BURHAN

Les polynômes

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/polynomes/cours

Chapitre	Semestre
Les polynômes	Semestre 1

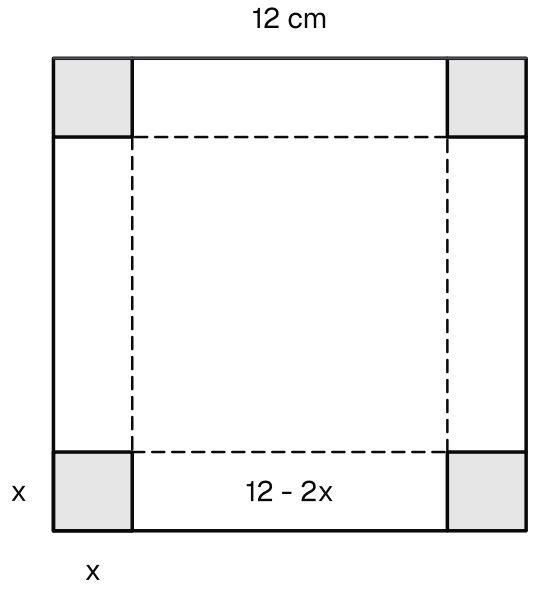
Une boîte et une expression

Prends un carton carré de 12 cm de côté. Dans chaque coin, découpe un petit carré de côté x cm, avec $0 < x < 6$. Replie ensuite les quatre bords : tu obtiens une boîte sans couvercle.

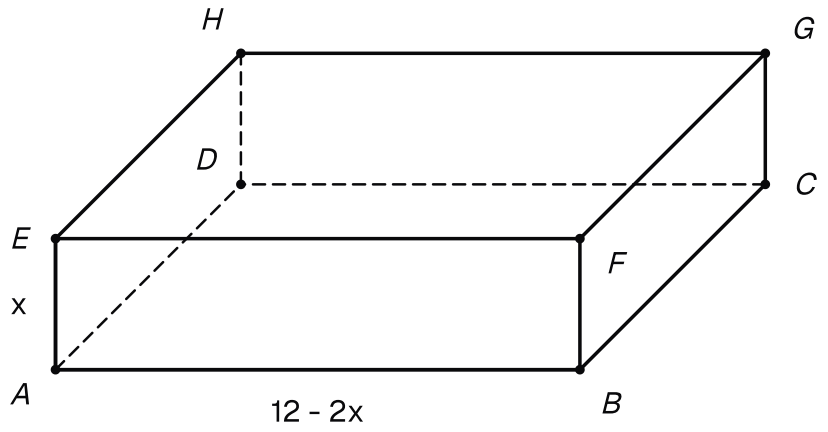
Sa hauteur vaut x et son fond est un carré de côté $12 - 2x$. Son volume, en centimètres cubes, vaut donc :

$$V(x) = x(12 - 2x)^2.$$

Pour $x = 2$, le fond mesure 8 cm de côté, et $V(2) = 2 \times 8^2 = 128$.



Le carton carré de 12 cm de côté : dans chaque coin, un petit carré de côté x est retiré, et les pointillés marquent les plis qui forment la boîte.



Une fois les bords repliés, la boîte sans couvercle : un fond carré de côté 12 - 2x et des bords de hauteur x.

Devine : Une prédiction

Sans tout développer $V(x) = x(12 - 2x)^2$, quelle est la plus haute puissance de x qui apparaît ?

A. x

Faux.

Le facteur x multiplie un carré qui contient lui-même un terme en x^2.

B. x^2

Faux.

C'est la plus haute puissance de $(12 - 2x)^2$ seul ; il reste à multiplier par x.

C. x^3

Juste.

Juste : le terme le plus haut est $x \times 4x^2 = 4x^3$.

D. x^4

Faux.

Le carré donne $(-2x)^2 = 4x^2$, pas x^4 ; avec le facteur x, on obtient x^3.

Correction

Rappel du collège : $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$. Ainsi :

$$(12 - 2x)^2 = 144 - 48x + 4x^2.$$

En multipliant par x :

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

La plus haute puissance est x^3. Contrôle :

$$\begin{aligned} V(2) &= 4 \times 8 - 48 \times 4 + 144 \times 2 \\ &= 128. \end{aligned}$$

Une expression comme $4x^3 - 48x^2 + 144x$ est un **polynôme**.

Dans ce chapitre, tu apprends à lire un polynôme et à calculer avec. Tu cherches ses **racines**, les valeurs qui l'annulent. Tu apprends aussi à le diviser par un facteur comme $x - 2$, puis à le factoriser.

Avec ces outils, tu résous des équations hors de portée du collège. Par exemple : existe-t-il une autre boîte de 128 centimètres cubes ?

Polynôme, degré, égalité

Des expressions d'un même type

Rappel du collège : pour multiplier deux puissances de x, on ajoute les exposants : $x^2 \times x^3 = x^5$. **Développer et réduire**, c'est supprimer les parenthèses, puis regrouper les termes de même puissance.

Développe $(x - 1)(x + 3)$: tu trouves $x^2 + 2x - 3$. Le volume de la boîte s'écrit $4x^3 - 48x^2 + 144x$.

Ces deux expressions ont la même forme : ce sont des sommes de termes « nombre × x^k », où k est un entier naturel.

Devine : Une intruse

Laquelle de ces expressions **ne peut pas** s'écrire comme une somme de termes « nombre × x^k », où k est un entier naturel ?

A. $(x - 2)^2$

Faux.
En développant, on trouve $x^2 - 4x + 4$: c'est bien une somme de tels termes.

B. $\dfrac{3}{x} + 1$

Juste.
Juste : on divise 3 par x, ce qui ne s'écrit pas « nombre × x^k ».

C. $\dfrac{x^2}{4}$

Faux.
Diviser par 4, c'est multiplier par $\dfrac{1}{4}$: on obtient $\dfrac{1}{4}x^2$.

D. 7

Faux.
Un nombre seul convient : $7 = 7x^0$, car $x^0 = 1$.

Correction
Seule $\dfrac{3}{x} + 1$ ne convient pas : le terme $\dfrac{3}{x}$ n'existe pas pour $x = 0$. Au contraire, une somme de termes « nombre × x^k » se calcule pour tout réel x.

> Les trois autres expressions s'écrivent $x^2 - 4x + 4$, $\frac{1}{4}x^2$ et 7.

Définition et vocabulaire

Définition : Polynôme, coefficients et degré

On appelle **polynôme** toute expression $P(x)$ qui peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où n est un entier naturel et a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 sont des réels, appelés **coefficients** du polynôme.

- Les expressions $a_k x^k$ sont les **termes** du polynôme ; a_0 est son **terme constant**.
- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est le **degré** du polynôme, noté $\deg P$, et a_n est son **coefficient dominant**.
- Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est le **polynôme nul** : il n'a pas de degré.

Pour tout réel x, $P(x)$ est un réel : on définit ainsi la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$.

Exemple : lire un polynôme

- Pour $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$: le degré est 3 et le coefficient dominant est 4. Le terme constant est 0 : il n'est pas écrit.
- Le nombre 5 est un polynôme de degré 0.

