BURHAN

Les polynômes : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les polynômes	Application	8

Exercice 1

Polynôme ou pas ? Degré et coefficients

On considère quatre expressions, où x désigne un réel :

- $A(x) = 4x - 7x^3 + 2$;
- $B(x) = (x+5)(2x-1) - 2x^2$;
- $C(x) = \dfrac{3}{x} + x$;
- $D(x) = \dfrac{x^4 - 6}{2}$.

1.

Laquelle de ces expressions n'est pas un polynôme ? Justifie ta réponse.

INDICE

Début : un polynôme se calcule pour n'importe quel réel x. Que se passe-t-il pour $x = 0$?

CORRIGÉ

On cherche une valeur de x pour laquelle l'une des expressions ne se calcule pas.

Pour $x = 0$, l'expression $C(x)$ demande de diviser 3 par 0 : $C(0)$ n'existe pas. Or un polynôme se calcule pour tout réel x.

Conclusion. L'expression C n'est pas un polynôme. Les trois autres s'écrivent comme des sommes de termes $a_k x^k$: les questions suivantes le montrent.

2.

Range $A(x)$ selon les puissances de x décroissantes. Donne son degré, son coefficient dominant, son terme constant et le coefficient de x^2.

INDICE

Début : commence par le terme qui porte la plus grande puissance de x.

CORRIGÉ

On écrit les termes de la plus grande à la plus petite puissance de x. Pour tout réel x :

$$A(x) = -7x^3 + 4x + 2.$$

- Le terme de plus haut degré est $-7x^3$: le degré est 3 et le coefficient dominant est -7, qui n'est pas nul.
- Le terme constant est 2.
- Aucun terme en x^2 n'apparaît : son coefficient est 0.

Conclusion. A est de degré 3, de coefficient dominant -7, de terme constant 2, et le coefficient de x^2 vaut 0.

3.

Développe et réduis $B(x)$. Quel est son degré ?

INDICE

Début : développe le produit, puis regroupe les termes de même degré. Surveille les termes en x^2.

CORRIGÉ

Développement du produit. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+5)(2x-1)\\&=2x^2-x+10x-5\\&=2x^2+9x-5.\end{aligned}$$

Réduction. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}B(x)&=2x^2+9x-5-2x^2\\&=9x-5.\end{aligned}$$

Les deux termes en x^2 s'annulent l'un l'autre.

Conclusion. $B(x)=9x-5$: B est un polynôme de degré 1, de coefficient dominant 9 et de terme constant -5.

4.

Écris $D(x)$ sous la forme $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ et donne ses coefficients.

INDICE

Début : diviser par 2, c'est multiplier par $\dfrac{1}{2}$; distribue ce nombre sur les deux termes.

CORRIGÉ

Diviser par 2 revient à multiplier par $\dfrac{1}{2}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}D(x)&=\frac{1}{2}x^4-3\\&=\frac{1}{2}x^4+0x^3+0x^2\\&\quad+0x-3.\end{aligned}$$

La division par 2 ne pose aucun problème : x n'est pas au dénominateur.

Conclusion. $a_4=\dfrac{1}{2}$, $a_3=a_2=a_1=0$ et $a_0=-3$: D est un polynôme de degré 4.

Exercice 2

Prévoir le degré d'un produit et d'une somme

On donne les polynômes P et Q définis, pour tout réel x, par $P(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = 2x - 4$.

1.

Sans développer, prévois le degré du produit PQ et son coefficient dominant.

INDICE

Outil : le degré d'un produit. Le terme de plus haut degré vient des deux termes dominants.

CORRIGÉ

On a $\deg P = 2$ et $\deg Q = 1$, et aucun des deux polynômes n'est nul. D'après le degré d'un produit :

$$\deg(PQ) = 2 + 1 = 3.$$

Le terme de degré 3 du produit vient uniquement des deux termes dominants :

$$5x^2 \times 2x = 10x^3.$$

Conclusion. PQ est de degré 3 et son coefficient dominant est 10.

2.

Développe et réduis $P(x) \times Q(x)$, puis contrôle ta prévision.

INDICE

Début : multiplie chacun des trois termes de $P(x)$ par $2x$, puis par -4.

CORRIGÉ

On multiplie chaque terme de $P(x)$ par $2x$, puis par -4. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(x) \times Q(x) \\ &= 10x^3 - 20x^2 - 6x^2 \\ &\quad + 12x + 2x - 4 \\ &= 10x^3 - 26x^2 + 14x - 4. \end{aligned}$$

Conclusion. $P(x) \times Q(x) = 10x^3 - 26x^2 + 14x - 4$: un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant 10, comme prévu à la question 1.

