BURHAN

Résumé : L'ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/resume

Chapitre	Semestre
L'ordre dans $\mathbb{R}$	Semestre 1

Comparer deux réels ; ordre et opérations

> **À retenir : Une seule idée : le signe d'une différence**
>
> Tout le chapitre repose sur une idée : pour comparer deux réels, on étudie le signe de leur différence.
>
> Les règles de calcul sur les inégalités en découlent.
>
> Retiens surtout ce qui change le sens d'une inégalité : multiplier par un réel strictement négatif, passer à l'inverse.

Définition : Comparaison de deux réels

Soit a et b deux nombres réels. On dit que a est **inférieur ou égal** à b, et on écrit $a \leq b$, lorsque la différence $b - a$ est positive ou nulle :

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0.$$

On écrit $a < b$ (« a est strictement inférieur à b ») lorsque $b - a > 0$. Les écritures $b \geq a$ et $b > a$ ont le même sens que $a \leq b$ et $a < b$.

Deux réels a et b vérifient toujours une, et une seule, des trois relations $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b, c et d des réels.

- **Transitivité** : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
- **Ajouter un même réel** : si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$. On peut donc ajouter ou retrancher un même réel aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens.
- **Additionner membre à membre** : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Ces trois propriétés restent vraies lorsqu'on remplace partout $\leq$ par $<$.

Propriété : Ordre et multiplication

Soit a, b, c et d des réels.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$: multiplier par un réel **strictement positif** conserve le sens de l'inégalité.
- Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $ac \geq bc$: multiplier par un réel **strictement négatif** change le sens de l'inégalité.
- **Multiplier membre à membre des réels positifs** : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Les deux premiers points restent vrais avec des inégalités strictes : si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$; si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Méthode : comparer deux nombres ou deux expressions

1. **Forme** la différence $A - B$ des deux nombres à comparer.
2. **Transforme-la** : même dénominateur, factorisation, identité remarquable, jusqu'à lire son signe.
3. **Conclus** avec la définition de la comparaison : une différence positive ou nulle donne $A \geq B$.
4. **Autres voies** : pour deux nombres positifs, compare leurs carrés ; pour deux nombres non nuls de même signe, compare leurs inverses, puis inverse le sens.

Exemple

Énoncé. Compare $\frac{4}{9}$ et $\frac{5}{11}$.

Différence. Au dénominateur commun 99 :

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{11} = \frac{44 - 45}{99} = -\frac{1}{99}.$$

Conclusion. Cette différence est strictement négative. D'après la définition de la comparaison, $\frac{4}{9} < \frac{5}{11}$.

Attention : Un facteur négatif retourne l'inégalité

Pars de $x \geq -3$ et multiplie par -5. Le facteur est strictement négatif : le sens change, et l'on obtient $-5x \leq 15$.

Écrire $-5x \geq 15$ est faux : pour $x = 0$, on aurait $0 \geq 15$.

Regarde le signe du facteur avant chaque multiplication.

Carrés, racines carrées, inverses

Propriété : Carrés, racines carrées et inverses

Soit a et b deux réels.

- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$, et $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

- Si a et b sont **non nuls et de même signe**, alors $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$: le passage à l'inverse change le sens de l'inégalité.

Ces équivalences restent vraies avec des inégalités strictes ($<$ et $>$).

Exemple

Énoncé. Compare $3\sqrt{7}$ et 8.

Carrés. Les deux nombres sont positifs. On a $\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 9 \times 7 = 63$ et $8^2 = 64$.

Conclusion. Comme $63 < 64$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $3\sqrt{7} < 8$.

Exemple

Énoncé. Compare $\frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\frac{1}{3}$.

Avant l'inverse. Les réels $\sqrt{10}$ et 3 sont positifs, de carrés 10 et 9. La comparaison des carrés de réels positifs donne $\sqrt{10} > 3$.

Inverses. Les réels $\sqrt{10}$ et 3 sont strictement positifs. En passant à l'inverse, on renverse l'inégalité : $\frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{1}{3}$.

Remarque : Carré et racine d'un nombre entre 0 et 1

Pour $0 < a < 1$, on a $a^2 < a < \sqrt{a}$. Par exemple, pour $a = 0{,}49$: $a^2 = 0{,}2401$ et $\sqrt{a} = 0{,}7$.

Pour $a > 1$, l'ordre s'inverse : $\sqrt{a} < a < a^2$.

Élever au carré n'agrandit donc pas toujours un nombre.

Attention : L'inverse exige des bornes de même signe

Si $-4 \leq x \leq -1$, les bornes sont non nulles et de même signe : on obtient $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$, en échangeant les bornes.