Pour $P(x) = 2x^4 - x^2 + 7$: $\deg P = 4$, le coefficient dominant est 2 et le terme constant est 7. Les termes en x^3 et en x sont **absents** : leurs coefficients sont nuls. Écrit avec tous ses termes :

$$P(x) = 2x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 7.$$

Exemple : Contre-exemple : ce qui n'est pas un polynôme

- $\frac{2}{x} + x$ n'est pas un polynôme : x figure au dénominateur, et l'expression n'existe pas pour $x = 0$.
- $\sqrt{x} + 1$ n'est pas un polynôme : x est sous une racine carrée.

En revanche, $\frac{x^3 - x}{2}$ est un polynôme. On divise par le nombre 2, pas par x : il s'écrit $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$.

Lire un polynôme

Méthode : lire un polynôme

1. **Développe et réduis** l'expression : plus aucune parenthèse, un seul terme par puissance.

2. **Range** les termes, de la plus haute puissance à la plus basse.
3. **Lis** le degré et le coefficient dominant, puis le terme constant. Un terme qui manque a pour coefficient 0.
4. **Contrôle** la nature de l'expression. Avec x au dénominateur ou sous une racine carrée, ce n'est en général pas un polynôme : regarde si elle peut se réécrire, pour tout réel x, sans dénominateur ni racine carrée.

Vérifie : Un polynôme écrit en facteurs

Soit $Q(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$. Quels sont le degré et le coefficient dominant de Q ?

A. Degré 3, coefficient dominant -1.

Juste.
Juste : le terme le plus haut est $x^2 \times (-x) = -x^3$.

B. Degré 3, coefficient dominant 1.

Faux.
Le signe s'est perdu : $x^2 \times (-x) = -x^3$.

C. Degré 2, coefficient dominant 1.

Faux.
Tu as lu la première parenthèse sans développer. Il faut d'abord développer.

D. Degré 2, coefficient dominant 2.

Faux.
Le produit $x^2 \times 2$ n'est pas le terme le plus haut : c'est $x^2 \times (-x)$.

Correction
On développe : $Q(x) = 2x^2 - x^3 + 2 - x$.

On range : $Q(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$.

Donc $\deg Q = 3$, le coefficient dominant est -1 et le terme constant est 2.

Deux écritures, un même polynôme

En clair. Les écritures $(x - 1)(x + 3)$ et $x^2 + 2x - 3$ désignent le même polynôme : l'une se développe en l'autre. Elles donnent donc la même valeur pour tout réel x.

Inversement, deux polynômes égaux pour **tout** réel x ont les mêmes coefficients. C'est ce qui permet de trouver des coefficients inconnus.

Propriété : Égalité de deux polynômes

Soit P et Q deux polynômes. On a $P(x) = Q(x)$ **pour tout réel** x si et seulement si P et Q ont les mêmes coefficients pour les termes de même degré. On dit alors que P et Q sont **égaux** et on écrit $P = Q$.

En particulier :

- deux polynômes égaux et non nuls ont le même degré ;
- un polynôme vérifie $P(x) = 0$ pour tout réel x si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis : tu l'emploies dans ce chapitre sans le démontrer.

Exemple : trouver des coefficients inconnus

Cherche les réels m et p tels que, pour tout réel x :

$$(x+3)(x+m) = x^2 + px - 6.$$

On développe le membre de gauche : $x^2 + (m+3)x + 3m$. D'après l'égalité de deux polynômes, les coefficients de même degré sont égaux :

$$3m = -6 \quad \text{et} \quad m + 3 = p.$$

Donc $m = -2$ et $p = 1$. Contrôle en développant :

$$\begin{aligned}(x+3)(x-2) &= x^2 - 2x + 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 6.\end{aligned}$$

Méthode : identifier des coefficients

1. **Développe et réduis** chaque membre de l'égalité.
2. **Range** chaque membre selon les puissances décroissantes de x.
3. **Écris** une équation par puissance : même coefficient à gauche et à droite, d'après l'égalité de deux polynômes.
4. **Résous** ces équations, puis **vérifie** en développant avec les valeurs trouvées.

Un piège, puis à toi

Attention : quelques valeurs ne suffisent pas

✗ « x^2 et x prennent la même valeur pour $x = 0$ et pour $x = 1$: ils sont égaux. »

✓ Pour $x = 2$, x^2 vaut 4 et x vaut 2. L'égalité de deux polynômes exige des valeurs égales **pour tout réel** x.

Compare plutôt les coefficients : x^2 a un terme en x^2, et x n'en a pas.

Vérifie : Trois valeurs égales

Les polynômes $P(x) = x^3$ et $Q(x) = x$ prennent les mêmes valeurs en -1, en 0 et en 1. Que peux-tu conclure ?

A. P et Q sont égaux.

Faux.

Trois valeurs ne suffisent pas : $P(2) = 8$, alors que $Q(2) = 2$.

B. P et Q ont le même degré.

Faux.

Non : $\deg P = 3$ et $\deg Q = 1$.

C. On ne peut rien conclure.

Faux.

On peut conclure : le coefficient de x^3 vaut 1 dans P et 0 dans Q.

D. P et Q ne sont pas égaux.

Juste.

Juste : leurs coefficients de x^3 sont différents.

Correction

D'après l'égalité de deux polynômes, $P = Q$ exigerait les mêmes coefficients. Or le coefficient de x^3 vaut 1 dans P et 0 dans Q.

Donc P et Q ne sont pas égaux, bien qu'ils coïncident en -1, 0 et 1. Contrôle : $P(2) = 8$ et $Q(2) = 2$.

À toi : Réécrire autour de 1

Détermine les réels m et p tels que, pour tout réel x, $m(x-1)^2 + p(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Rappel du collège : $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Développe le membre de gauche.

Indice 2

Range le résultat selon les puissances de x, puis écris une équation par puissance.

Indice 3

Point délicat : le terme constant du membre de gauche vaut $m - p$, et pas 0. Cette troisième équation sert de contrôle.

Réponse

On développe le membre de gauche :

$$\begin{aligned} & m(x^2-2x+1) \\ & \quad + px - p \\ & = mx^2 + (p-2m)x \\ & \quad + (m-p). \end{aligned}$$

D'après l'égalité de deux polynômes, on égale les coefficients :

- termes en x^2 : $m = 2$;
- termes en x : $p - 2m = -3$;
- termes constants : $m - p = 1$.

Donc $m = 2$, puis $p = 1$. La troisième équation sert de contrôle : $m - p = 2 - 1 = 1$.

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} & 2(x-1)^2 + (x-1) \\ & = 2x^2 - 4x + 2 + x - 1 \\ & = 2x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Somme et produit de deux polynômes

Qui donne la plus haute puissance ?

En clair. Développe $(3x^2 - x + 1)(2x + 5)$. Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde :

$$\begin{aligned} & (3x^2 - x + 1)(2x + 5) \\ & = 6x^3 + 13x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

La puissance x^3 ne vient que d'un seul produit : $3x^2 \times 2x = 6x^3$. Les deux termes les plus hauts décident du degré du produit.

