se passe-t-il pour $x = 0$?

2.

Range $A(x)$ selon les puissances de x décroissantes. Donne son degré, son coefficient dominant, son terme constant et le coefficient de x^2.

INDICE

Début : commence par le terme qui porte la plus grande puissance de x.

3.

Développe et réduis $B(x)$. Quel est son degré ?

INDICE

Début : développe le produit, puis regroupe les termes de même degré. Surveille les termes en x^2.

4.

Écris $D(x)$ sous la forme $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et donne ses coefficients.

INDICE

Début : diviser par 2, c'est multiplier par $\dfrac{1}{2}$; distribue ce nombre sur les deux termes.

Exercice 2

Prévoir le degré d'un produit et d'une somme

On donne les polynômes P et Q définis, pour tout réel x, par $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 2x - 4$.

1.

Sans développer, prévois le degré du produit PQ et son coefficient dominant.

INDICE

Outil : le degré d'un produit. Le terme de plus haut degré vient des deux termes dominants.

2.

Développe et réduis $P(x) \times Q(x)$, puis contrôle ta prévision.

INDICE

Début : multiplie chacun des trois termes de $P(x)$ par $2x$, puis par -4.

3.

Calcule $P(x) + Q(x)$, puis $P(x) + R(x)$ avec $R(x) = -5x^2 + 7x$. Donne le degré de chaque somme.

INDICE

Outil : on additionne les coefficients des termes de même degré. Regarde ce que deviennent les termes en x^2.

Exercice 3

Identifier des coefficients

1.

Les polynômes $P(x) = (a - 2)x^2 + (b + 1)x + 3c$ et $Q(x) = 5x^2 - 4x + 6$ sont égaux. Détermine les réels a, b et c.

INDICE

Outil : l'égalité de deux polynômes. Compare les coefficients de x^2, ceux de x, puis les termes constants.

2.

Détermine les réels a et b tels que, pour tout réel x, $a(x - 2)^2 + b = 3x^2 - 12x + 14$.

INDICE

Début : développe $(x - 2)^2$, puis compare les coefficients de x^2 et les termes constants.

3.

Existe-t-il un réel m tel que $x^2 + mx = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x ?

INDICE

Début : compare les termes constants des deux membres.

Exercice 4

Quelles valeurs sont des racines ?

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$$

1.

Calcule $P(-2)$, $P(0)$, $P(3)$ et $P(5)$.

INDICE

Début : remplace x par chaque valeur. **Attention :** $(-2)^3 = -8$ et $(-2)^2 = 4$.

2.

Parmi ces quatre réels, lesquels sont des racines de P ?

INDICE

Outil : la définition d'une racine. Quelle valeur de $P(\alpha)$ cherches-tu ?

3.

En déduire deux polynômes du premier degré par lesquels P est divisible.

INDICE

Outil : la racine et la divisibilité par $x - \alpha$. **Attention :** au signe du facteur pour la racine -2.

Exercice 5

À la recherche d'une racine évidente

On considère les polynômes P, Q et R définis, pour tout réel x, par :

- $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 1$;
- $Q(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$;
- $R(x) = x^3 - x^2 + 12$.

1.

Calcule la somme des coefficients de $P(x)$. Que vaut $P(1)$? Conclus.

INDICE

Début : pour $x = 1$, chaque puissance de x vaut 1.

2.

Calcule $Q(1)$ et $Q(-1)$. L'une de ces deux valeurs est-elle une racine de Q ?

INDICE

Début : pour $x = -1$, une puissance paire vaut 1 et une puissance impaire vaut -1.

3.

Cherche une racine évidente de R parmi 1, -1, 2 et -2.

INDICE

Début : essaie les valeurs dans l'ordre et arrête-toi dès que tu obtiens 0.

Exercice 6

Une division en potence

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9.$$

1.

Calcule $P(3)$. Que peux-tu prévoir pour la division de P par $x - 3$?

INDICE

Outil : la division euclidienne par $x - \alpha$: son reste est $P(\alpha)$.

2.

Écris $P(x)$ avec tous ses termes, puis effectue la division en potence de $P(x)$ par $x - 3$.

INDICE

Début : le terme en x manque ; écris $0x$ pour garder les colonnes alignées. Le premier terme du quotient est $2x^2$.

3.

Contrôle le résultat en développant $(x - 3)\,Q(x)$.

INDICE

Début : développe, puis regroupe les termes en x^2 et les termes en x.

Exercice 7

Facteur commun et identités remarquables

Factorise chacun des polynômes suivants, définis pour tout réel x, puis vérifie ta factorisation en développant.

a)

$P(x) = 6x^3 - 9x^2$.

INDICE

Début : cherche le plus grand facteur commun aux deux termes : un nombre et une puissance de x.

b)

$Q(x) = x^2 - 10x + 25$.

INDICE

Outil (rappel du collège) : $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$. Ici, $25 = 5^2$.

c)

$R(x) = 4x^3 - 25x$.

INDICE

Début : mets d'abord x en facteur. Le facteur restant est une différence de deux carrés.

d)

$S(x) = 2x^2 + 20x + 50$.

INDICE

Début : mets d'abord 2 en facteur, puis reconnais une identité remarquable. Garde ce facteur 2 jusqu'au bout.

Exercice 8

Un reste sans poser la division

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5.$$

1.

Sans poser la division, détermine le reste de la division euclidienne de P par $x - 3$.

INDICE

Outil : le reste de la division par $x - \alpha$ est le nombre $P(\alpha)$.

2.

Vérifie que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 3)(x^3 + 2) + 1$. Quel est le quotient de la division de P par $x - 3$?

INDICE

Début : développe le membre de droite et compare-le à $P(x)$.

3.

Détermine le reste de la division de P par $x + 2$. Le polynôme P est-il divisible par $x + 1$?

INDICE

Début : $x + 2 = x - (-2)$; calcule donc $P(-2)$. Procède de même avec $x + 1$.