En revanche, avec $-2 \leq x \leq 6$, l'intervalle contient 0, où l'inverse n'existe pas. Aucun encadrement de $\frac{1}{x}$ ne s'obtient alors de cette façon.

Intervalles, intersection et réunion

Définition : Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'**intervalle fermé** $[a; b]$. On définit de même :

- $]a;b[$: les réels x tels que $a < x < b$ (**intervalle ouvert**) ; $[a;b[$: $a \leq x < b$; $]a;b]$: $a < x \leq b$;
- $[a;+\infty[$: $x \geq a$; $]a;+\infty[$: $x > a$; $]-\infty;b]$: $x \leq b$; $]-\infty;b[$: $x < b$.

Les réels a et b sont les **bornes** de l'intervalle. Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres : le crochet est toujours ouvert de leur côté. L'ensemble $\mathbb{R}$ s'écrit $]-\infty;+\infty[$.

Méthode : intervalles, intersection et réunion

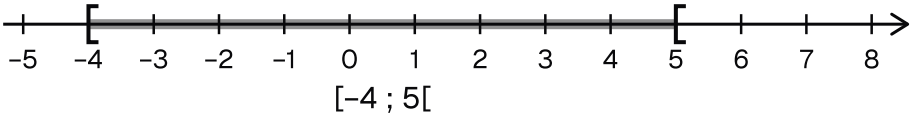
1. **Écris** chaque condition sur x comme un intervalle. Une inégalité large donne un crochet fermé ; une inégalité stricte, un crochet ouvert.
2. **Dessine** sur ton cahier une seule droite graduée et hachure chaque intervalle.
3. **Intersection** $I \cap J$: garde les réels hachurés deux fois, ceux qui vérifient une condition et l'autre.
4. **Réunion** $I \cup J$: garde les réels hachurés au moins une fois.

Exemple

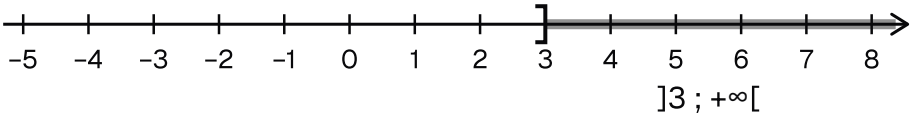
Traduire. La condition $-3 < x \leq 6$ s'écrit $x \in]-3;6]$.

Intersection. Soit $I = [-4;5[$ et $J =]3;+\infty[$. Les réels communs vérifient $3 < x < 5$: $I \cap J =]3;5[$.

Réunion. Les réels de l'un ou de l'autre vérifient $x \geq -4$: $I \cup J = [-4;+\infty[$.



Premier intervalle de l'exemple : I = [-4 ; 5[, de -4 compris à 5 exclu.



Second intervalle : J =]3 ; +∞[, de 3 exclu vers la droite sans fin ; il recouvre I entre 3 et 5.

Remarque : Une intersection peut être vide

Deux intervalles peuvent n'avoir aucun réel commun. Ainsi $[-3;0[\cap [2;7]$ est l'ensemble vide, noté $\varnothing$.

La réunion $[-3;0[\cup [2;7]$ n'est pas un intervalle, car les réels de $[0;2[$ n'y figurent pas.

Valeur absolue et distance

À retenir : Une valeur absolue est une distance

La valeur absolue d'un réel est sa distance à zéro sur la droite graduée. Elle est donc toujours positive ou nulle.

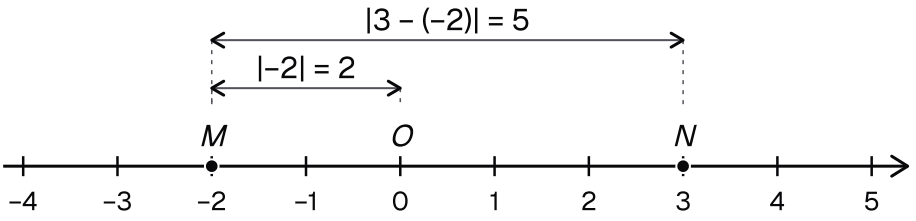
Pour l'écrire sans barres, on regarde le signe de ce qu'elle contient : deux cas, annoncés à chaque fois.

Définition : Valeur absolue et distance

Soit x un réel. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est le réel défini par :

- $|x| = x$ si $x \geq 0$;
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Sur une droite graduée d'origine O, soit M et N les points d'abscisses x et y. La **distance** MN est le réel $|x - y|$; on l'appelle aussi la distance entre les réels x et y. En particulier, $|x| = OM$ est la distance entre x et 0.