Devine : Le terme le plus haut d'un produit

Sans tout développer, quel est le terme de plus haut degré de $(-2x^3 + x + 4)(5x^2 - x)$?

A. $-10x^6$

Faux.

Les exposants s'ajoutent, ils ne se multiplient pas : $x^3 \times x^2 = x^5$.

B. $3x^5$

Faux.

Les coefficients se multiplient : $(-2) \times 5 = -10$, et non $-2 + 5$.

C. $-10x^5$

Juste.

Juste : $(-2x^3) \times 5x^2 = -10x^5$.

D. $10x^5$

Faux.
Le signe compte : $(-2) \times 5 = -10$.

Correction
Le terme le plus haut vient des deux termes dominants : $(-2x^3) \times 5x^2 = -10x^5$. Aucun autre produit ne donne x^5.

Le produit est donc de degré $5 = 3 + 2$, et son coefficient dominant est -10.

Le degré d'un produit est-il toujours la somme des degrés ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

Rappel du collège : $x^i \times x^j = x^{i+j}$. Il suffit de suivre le seul produit qui donne la plus haute puissance, puis de vérifier que son coefficient n'est pas nul.

Degré d'un produit, degré d'une somme

Propriété : Degré d'un produit et d'une somme

Soit P et Q deux polynômes non nuls.

- Le **produit** PQ, défini par $(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$, est un polynôme non nul, et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- La **somme** $P + Q$, définie par $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$, est un polynôme. Si elle n'est pas nulle, son degré est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés $\deg P$ et $\deg Q$.
- Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q)$ est égal au plus grand des deux degrés.

Démonstration
Étape 1. On écrit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. En développant $P(x) \times Q(x)$, chaque produit $a_i x^i \times b_j x^j$, où $i \leq n$ et $j \leq m$, vaut $a_i b_j x^{i+j}$: on obtient un polynôme.

Étape 2. L'égalité $i + j = n + m$ impose $i = n$ et $j = m$: seul le produit des termes dominants donne x^{n+m}. Son coefficient $a_n b_m$ n'est pas nul, donc PQ n'est pas nul et $\deg(PQ) = n + m$.

Étape 3. Les coefficients de $P + Q$ sont les sommes des coefficients des termes de même degré : aucun terme de degré plus grand que n et que m n'apparaît. Si $n > m$, Q n'a pas de terme en x^n : le coefficient de x^n dans $P + Q$ est $a_n \neq 0$, donc $\deg(P + Q) = n$; de même si $m > n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour le degré d'un produit, seuls comptent les **termes dominants**. Leur produit $a_n b_m x^{n+m}$ est le seul à donner la plus haute puissance, et son coefficient est le produit des deux coefficients dominants.

Pour une somme, on ajoute les coefficients de même degré : ils peuvent s'annuler.

Vérifie : Un coefficient non nul

Dans la preuve, pourquoi le coefficient $a_n b_m$ de x^{n+m} n'est-il pas nul ?

A. Parce que le terme constant de PQ n'est pas nul.

Faux.
Le terme constant de PQ peut être nul ; il ne dit rien du terme en x^{n+m}.

B. Parce que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Juste.
Juste : un produit de deux réels non nuls n'est pas nul.

C. Parce que $n + m$ est au moins égal à 1.

Faux.
Ce n'est pas l'argument : même pour $n + m = 0$, deux constantes non nulles ont un produit non nul.

D. Parce que P et Q ont le même degré.

Faux.
L'énoncé ne suppose rien de tel : les deux degrés peuvent être différents.

Correction
Par définition du degré, les coefficients dominants a_n et b_m ne sont pas nuls. Leur produit $a_n b_m$ n'est donc pas nul.

Ainsi PQ a un terme $a_n b_m x^{n+m}$ non nul, et aucun terme de degré plus grand : $\deg(PQ) = n + m$.

Exemple : un produit et son degré

Soit $P(x) = 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x - 2$. D'après le degré d'un produit, $\deg(PQ) = 2 + 1 = 3$, et le coefficient dominant vaut $2 \times 1 = 2$.

Le développement le confirme :

$$\begin{aligned} P(x)\,Q(x) &= 2x^3 - 4x^2 - x^2 \\ &\quad + 2x + 3x - 6 \\ &= 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6. \end{aligned}$$

La somme, et un piège

Exemple : la somme de deux polynômes

- Soit $P(x) = x^4 - 3x + 1$, de degré 4, et $R(x) = 2x^2 + 3x$, de degré 2. Alors $(P + R)(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Les degrés sont différents : d'après le degré d'une somme, $\deg(P + R) = 4$, le plus grand des deux.
- Avec deux degrés égaux, rien ne s'annule ici : $(x^2 + 1) + (2x^2 - x) = 3x^2 - x + 1$, de degré 2.

Attention : le degré d'une somme peut baisser

✗ « $P(x) = 2x^3 - x$ et $Q(x) = -2x^3 + 5$ sont de degré 3, donc $P + Q$ est de degré 3. »

✓ Les termes dominants s'annulent : $(P + Q)(x) = -x + 5$, de degré 1.

Quand deux polynômes ont le même degré, leur somme peut avoir un degré plus petit. Calcule toujours la somme avant d'annoncer son degré.

Vérifie : Deux degrés à prévoir

Soit P un polynôme de degré 4 et Q un polynôme de degré 2. Quels sont les degrés de $P + Q$ et de PQ, dans cet ordre ?

A. 4 et 6

Juste.

Juste : les degrés sont différents pour la somme, et $4 + 2 = 6$ pour le produit.

B. 6 et 8

Faux.

Pour la somme, on garde le plus grand degré, ici 4 ; pour le produit, on ajoute : $4 + 2 = 6$.

C. 4 et 8

Faux.

Pour le produit, les degrés s'ajoutent : $4 + 2 = 6$, et non 4×2.

D. 2 et 6

Faux.

Les degrés sont différents : le terme de degré 4 de P ne peut pas s'annuler.

Correction

Les degrés 4 et 2 sont différents. D'après le degré d'une somme, $\deg(P + Q) = 4$. D'après le degré d'un produit, $\deg(PQ) = 4 + 2 = 6$.

À toi : Calculer et prévoir

Soit $P(x) = x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 2x + 1$ et $R(x) = -x^2 + 5$. Prévois le degré de PQ, puis calcule PQ. Calcule ensuite $P + R$ et donne son degré. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour prévoir, applique le degré d'un produit : on ajoute les degrés.

Indice 2

Développe PQ terme à terme : six produits, puis regroupe les termes de même puissance.

Indice 3

Point délicat : dans $P + R$, les termes en x^2 ont pour coefficients 1 et -1.

Réponse

D'après le degré d'un produit, $\deg(PQ) = 2 + 1 = 3$. On développe :

$$\begin{aligned} &P(x)\,Q(x) \\ &= 2x^3 + x^2 - 6x^2 \\ &\quad - 3x + 2x + 1 \\ &= 2x^3 - 5x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Pour la somme, on regroupe les termes de même puissance :

$$\begin{aligned} &(P + R)(x) \\ &= x^2 - x^2 - 3x \\ &\quad + 1 + 5 \\ &= -3x + 6. \end{aligned}$$

Les termes dominants s'annulent : $P + R$ est de degré 1, et non 2.