3.

Calcule $P(x)+Q(x)$, puis $P(x)+R(x)$ avec $R(x)=-5x^2+7x$. Donne le degré de chaque somme.

INDICE

Outil : on additionne les coefficients des termes de même degré. Regarde ce que deviennent les termes en x^2.

CORRIGÉ

Somme de P et Q. Pour tout réel x :

$$P(x)+Q(x)=5x^2-x-3.$$

Les degrés 2 et 1 sont différents : la somme a le plus grand des deux, soit 2.

Somme de P et R. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&P(x)+R(x)\\&=5x^2-5x^2-3x+7x+1\\&=4x+1.\end{aligned}$$

Ici P et R ont le même degré 2, mais leurs termes dominants s'annulent : la somme n'est que de degré 1.

Conclusion. $P(x)+Q(x)$ est de degré 2 et $P(x)+R(x)$ est de degré 1.

Exercice 3

Identifier des coefficients

1.

Les polynômes $P(x) = (a-2)x^2 + (b+1)x + 3c$ et $Q(x) = 5x^2 - 4x + 6$ sont égaux. Détermine les réels a, b et c.

INDICE

Outil : l'égalité de deux polynômes. Compare les coefficients de x^2, ceux de x, puis les termes constants.

CORRIGÉ

D'après l'égalité de deux polynômes, les coefficients des termes de même degré sont égaux :

- coefficient de x^2 : $a - 2 = 5$, donc $a = 7$;
- coefficient de x : $b + 1 = -4$, donc $b = -5$;
- terme constant : $3c = 6$, donc $c = 2$.

Conclusion. $a = 7$, $b = -5$ et $c = 2$.

2.

Détermine les réels a et b tels que, pour tout réel x, $a(x-2)^2 + b = 3x^2 - 12x + 14$.

INDICE

Début : développe $(x-2)^2$, puis compare les coefficients de x^2 et les termes constants.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x, $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, donc :

$$\begin{aligned} &a(x-2)^2 + b \\ &= ax^2 - 4ax + 4a + b. \end{aligned}$$

Identification. D'après l'égalité de deux polynômes :

- coefficient de x^2 : $a = 3$;
- terme constant : $4a + b = 14$, donc $b = 14 - 12 = 2$;
- coefficient de x : on doit avoir $-4a = -12$, ce qui est vrai pour $a = 3$.

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &3(x-2)^2 + 2 \\ &= 3x^2 - 12x + 12 + 2 \\ &= 3x^2 - 12x + 14. \end{aligned}$$

Conclusion. Les réels cherchés sont $a = 3$ et $b = 2$.

3.

Existe-t-il un réel m tel que $x^2 + mx = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x ?

INDICE

Début : compare les termes constants des deux membres.

CORRIGÉ

Si l'égalité avait lieu pour tout réel x, l'égalité de deux polynômes imposerait des termes constants égaux.

Or le terme constant du membre de gauche est 0 et celui du membre de droite est 1. Comme $0 \neq 1$, cette condition n'est remplie pour aucune valeur de m.

On le voit aussi pour $x = 0$: le membre de gauche vaut 0 et celui de droite vaut 1, quel que soit m.

Conclusion. Aucun réel m ne rend ces deux expressions égales pour tout réel x.

Exercice 4

Quelles valeurs sont des racines ?

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$$

1.

Calcule $P(-2)$, $P(0)$, $P(3)$ et $P(5)$.

INDICE

Début : remplace x par chaque valeur. **Attention :** $(-2)^3 = -8$ et $(-2)^2 = 4$.

CORRIGÉ

On remplace x par chaque valeur, en calculant les termes un par un :

- $P(-2) = -8 - 16 + 14 + 10 = 0$;
- $P(0) = 10$;
- $P(3) = 27 - 36 - 21 + 10 = -20$;
- $P(5) = 125 - 100 - 35 + 10 = 0$.

Conclusion. $P(-2) = 0$, $P(0) = 10$, $P(3) = -20$ et $P(5) = 0$.

2.

Parmi ces quatre réels, lesquels sont des racines de P ?

INDICE

Outil : la définition d'une racine. Quelle valeur de $P(\alpha)$ cherches-tu ?

CORRIGÉ

D'après la définition d'une racine, un réel α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

- $P(-2) = 0$ et $P(5) = 0$: les réels -2 et 5 sont des racines de P.
- $P(0) = 10$ et $P(3) = -20$ ne sont pas nuls : 0 et 3 n'en sont pas.

Conclusion. Parmi les quatre réels, les racines de P sont -2 et 5.

3.

En déduire deux polynômes du premier degré par lesquels P est divisible.