Sur une droite d'origine O, M d'abscisse -2 et N d'abscisse 3 : OM = |-2| = 2 et MN = |3 - (-2)| = 5.

Propriété : Propriétés de la valeur absolue

Pour tous réels x et y :

- $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|-x| = |x|$ et $-|x| \leq x \leq |x|$;
- $|x|^2 = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|xy| = |x|\,|y|$ et, si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$.

Exemple

Nombres. $|-7{,}5| = 7{,}5$. Pour $|2-\sqrt{6}|$, on compare d'abord : comme $4 < 6$, la comparaison des racines carrées donne $2 < \sqrt{6}$. Le nombre $2-\sqrt{6}$ est donc strictement négatif, et $|2-\sqrt{6}| = \sqrt{6}-2$.

Distance. Les points d'abscisses -3 et 4 sont à la distance $|-3-4| = |-7| = 7$.

Attention : Les barres ne se séparent pas sur une somme

La valeur absolue d'une somme n'est pas la somme des valeurs absolues. Avec $x=-6$ et $y=2$: $|x+y| = 4$, mais $|x|+|y| = 8$.

De même, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, et non -5.

Seuls le produit et le quotient se séparent.

Intervalle centré ; inégalité triangulaire

Propriété : Valeur absolue et intervalle centré

Soit a un réel et r un réel strictement positif. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} |x-a| \leq r &\Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r \\ &\Leftrightarrow x \in [a-r\,;a+r]\,. \end{aligned}$$

De même, $|x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r\,;a+r[$.

Sur la droite graduée, les réels dont la distance à a est au plus r forment l'intervalle de **centre** a et de **rayon** r.

Méthode : équations et inéquations avec une distance

1. **Fais apparaître** une distance $|x-a|$: par exemple, $|x+4| = |x-(-4)|$ est la distance de x à -4.
2. **Équation** $|x-a| = r$ avec $r > 0$: les deux solutions sont $a-r$ et $a+r$. Avec $r=0$, seule a convient ; avec $r<0$, aucun réel.
3. **Inéquation** $|x-a| \leq r$ avec $r>0$: l'intervalle de centre a et de rayon r, $[a-r\,;a+r]$. Pour $|x-a| > r$: les réels hors de cet intervalle.
4. **Vérifie** une solution dans l'énoncé de départ.

Exemple

Équation. $|x-1| = 6$: les réels à distance 6 de 1 sont -5 et 7.

Inéquation. $|x+4| \leq 2$: distance à -4 au plus 2, donc $x \in [-6\,;-2]$.

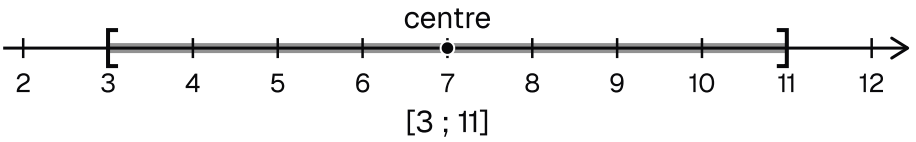
Hors de l'intervalle. $|x+4| > 2$: $x \in]-\infty\,;-6[\cup]-2\,;+\infty[$.

Exemple

Énoncé. Écris la condition $x \in [3;11]$ avec une valeur absolue.

Centre et rayon. Le centre est le milieu des bornes : $\dfrac{3+11}{2} = 7$. Le rayon est la moitié de la longueur : $\dfrac{11-3}{2} = 4$.

Conclusion. $x \in [3;11] \Leftrightarrow |x-7| \leq 4$.



L'intervalle [3 ; 11] a pour centre 7 et pour rayon 4 : il réunit les réels x tels que |x - 7| est au plus 4.

Propriété : Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Méthode : majorer une expression

1. **Découpe** l'expression en une somme de termes simples.
2. **Applique** l'inégalité triangulaire : la valeur absolue de la somme est au plus la somme des valeurs absolues.
3. **Majore** chaque terme avec l'hypothèse sur x, en citant la propriété employée.
4. **Additionne** ces majorations : tu obtiens un majorant, pas forcément atteint.

Exemple

Énoncé. Soit x un réel tel que $|x| \leq 2$. Majore $|4x-3|$.

Inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} |4x-3| &\leq |4x| + |-3| \\ &= 4|x| + 3. \end{aligned}$$

Hypothèse. D'après la propriété ordre et multiplication, $4|x| \leq 8$, donc $|4x-3| \leq 11$.

Encadrement, approximation ; somme et différence

Définition : Encadrement, valeur approchée, approximation décimale

Soit x un réel.