Racine et divisibilité par x – α

Les valeurs qui annulent un polynôme

Rappel du collège : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Ainsi, $(x - 1)(x + 3)$ s'annule pour $x = 1$ et pour $x = -3$, et seulement pour ces valeurs.

Sur la forme développée $x^2 + 2x - 3$, ces valeurs ne se lisent pas. Elles se vérifient par le calcul : $1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$.

Devine : Une valeur qui annule

Soit $P(x) = x^2 + x - 6$. Parmi ces nombres, lequel annule P ?

A. 3

Faux.

$P(3) = 9 + 3 - 6 = 6$, qui n'est pas nul.

B. -2

Faux.

$P(-2) = 4 - 2 - 6 = -4$, qui n'est pas nul.

C. 6

Faux.

Le terme constant -6 n'indique pas une valeur qui annule : $P(6) = 36$.

D. 2

Juste.

Juste : $P(2) = 4 + 2 - 6 = 0$.

Correction

On calcule : $P(3) = 6$, $P(-2) = -4$, $P(6) = 36$ et $P(2) = 4 + 2 - 6 = 0$.

Parmi ces nombres, seul 2 annule P. On dit que 2 est une **racine** de P.

Définition : Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme et α un réel. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple : vérifier une racine

Soit $P(x) = x^3 - 4x + 3$.

- $P(1) = 1 - 4 + 3 = 0$: d'après la définition, 1 est une racine de P.
- $P(2) = 8 - 8 + 3 = 3$, et $3 \neq 0$: donc 2 n'est pas une racine de P.

Pour savoir si un nombre est une racine, on calcule toujours la valeur du polynôme en ce nombre.

Méthode : chercher une racine évidente

1. **Calcule** $P(1)$: c'est la somme des coefficients, donc un calcul rapide.
2. **Essaie** ensuite $P(-1)$: une puissance paire de -1 vaut 1, une puissance impaire vaut -1. Le nombre $P(0)$ est le terme constant. Essaie enfin d'autres petites valeurs entières : 2, -2, 3, -3…
3. **Conclus** dès qu'un nombre α donne $P(\alpha) = 0$: α est une **racine évidente** de P.
4. **Écris** le calcul de $P(\alpha)$ en entier sur ta copie : c'est ta justification.

Une factorisation à connaître

Rappel du collège : $x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha)$.

Et avec une puissance 3 ? Développe $(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$:

$$\begin{aligned} &x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \\ &= x^3 - 1. \end{aligned}$$

Le facteur $x - 1$ apparaît encore. **Pourquoi est-ce vrai ?** On part de la somme $S = x^2 + \alpha x + \alpha^2$, pour la puissance 3. On calcule $x\,S$ et $\alpha\,S$, puis $x\,S - \alpha\,S$.

Propriété : Factorisation de x^n – α^n

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tous réels x et α :

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)\left(x^{n-1} + \alpha\, x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\, x + \alpha^{n-1}\right).$$

Pour $n = 1$, la parenthèse vaut 1 ; pour $n = 2$, elle vaut $x + \alpha$. Par exemple, $x^2 - \alpha^2 = (x - \alpha)(x + \alpha)$ et $x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)\left(x^2 + \alpha x + \alpha^2\right)$.

Démonstration

Étape 1. On note $S = x^{n-1} + \alpha\, x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}\, x + \alpha^{n-1}$; pour $n = 1$, $S = 1$ et l'égalité s'écrit $x - \alpha = (x - \alpha) \times 1$. On suppose $n \geq 2$. En multipliant par x, on obtient

$$x\,S = x^n + \alpha\, x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-2}\, x^2 + \alpha^{n-1}\, x.$$

Étape 2. En multipliant par α, on obtient

$$\alpha\,S = \alpha\, x^{n-1} + \alpha^2\, x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1}\, x + \alpha^n.$$

Étape 3. Chaque terme $\alpha^k\, x^{n-k}$, pour k entier de 1 à $n - 1$, figure dans les deux sommes. En soustrayant, ils s'annulent deux à deux : $(x - \alpha)\,S = x\,S - \alpha\,S = x^n - \alpha^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : écrire $x\,S$ et $\alpha\,S$ l'un sous l'autre. Les deux sommes ont presque tous leurs termes en commun.

Dans la différence, il ne reste que le premier terme de $x\,S$ et le dernier de $\alpha\,S$: $x^n - \alpha^n$.

Vérifie : Les termes qui disparaissent

Pour $n = 3$, la preuve donne $x\,S = x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x$ et $\alpha\,S = \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$. Quels termes disparaissent dans $x\,S - \alpha\,S$?

A. x^3 et α^3

Faux.
Ce sont justement les deux termes qui restent : $x^3 - \alpha^3$.

B. αx^2 et $\alpha^2 x$

Juste.
Juste : chacun figure dans les deux sommes.

C. x^3 et αx^2

Faux.

Le terme x^3 n'apparaît que dans $x\,S$: il reste.

D. Aucun terme

Faux.

Deux termes sont communs aux deux sommes : ils s'annulent.

Correction

Les termes αx^2 et $\alpha^2 x$ figurent dans $x\,S$ et dans $\alpha\,S$. En soustrayant, ils s'annulent deux à deux.

Il reste $x\,S - \alpha\,S = x^3 - \alpha^3$, c'est-à-dire $(x-\alpha)\,S = x^3 - \alpha^3$.

Exemple : une différence de deux cubes

On écrit $8 = 2^3$. D'après la factorisation de $x^n - \alpha^n$, avec $n = 3$ et $\alpha = 2$:

$$x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right).$$

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} &x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 \\ &= x^3 - 8. \end{aligned}$$

Le nombre 2 est une racine de $x^3 - 8$, et $x - 2$ en est un facteur.

Une racine, un facteur

Avec $x^3 - 8$, la racine 2 donne le facteur $x - 2$. Est-ce toujours ainsi ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

Si $P(\alpha) = 0$, on peut écrire $P(x) = P(x) - P(\alpha)$. Cette différence ne contient que des écarts $x^k - \alpha^k$, et tu sais déjà les factoriser.

Théorème : Racine et divisibilité par x – α

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel. Le réel α est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que, **pour tout réel** x,

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x).$$

Dans ce cas, $\deg Q = n - 1$, et on dit que P est **divisible** par $x - \alpha$.

Démonstration

Étape 1. Supposons que $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ pour tout réel x. Pour $x = \alpha$, on obtient $P(\alpha) = 0 \times Q(\alpha) = 0$: α est une racine de P.

Étape 2. Réciproquement, supposons $P(\alpha) = 0$ et écrivons $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Pour tout réel x, $P(x) = P(x) - P(\alpha)$, et les termes constants s'annulent :

$$P(x) = a_n\,(x^n - \alpha^n) + \cdots + a_1\,(x - \alpha).$$

Étape 3. D'après la factorisation de $x^k - \alpha^k$, on a $x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\, S_k(x)$, où S_k est un polynôme. En mettant $x - \alpha$ en facteur : $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x)$, avec $Q = a_n S_n + \cdots + a_1 S_1$, qui est un polynôme.