INDICE

Outil : la racine et la divisibilité par $x-\alpha$. **Attention :** au signe du facteur pour la racine -2.

CORRIGÉ

Le polynôme P est de degré 3. D'après la racine et la divisibilité par $x-\alpha$, chaque racine α de P donne un facteur $x-\alpha$:

- 5 est une racine, donc P est divisible par $x-5$;
- -2 est une racine, donc P est divisible par $x-(-2)=x+2$, et non par $x-2$.

Contrôle. Le facteur $x+2$ s'annule pour $x=-2$, et $x-5$ pour $x=5$.

Conclusion. P est divisible par $x+2$ et par $x-5$.

Exercice 5

À la recherche d'une racine évidente

On considère les polynômes P, Q et R définis, pour tout réel x, par :

- $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 1$;
- $Q(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$;
- $R(x) = x^3 - x^2 + 12$.

1.

Calcule la somme des coefficients de $P(x)$. Que vaut $P(1)$? Conclus.

INDICE

Début : pour $x = 1$, chaque puissance de x vaut 1.

CORRIGÉ

Pour $x = 1$, toutes les puissances de x valent 1 : $P(1)$ est donc la somme des coefficients de $P(x)$.

$$P(1) = 3 - 5 + 1 + 2 - 1 = 0.$$

Le réel 1 est une racine évidente de P. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, P est divisible par $x - 1$.

Conclusion. La somme des coefficients vaut 0, donc $P(1) = 0$: 1 est une racine de P, et P est divisible par $x - 1$.

2.

Calcule $Q(1)$ et $Q(-1)$. L'une de ces deux valeurs est-elle une racine de Q ?

INDICE

Début : pour $x = -1$, une puissance paire vaut 1 et une puissance impaire vaut -1.

CORRIGÉ

On remplace x par 1, puis par -1 :

- $Q(1) = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$;
- $Q(-1) = -2 + 1 - 1 + 2 = 0$.

D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, comme $Q(-1) = 0$, le polynôme Q est divisible par $x - (-1) = x + 1$.

Conclusion. Le réel -1 est une racine de Q ; le réel 1 n'en est pas une, car $Q(1) = 6$.

3.

Cherche une racine évidente de R parmi 1, -1, 2 et -2.

INDICE

Début : essaie les valeurs dans l'ordre et arrête-toi dès que tu obtiens 0.

CORRIGÉ

On essaie les valeurs dans l'ordre proposé :

- $R(1) = 1 - 1 + 12 = 12$;
- $R(-1) = -1 - 1 + 12 = 10$;
- $R(2) = 8 - 4 + 12 = 16$;
- $R(-2) = -8 - 4 + 12 = 0$.

D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, R est donc divisible par $x + 2$.

Conclusion. Parmi les quatre valeurs, seul -2 est une racine évidente de R.

Exercice 6

Une division en potence

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9.$$

1.

Calcule $P(3)$. Que peux-tu prévoir pour la division de P par $x - 3$?

INDICE

Outil : la division euclidienne par $x - \alpha$: son reste est $P(\alpha)$.

CORRIGÉ

D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste de la division de P par $x - 3$ est le nombre $P(3)$. Or :

$$P(3) = 54 - 63 + 9 = 0.$$

Conclusion. Le reste de la division de P par $x - 3$ sera nul : P est divisible par $x - 3$.

2.

Écris $P(x)$ avec tous ses termes, puis effectue la division en potence de $P(x)$ par $x - 3$.

INDICE

Début : le terme en x manque ; écris $0x$ pour garder les colonnes alignées. Le premier terme du quotient est $2x^2$.

CORRIGÉ

Forme complète. Le terme en x manque ; on l'écrit avec un coefficient nul : $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 9$.

Division.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-7x^2+0x+9 & \underline{x-3} \\ -\left(2x^3-6x^2\right) & \\ -x^2+0x & \\ -\left(-x^2+3x\right) & \\ -3x+9 & \\ -\left(-3x+9\right) & \\ 0 & \end{array}$$

Conclusion. Le quotient est $Q(x) = 2x^2 - x - 3$ et le reste est 0, comme prévu à la question 1.

3.

Contrôle le résultat en développant $(x-3)\,Q(x)$.

INDICE

Début : développe, puis regroupe les termes en x^2 et les termes en x.

CORRIGÉ

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-3)(2x^2-x-3)\\&=2x^3-x^2-3x\\&\quad-6x^2+3x+9\\&=2x^3-7x^2+9.\end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve $P(x)$: pour tout réel x, $P(x)=(x-3)(2x^2-x-3)$, ce qui confirme la division.