Étape 4. Soit Q un tel polynôme. D'après l'égalité de deux polynômes, P et $(x - \alpha)\, Q$ ont les mêmes coefficients ; comme P n'est pas nul, Q n'est pas nul et les deux ont le même degré. D'après le degré d'un produit, $n = 1 + \deg Q$, donc $\deg Q = n - 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée de la preuve : **retrancher** $P(\alpha)$, qui vaut 0. Les termes constants disparaissent, et chaque terme $a_k x^k$ devient $a_k \left(x^k - \alpha^k\right)$. On met alors $x - \alpha$ en facteur.

La conséquence pratique : une racine α donne un facteur $x - \alpha$, et le quotient a un degré de moins.

Vérifie : L'outil de la factorisation

Dans la preuve, quel énoncé permet de mettre $x - \alpha$ en facteur dans chaque écart $x^k - \alpha^k$?

A. Le degré d'un produit.
Faux.
Il sert à la dernière étape, pour trouver $\deg Q$, pas pour factoriser.

B. L'égalité de deux polynômes.
Faux.
Elle sert à la dernière étape, pour comparer P et $(x - \alpha)\, Q$, pas pour factoriser.

C. La factorisation de $x^n - \alpha^n$.
Juste.
Juste : appliquée avec $n = k$, elle donne le facteur $x - \alpha$.

D. La division euclidienne par $x - \alpha$.
Faux.
Elle se démontre à partir de cet énoncé ; on ne peut pas l'utiliser pour le démontrer.

Correction
C'est la factorisation de $x^n - \alpha^n$, appliquée à chaque puissance k : $x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\, S_k(x)$, où S_k est un polynôme.

Le degré d'un produit et l'égalité de deux polynômes ne servent qu'à la dernière étape, pour obtenir $\deg Q = n - 1$.

Exemple : factoriser grâce à une racine

Reprenons $P(x) = x^3 - 4x + 3$, dont 1 est une racine. Comme dans la preuve, on retranche $P(1) = 0$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x^3 - 1\right) - 4(x - 1) \\ &= (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) \\ &\quad - 4(x - 1) \\ &= (x - 1)\left(x^2 + x - 3\right). \end{aligned}$$

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} &x^3 + x^2 - 3x - x^2 - x + 3 \\ &= x^3 - 4x + 3. \end{aligned}$$

Le quotient est de degré $2 = 3 - 1$.

L'hypothèse compte : $P(2) = 3$, donc 2 n'est pas une racine, et P n'est pas divisible par $x - 2$.

Un piège, puis à toi

Attention : le signe dans le facteur

✗ « -3 est une racine de $x^2 + x - 6$, donc $x - 3$ en est un facteur. »

✓ La racine $\alpha = -3$ donne le facteur $x - (-3) = x + 3$. En effet, $(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$, et en développant, $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$.

Un facteur $x - \alpha$ doit s'annuler en α ; or $x - 3$ vaut -6 pour $x = -3$.

À toi : Une racine évidente, puis un facteur

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 12$. Cherche une racine évidente α de P parmi 1, -1 et 2. Écris ensuite $P(x) - P(\alpha)$, puis factorise par $x - \alpha$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode de la racine évidente : calcule $P(1)$, $P(-1)$, puis $P(2)$.
Indice 2
Avec $\alpha = 2$, regroupe les termes de $P(x) - P(2)$ en deux écarts : l'un avec x^3, l'autre avec x^2.
Indice 3
Point délicat : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; mets ensuite $x - 2$ en facteur dans toute la somme.

Réponse
On essaie les trois valeurs :

- $P(1) = 1 + 1 - 12 = -10$;
- $P(-1) = -1 + 1 - 12 = -12$;
- $P(2) = 8 + 4 - 12 = 0$.

Donc 2 est une racine évidente de P. Comme $P(2) = 0$, on écrit $P(x) = P(x) - P(2)$:

$$\begin{aligned} &P(x) \\ &= \left(x^3 - 8\right) + \left(x^2 - 4\right) \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) \\ &\quad + (x-2)(x+2). \end{aligned}$$

En mettant $x - 2$ en facteur : $P(x) = (x-2)\left(x^2 + 3x + 6\right)$.

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} &x^3 + 3x^2 + 6x - 2x^2 \\ &\quad - 6x - 12 \\ &= x^3 + x^2 - 12. \end{aligned}$$

On ne cherche pas à factoriser davantage dans ce chapitre.

Division euclidienne par x – α

Un reste qui est un nombre

Rappel du collège : diviser 47 par 5, c'est écrire $47 = 5 \times 9 + 2$, avec un reste 2 plus petit que 5.

Pour les polynômes, on divise par $x - \alpha$, qui est de degré 1. On cherche un reste de degré plus petit que 1 : ce sera un nombre.

Quand α est une racine, ce reste est nul, comme pour $x^3 - 8$ divisé par $x - 2$.

Devine : Deviner le reste

Suppose qu'on puisse écrire $x^2 + 3x + 5 = (x-1)\,Q(x) + r$ pour tout réel x, où r est un nombre. Remplace x par 1. Que vaut r ?

A. 9

Juste.

Juste : pour $x = 1$, le produit $(x-1)\,Q(x)$ est nul, et il reste $1 + 3 + 5 = 9$.

B. 5

Faux.

5 est le terme constant, c'est-à-dire la valeur en 0, pas en 1.

C. 0

Faux.

Le reste n'est nul que si 1 est une racine ; ici, la valeur en 1 vaut 9.

D. 3

Faux.

3 est la valeur en -1. Le facteur est $x - 1$: on remplace donc x par 1.

Correction

Pour $x = 1$, le facteur $x - 1$ est nul, donc $(x-1)\,Q(x) = 0$. L'égalité devient $1^2 + 3 \times 1 + 5 = r$, soit $r = 9$.

Le reste est la valeur du polynôme en 1.

Ce calcul marche-t-il pour tout polynôme et tout réel α ? **Pourquoi est-ce vrai ?** On se ramène à la racine et la divisibilité par $x - \alpha$. Pour cela, on fabrique un polynôme qui s'annule en α.

Quotient et reste

Propriété : Division euclidienne par x − α

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ et α un réel. Il existe un **unique** polynôme Q tel que, pour tout réel x,

$$P(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + P(\alpha).$$

Le polynôme Q, de degré $n - 1$, est le **quotient** de la division euclidienne de P par $x - \alpha$; le réel $P(\alpha)$ en est le **reste**. C'est la seule écriture $P(x) = (x - \alpha)\,Q_1(x) + r$, avec Q_1 polynôme et r réel. Le reste est nul si et seulement si α est une racine de P.

Démonstration

Étape 1. On pose $D(x) = P(x) - P(\alpha)$. Comme $n \geq 1$, D a les mêmes termes que P sauf le terme constant : D est de degré n, et $D(\alpha) = P(\alpha) - P(\alpha) = 0$.