Exercice 7

Facteur commun et identités remarquables

Factorise chacun des polynômes suivants, définis pour tout réel x, puis vérifie ta factorisation en développant.

a)

$P(x) = 6x^3 - 9x^2$.

INDICE

Début : cherche le plus grand facteur commun aux deux termes : un nombre et une puissance de x.

CORRIGÉ

On a $6x^3 = 3x^2 \times 2x$ et $9x^2 = 3x^2 \times 3$: les deux termes ont le facteur commun $3x^2$.

Contrôle. $3x^2 \times 2x - 3x^2 \times 3 = 6x^3 - 9x^2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = 3x^2(2x - 3)$.

b)

$Q(x) = x^2 - 10x + 25$.

INDICE

Outil (rappel du collège) : $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$. Ici, $25 = 5^2$.

CORRIGÉ

On reconnaît l'identité remarquable $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$, avec $u = x$ et $v = 5$:

$$\begin{aligned} & x^2 - 10x + 25 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= (x - 5)^2. \end{aligned}$$

Contrôle. $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$.

Conclusion. Pour tout réel x, $Q(x) = (x - 5)^2$.

c)

$R(x) = 4x^3 - 25x$.

INDICE

Début : mets d'abord x en facteur. Le facteur restant est une différence de deux carrés.

CORRIGÉ

Facteur commun. Pour tout réel x, $R(x) = x(4x^2 - 25)$.

Différence de deux carrés. D'après l'identité remarquable $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25 &= (2x)^2 - 5^2 \\ &= (2x - 5)(2x + 5). \end{aligned}$$

Contrôle. $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$, puis $x(4x^2 - 25) = 4x^3 - 25x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $R(x) = x(2x - 5)(2x + 5)$.

d)

$S(x) = 2x^2 + 20x + 50$.

INDICE

Début : mets d'abord 2 en facteur, puis reconnais une identité remarquable. Garde ce facteur 2 jusqu'au bout.

CORRIGÉ

Facteur commun. Pour tout réel x, $S(x) = 2(x^2 + 10x + 25)$.

Identité remarquable. D'après $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$\begin{aligned} & x^2 + 10x + 25 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= (x+5)^2. \end{aligned}$$

Contrôle. $2(x+5)^2 = 2(x^2 + 10x + 25) = 2x^2 + 20x + 50$.

Conclusion. Pour tout réel x, $S(x) = 2(x+5)^2$: le facteur 2 est conservé.

Exercice 8

Un reste sans poser la division

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par :

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5.$$

1.

Sans poser la division, détermine le reste de la division euclidienne de P par $x - 3$.

INDICE

Outil : le reste de la division par $x - \alpha$ est le nombre $P(\alpha)$.

CORRIGÉ

D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste de la division de P par $x - 3$ est le nombre $P(3)$:

$$P(3) = 81 - 81 + 6 - 5 = 1.$$

Conclusion. Le reste de la division euclidienne de P par $x - 3$ est 1.

2.

Vérifie que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 3)(x^3 + 2) + 1$. Quel est le quotient de la division de P par $x - 3$?

INDICE

Début : développe le membre de droite et compare-le à $P(x)$.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x - 3)(x^3 + 2) + 1\\ &= x^4 + 2x - 3x^3 - 6 + 1\\ &= x^4 - 3x^3 + 2x - 5.\end{aligned}$$

C'est bien $P(x)$.

Quotient. D'après la question 1, $1 = P(3)$: l'égalité s'écrit $P(x) = (x - 3)(x^3 + 2) + P(3)$ pour tout réel x. D'après l'unicité dans la division euclidienne par $x - \alpha$, le quotient est $x^3 + 2$ et le reste est 1.

Conclusion. L'égalité est vraie pour tout réel x, et le quotient de la division de P par $x - 3$ est $x^3 + 2$.

3.

Détermine le reste de la division de P par $x+2$. Le polynôme P est-il divisible par $x+1$?

INDICE

Début : $x+2 = x-(-2)$; calcule donc $P(-2)$. Procède de même avec $x+1$.

CORRIGÉ

Reste de la division par x + 2. Comme $x+2 = x-(-2)$, d'après la division euclidienne par $x-\alpha$, ce reste est $P(-2)$:

$$\begin{aligned} P(-2) &= 16 + 24 - 4 - 5 \\ &= 31. \end{aligned}$$

Divisibilité par x + 1. De même, $x+1 = x-(-1)$ et le reste est $P(-1)$:

$$P(-1) = 1 + 3 - 2 - 5 = -3.$$

Ce reste n'est pas nul : -1 n'est pas une racine de P.

Conclusion. Le reste de la division de P par $x+2$ est 31, et P n'est pas divisible par $x+1$.