Étape 2. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $D(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$, c'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + P(\alpha)$. Par définition d'une racine, ce reste est nul si et seulement si α est une racine de P.

Étape 3. Unicité. Si $P(x) = (x - \alpha)\,Q_1(x) + r$ pour tout réel x, alors $x = \alpha$ donne $r = P(\alpha)$. En soustrayant, $(x - \alpha)\,(Q(x) - Q_1(x)) = 0$ pour tout réel x. Si $Q - Q_1$ n'était pas nul, ce produit serait, d'après le degré d'un produit, de degré au moins 1 : c'est impossible d'après l'égalité de deux polynômes. Donc $Q_1 = Q$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **retirer à P sa valeur en α**. Le polynôme $D(x) = P(x) - P(\alpha)$ s'annule en α, donc il est divisible par $x - \alpha$. Le reste est ainsi $P(\alpha)$, qui se calcule sans diviser.

Pour l'unicité, on part d'une écriture $(x - \alpha)\,Q_1(x) + r$ avec un réel r quelconque. Pour $x = \alpha$, on trouve $r = P(\alpha)$. Le degré d'un produit et l'égalité de deux polynômes donnent ensuite $Q_1 = Q$.

Vérifie : La racine fabriquée

Dans la preuve, on pose $D(x) = P(x) - P(\alpha)$. Pourquoi α est-il une racine de D ?

A. Parce que D a le même degré que P.

Faux.

Le degré ne dit pas où un polynôme s'annule.

B. Parce que $P(\alpha) = 0$.

Faux.

Rien ne l'impose : α n'est pas forcément une racine de P.

C. Parce que $x - \alpha$ divise P.

Faux.

C'est faux en général : sinon, le reste serait toujours nul.

D. Parce que $D(\alpha) = P(\alpha) - P(\alpha) = 0$.

Juste.

Juste : on retranche à P sa propre valeur en α.

Correction

Pour $x = \alpha$: $D(\alpha) = P(\alpha) - P(\alpha) = 0$, quel que soit P.

La racine et la divisibilité par $x - \alpha$ s'appliquent alors à D. Elles donnent $D(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$, c'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + P(\alpha)$.

Exemple : un reste sans diviser

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$. D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste est $P(\alpha)$.

- Par $x - 1$: le reste vaut $P(1) = 1 + 2 - 1 + 3 = 5$.
- Par $x + 3$, c'est-à-dire $x - (-3)$: le reste vaut $P(-3) = -27 + 18 + 3 + 3 = -3$.

Aucun de ces restes n'est nul : ni 1 ni -3 n'est une racine de P.

La division posée

Méthode : la division en potence

1. **Range** $P(x)$ selon les puissances décroissantes, et **complète** les termes absents par des 0.
2. **Divise** le terme dominant du dividende par x : c'est le premier terme du quotient.
3. **Multiplie** ce terme par $x - \alpha$. Écris le produit entre parenthèses, précédé d'un signe moins, puis **soustrais** : le degré baisse. **Abaisse** le terme suivant.
4. **Recommence** avec ce qui reste, jusqu'à obtenir un nombre : c'est le reste. **Contrôle** qu'il vaut $P(\alpha)$.

La méthode est la même quand α est une fraction : les calculs portent alors sur des fractions.

Exemple : une division posée, reste nul

Divise $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ par $x - 2$. Chaque produit soustrait est écrit entre parenthèses, précédé d'un signe moins.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2-5x+6 & \frac{x-2}{2x^2+x-3} \\ -\left(2x^3-4x^2\right) & \\ x^2-5x & \\ -\left(x^2-2x\right) & \\ -3x+6 & \\ -(-3x+6) & \\ 0 & \end{array}$$

Le quotient est $2x^2 + x - 3$ et le reste est 0. Contrôle : $P(2) = 16 - 12 - 10 + 6 = 0$.

En développant, on retrouve $P(x)$:

$$\begin{aligned}(x-2)\left(2x^2+x-3\right) \\ = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6.\end{aligned}$$

Attention : les termes absents

✗ « Pour diviser $x^3 - 5x + 4$ par $x - 1$, je pose $x^3 - 5x + 4$ tel quel. »

✓ Écris d'abord $x^3 + 0x^2 - 5x + 4$. Sinon, les termes ne tombent plus dans la bonne colonne, et le quotient obtenu est faux.

Avec la colonne des x^2, on trouve le quotient $x^2 + x - 4$ et le reste 0. Contrôle : la valeur en 1 vaut $1 - 5 + 4 = 0$.

Un reste, une division, la rédaction

Vérifie : Un reste par le calcul

Quel est le reste de la division euclidienne de $P(x) = x^4 - 2x^3 + x + 4$ par $x - 2$?

A. 34

Faux.

C'est $P(-2)$. Pour le facteur $x - 2$, on calcule la valeur en 2.

B. 6

Juste.

Juste : $P(2) = 16 - 16 + 2 + 4 = 6$.

C. 4

Faux.

4 est le terme constant, c'est-à-dire $P(0)$.

D. 0

Faux.

Le reste n'est nul que si 2 est une racine ; or $P(2) = 6$.

Correction

D'après la division euclidienne par $x - \alpha$, le reste est la valeur en 2 :

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^4 - 2 \times 2^3 + 2 + 4 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Le quotient est ici $x^3 + 1$. Contrôle :

$$\begin{aligned} &(x-2)\left(x^3+1\right) + 6 \\ &= x^4 - 2x^3 + x - 2 + 6 \\ &= x^4 - 2x^3 + x + 4, \end{aligned}$$

ce qui redonne $P(x)$.

À toi : Une division à poser

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$. Montre que P est divisible par $x + 3$, et pose la division. Donne ensuite, sans diviser, le reste de la division de P par $x - 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $x + 3 = x - (-3)$: on calcule $P(-3)$.

Indice 2

Le premier terme du quotient est x^2 ; soustrais $x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$.

Indice 3

Point délicat : après cette soustraction, le terme en x^2 vaut $x^2 - 3x^2 = -2x^2$.

Réponse

$P(-3) = -27 + 9 + 12 + 6 = 0$: -3 est une racine de P. D'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, P est divisible par $x + 3$. La division posée :

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-4x+6 & \underline{x+3} \\ -\left(x^3+3x^2\right) & \\ -2x^2-4x & \\ -\left(-2x^2-6x\right) & \\ 2x+6 & \\ -\left(2x+6\right) & \\ 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+3)\left(x^2 - 2x + 2\right)$. Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} &x^3 - 2x^2 + 2x + 3x^2 \\ &\quad - 6x + 6 \\ &= x^3 + x^2 - 4x + 6. \end{aligned}$$

Enfin, sans diviser : le reste de la division par $x-1$ est $P(1)=1+1-4+6=4$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une divisibilité

En devoir, on peut te demander de prouver une divisibilité, puis de donner le quotient. Avec $P(x)=2x^3+5x^2-4x-3$, écris :

« $P(1)=2+5-4-3=0$, donc 1 est une racine de P. D'après la racine et la divisibilité par $x-\alpha$, P est divisible par $x-1$.

Je pose $P(x)=(x-1)\left(2x^2+px+q\right)$. En développant, les termes en x^2 donnent $p-2=5$, et les termes constants $-q=-3$.

Donc $p=7$, $q=3$ et $P(x)=(x-1)\left(2x^2+7x+3\right)$. »

La division en potence donne le même quotient. Termine par le contrôle : en développant, tu dois retrouver $P(x)$.

Factoriser un polynôme

Pourquoi factoriser ?

En clair. Pour résoudre $P(x)=0$, la forme développée ne dit presque rien. La forme factorisée donne les solutions, grâce au produit nul.

Rappel du collège : pour tous réels u et v,

$$\begin{aligned}(u+v)^2&=u^2+2uv+v^2,\\(u-v)^2&=u^2-2uv+v^2,\\u^2-v^2&=(u-v)(u+v).\end{aligned}$$

Lues dans le bon sens, ces égalités servent aussi à factoriser.

Devine : La bonne écriture

Les quatre écritures ci-dessous sont égales pour tout réel x. Laquelle donne directement les solutions de l'équation $x^2+2x-3=0$?

A. x^2+2x-3

Faux.
La forme développée ne donne pas les solutions : il faut factoriser.

B. $x(x+2)-3$

Faux.
Ce n'est pas un produit : le -3 reste à part, et le produit nul ne s'applique pas.

C. $(x-1)(x+3)$

Juste.

Juste : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

D. $(x+1)^2-4$

Faux.

C'est une différence, pas un produit. Avec u^2-v^2, elle redonne $(x-1)(x+3)$.

Correction

L'équation s'écrit $(x-1)(x+3)=0$. D'après le produit nul, $x-1=0$ ou $x+3=0$. Les solutions sont 1 et -3.

Contrôle : $1^2+2\times 1-3=0$ et $(-3)^2+2\times(-3)-3=0$.

Méthode : factoriser un polynôme

1. **Regarde** la forme de $P(x)$: un facteur commun ? une identité remarquable ? des termes à grouper deux par deux ?
2. **Sinon**, cherche une racine évidente α en calculant $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$…
3. **Factorise** par $x-\alpha$, avec la division en potence ou par identification.
4. **Continue** avec le quotient, tant qu'une de ces techniques s'applique.
5. **Vérifie** le résultat final en développant.
6. **Écarte** dans une équation un facteur qui ne s'annule pas. S'il est toujours supérieur ou égal à un nombre strictement positif, il ne s'annule jamais : par exemple, $x^2+1\geq 1$. Si ce n'est vrai que sur un intervalle, dis-le : « il ne s'annule pas pour $x>1$ ».

Exemple : trois techniques sans racine

Facteur commun, puis identité remarquable.

$$\begin{aligned}3x^2-6x+3&=3\left(x^2-2x+1\right)\\&=3(x-1)^2.\end{aligned}$$

Identité remarquable.

$$\begin{aligned}x^2+6x+9&=x^2+2\times 3\times x+3^2\\&=(x+3)^2.\end{aligned}$$

Regroupement.

$$\begin{aligned}&x^3-2x^2+x-2\\&=x^2(x-2)+(x-2)\\&=(x-2)\left(x^2+1\right).\end{aligned}$$

Contrôle de la dernière en développant : x^3+x-2x^2-2.

Résous alors $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$, c'est-à-dire $(x-2)\left(x^2+1\right) = 0$. Le facteur x^2+1 ne s'annule jamais, car $x^2 + 1 \geq 1$. D'après le produit nul, il reste $x - 2 = 0$: $S = \{2\}$.

Deux racines à la fois

Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et en 2 : $1 - 3 + 2 = 0$ et $4 - 6 + 2 = 0$. Il s'écrit justement $(x-1)(x-2)$.

Si un polynôme a deux racines distinctes α et β, peut-on mettre $(x-\alpha)(x-\beta)$ en facteur ? **Pourquoi est-ce vrai ?** On factorise d'abord par $x - \alpha$. Il reste à voir que β est encore une racine du quotient.

Propriété : Polynôme ayant deux racines distinctes

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$, et α et β deux racines **distinctes** de P. Il existe un polynôme R de degré $n-2$ tel que, pour tout réel x,

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,R(x).$$

Démonstration

Étape 1. Comme α est une racine de P, d'après la racine et la divisibilité par $x - \alpha$, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ pour tout réel x.

Étape 2. Pour $x = \beta$: $0 = P(\beta) = (\beta-\alpha)\,Q(\beta)$. Or $\beta - \alpha \neq 0$ car les racines sont distinctes, donc $Q(\beta) = 0$.

Étape 3. Comme $n - 1 \geq 1$, la même propriété appliquée à Q et à sa racine β donne un polynôme R de degré $n-2$ tel que $Q(x) = (x-\beta)\,R(x)$. Donc $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,R(x)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **une racine à la fois**. On factorise par $x - \alpha$, puis on montre que β est une racine du quotient Q. On applique ensuite à Q la même propriété. Chaque factorisation fait baisser le degré de 1 : R est de degré $n-2$.

Vérifie : La seconde racine

Dans la preuve, on sait que $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$ et que $P(\beta) = 0$. Pourquoi a-t-on $Q(\beta) = 0$?

A. Car $(\beta-\alpha)\,Q(\beta) = 0$ et $\beta - \alpha \neq 0$.
Juste.
Juste : un produit nul dont un facteur n'est pas nul a l'autre facteur nul.

B. Car Q est un polynôme de degré $n-1$.
Faux.

Le degré de Q ne dit pas où Q s'annule.

C. Car α est une racine de P.

Faux.

Cette égalité a servi à la première factorisation ; elle ne parle pas de β.

D. Car β annule le facteur $x - \alpha$.

Faux.

Pour $x = \beta$, ce facteur vaut $\beta - \alpha$, qui n'est pas nul.

Correction

On écrit l'égalité pour $x = \beta$: $0 = P(\beta) = (\beta - \alpha)\,Q(\beta)$.

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Or $\beta - \alpha \neq 0$, car les racines sont distinctes. Donc $Q(\beta) = 0$.

Exemple : deux racines connues

Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$. On a $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$ et $P(2) = 8 - 14 + 6 = 0$. Les racines 1 et 2 sont distinctes.

D'après la propriété des deux racines distinctes, $P(x) = (x-1)(x-2)\,R(x)$, avec R de degré 1. Le coefficient dominant de P vaut 1, donc $R(x) = x + k$.

Or $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$: les termes constants donnent $2k = 6$, soit $k = 3$. Donc $P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$. Contrôle :

$$\begin{aligned}&\left(x^2 - 3x + 2\right)(x + 3)\\ &= x^3 - 7x + 6.\end{aligned}$$

L'hypothèse compte : $x^2 - x$ a la racine 1, mais on ne peut pas prendre $\alpha = \beta = 1$. Sinon, avec c constant :

$$\begin{aligned}x^2 - x &= c\,(x-1)^2\\ &= c\,x^2 - 2c\,x + c.\end{aligned}$$

Le coefficient de x^2 donne $c = 1$, le terme constant $c = 0$: c'est impossible.

Factoriser par identification

Méthode : factoriser par identification

1. **Vérifie** que α est une racine : $P(\alpha) = 0$.
2. **Pose** $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$, où Q a un degré de moins que P et des coefficients inconnus. Pour P de degré 3, on pose $Q(x) = mx^2 + px + q$.

3. **Développe** $(x-\alpha)\,Q(x)$, puis **identifie** ses coefficients avec ceux de P, d'après l'égalité de deux polynômes.
4. **Résous**, puis **vérifie** en développant.

Exemple : identifier un quotient

Soit $P(x)=x^3+x^2-5x+3$. On a $P(1)=1+1-5+3=0$. On pose $P(x)=(x-1)\left(mx^2+px+q\right)$, et on développe :

$$\begin{aligned}&(x-1)\left(mx^2+px+q\right)\\&=mx^3+(p-m)x^2\\&\quad+(q-p)x-q.\end{aligned}$$

D'après l'égalité de deux polynômes :

- termes en x^3 : $m=1$;
- termes en x^2 : $p-m=1$;
- termes en x : $q-p=-5$;
- termes constants : $-q=3$.

Donc $m=1, p=2$ et $q=-3$; l'équation $q-p=-5$ sert de contrôle. Ainsi $P(x)=(x-1)\left(x^2+2x-3\right)$.

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3\\&=x^3+x^2-5x+3.\end{aligned}$$

Attention : ne perds pas le coefficient dominant

✗ « $3x^2-12$ a pour racines 2 et -2, donc $3x^2-12=(x-2)(x+2)$. »

✓ En développant, $(x-2)(x+2)=x^2-4$: il manque le facteur 3. La bonne factorisation est $3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$.

Développe toujours ta factorisation : elle doit redonner le coefficient dominant.

Résoudre une équation

Exemple : résoudre une équation par factorisation

Résous $x^3+x^2-5x+3=0$. D'après l'exemple précédent, le membre de gauche vaut $(x-1)\left(x^2+2x-3\right)$.

Le quotient a aussi 1 pour racine : $1+2-3=0$. D'après la racine et la divisibilité par $x-\alpha$, il s'écrit $(x-1)(x+k)$. Les termes constants donnent $-k=-3$, soit $k=3$. Contrôle :

$$\begin{aligned}(x-1)(x+3) &= x^2+3x-x-3\\ &= x^2+2x-3.\end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&x^3+x^2-5x+3\\ &=(x-1)^2(x+3).\end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : $x-1=0$ ou $x+3=0$. Les solutions sont 1 et -3 : $S=\{-3,1\}$.

Vérifie : Les solutions d'une équation

Quelles sont les solutions de l'équation $(x-1)\left(x^2-4x+4\right)=0$?

A. -1 et -2

Faux.

Attention aux signes : $x-1$ s'annule pour $x=1$, et non pour $x=-1$.

B. 1, 2 et -2

Faux.

Le second facteur ne s'annule pas en -2 : il y vaut $4+8+4=16$.

C. 1 seulement

Faux.

Le second facteur s'annule aussi : $2^2-4\times 2+4=0$.

D. 1 et 2

Juste.

Juste : l'équation s'écrit $(x-1)(x-2)^2=0$.

Correction

D'après l'identité $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$, on a $x^2-4x+4=(x-2)^2$. L'équation s'écrit $(x-1)(x-2)^2=0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : $x=1$ ou $x=2$. Les solutions sont 1 et 2.

À toi : Factoriser complètement

Soit $P(x)=x^3-x^2-8x+12$. Calcule $P(2)$, puis factorise P par $x-2$. Factorise ensuite le quotient, et résous l'équation $P(x)=0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $P(2)$; s'il est nul, la division en potence par $x-2$ donne le quotient.

Indice 2

Le quotient est x^2+x-6 : cherche une racine évidente parmi 1, 2, -2, 3 et -3.

Indice 3

Point délicat : essaie de nouveau une racine évidente sur le quotient, y compris celle déjà trouvée.

Réponse

$P(2)=8-4-16+12=0$: 2 est une racine de P. La division par $x-2$ donne :

$$\begin{aligned} &P(x)\\ &=(x-2)(x^2+x-6). \end{aligned}$$

Le quotient s'annule en 2 : $4+2-6=0$. D'après la racine et la divisibilité par $x-\alpha$, il s'écrit $(x-2)(x+k)$, et les termes constants donnent $-2k=-6$, soit $k=3$. Contrôle : $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$.

Donc :

$$P(x)=(x-2)^2(x+3).$$

Contrôle en développant :

$$\begin{aligned} &\left(x^2-4x+4\right)(x+3)\\ &=x^3-x^2-8x+12. \end{aligned}$$

D'après le produit nul, les solutions de $P(x)=0$ sont 2 et -3 : $S=\{-3,2\}$.

Remarque : Coin devoir : une autre boîte de même volume ?

En devoir, la boîte du début peut revenir ainsi : « Existe-t-il une autre boîte de volume 128 ? »

Rédige : « $V(x)=128$ équivaut à $4\left(x^3-12x^2+36x-32\right)=0$. Le nombre 2 est une racine, car $8-48+72-32=0$.

La division en potence par $x-2$ donne le quotient $x^2-10x+16$. Ce quotient s'annule en 2, car $4-20+16=0$. Il s'écrit donc $(x-2)(x+k)$, et les termes constants donnent $-2k=16$, soit $k=-8$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &x^3-12x^2+36x-32\\ &=(x-2)\left(x^2-10x+16\right)\\ &=(x-2)^2(x-8). \end{aligned}$$

Les solutions sont 2 et 8. Or $0<x<6$, donc $x=2$: aucune autre boîte ne convient. »

Contrôle chaque factorisation en développant.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle technique pour quelle question

- **Lire** un polynôme : développer, réduire, ranger, puis lire le degré et les coefficients.
- **Trouver des coefficients inconnus** : identifier, d'après l'égalité de deux polynômes.
- **Prévoir un degré** : pour un produit, on ajoute les degrés ; pour une somme, les termes dominants peuvent s'annuler.
- **Montrer que α est une racine** : calculer $P(\alpha)$ et trouver 0.
- **Obtenir le reste** de la division par $x - \alpha$: calculer $P(\alpha)$, sans diviser.
- **Factoriser** : facteur commun, identité remarquable ou regroupement ; sinon, racine évidente, puis division en potence ou identification.
- **Résoudre** $P(x) = 0$: factoriser, puis appliquer le produit nul. Un facteur toujours supérieur ou égal à un nombre strictement positif ne s'annule jamais.

Le mot du prof. Un polynôme se lit, se calcule et se factorise. Retiens surtout le lien entre une racine α et le facteur $x - \alpha$: ce lien transforme une équation difficile en produit nul.

Contrôle chaque factorisation en développant. Ces réflexes te serviront dès le chapitre suivant, « Équations, inéquations et systèmes », pour le second degré.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les polynômes » (tc · sciences · mathematiques)