- Si $a \leq x \leq b$, on dit que $a \leq x \leq b$ est un **encadrement** de x, d'**amplitude** $b - a$.
- Soit ε un réel strictement positif. Un réel a est une **valeur approchée** de x **à** ε **près** lorsque $|x - a| \leq \varepsilon$. Elle est **par défaut** si $a \leq x \leq a + \varepsilon$, et **par excès** si $a - \varepsilon \leq x \leq a$.
- Soit n un entier naturel et k l'entier relatif tel que $k \times 10^{-n} \leq x < (k+1) \times 10^{-n}$. Le décimal $k \times 10^{-n}$ est l'**approximation décimale par défaut** de x à 10^{-n} près, et $(k+1) \times 10^{-n}$ est son **approximation décimale par excès**.

Exemple

Énoncé. Donne les approximations décimales de $\frac{5}{3}$ à 10^{-2} près.

Encadrement. On a $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$, donc $1{,}66 \leq \frac{5}{3} < 1{,}67$. En effet, $3 \times 1{,}66 = 4{,}98$ et $3 \times 1{,}67 = 5{,}01$.

Conclusion. L'approximation par défaut est $1{,}66$, celle par excès $1{,}67$.

Propriété : Encadrement d'une somme et d'une différence

Soit x et y deux réels, et a, b, c, d des réels tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$. Alors

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

et

$$a - d \leq x - y \leq b - c.$$

Méthode : encadrer une somme ou une différence

1. **Aligne** les deux encadrements, avec des inégalités de même sens.
2. **Somme** : additionne les bornes de gauche, puis celles de droite.
3. **Différence** $x - y$: multiplie l'encadrement de y par -1, ce qui le retourne, puis additionne-le à celui de x.
4. **Contrôle** : l'amplitude obtenue est la somme des deux amplitudes de départ.

Exemple

Énoncé. On sait que $4 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 3$.

Somme. En additionnant membre à membre : $5 \leq x + y \leq 9$.

Différence. D'abord $-3 \leq -y \leq -1$, puis $1 \leq x - y \leq 5$.

Contrôle. Chaque amplitude vaut 4, somme des amplitudes 2 et 2.

Attention : Jamais de soustraction des bornes une à une

Avec $4 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 3$, soustraire les bornes une à une donnerait $3 \leq x - y \leq 3$. Ce serait dire que $x - y$ vaut toujours 3.

Or $x = 4$ et $y = 3$ donnent $x - y = 1$. Passe toujours par l'encadrement de $-y$.

Produit, quotient, valeur approchée, calculatrice

Méthode : encadrer un produit ou un quotient, sur un exemple de nombres positifs

1. **Contrôle** les signes : toutes les bornes doivent être strictement positives.
2. **Produit** xy : multiplie les bornes de gauche entre elles, puis celles de droite.
3. **Quotient** $\frac{x}{y}$: encadre d'abord $\frac{1}{y}$, ce qui échange les bornes, puis traite le produit $x \times \frac{1}{y}$.
4. **Vérifie** avec une valeur particulière calculée à la calculatrice.

Exemple

Énoncé. On sait que $2 \leq x \leq 2{,}5$ et $4 \leq y \leq 5$: toutes les bornes sont strictement positives.

Produit. $2 \times 4 \leq xy \leq 2{,}5 \times 5$, soit $8 \leq xy \leq 12{,}5$.

Quotient. Le passage à l'inverse donne $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$. Puis $\frac{2}{5} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2{,}5}{4}$, soit $0{,}4 \leq \frac{x}{y} \leq 0{,}625$.

Attention : Des bornes négatives interdisent le produit membre à membre

Avec $-2 \leq x \leq 1$ et $-4 \leq y \leq 1$, multiplier les bornes donnerait $8 \leq xy \leq 1$, ce qui est impossible. De plus, $x = -2$ et $y = -4$ donnent $xy = 8$, bien au-dessus de 1.

Le produit membre à membre ne vaut que pour des nombres positifs.

Propriété : Valeur approchée d'une somme et d'une différence

Soit x et y deux réels, et ε et ε' deux réels strictement positifs. Si a est une valeur approchée de x à ε près, et b une valeur approchée de y à ε' près, alors $a + b$ est une valeur approchée de $x + y$, et $a - b$ une valeur approchée de $x - y$, à $\varepsilon + \varepsilon'$ près.

Exemple

Énoncé. $2{,}64$ est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près, et $3{,}3$ une valeur approchée de $\sqrt{11}$ à 10^{-1} près.

Somme. D'après la valeur approchée d'une somme, $2{,}64 + 3{,}3 = 5{,}94$ est une valeur approchée de $\sqrt{7} + \sqrt{11}$ à $0{,}01 + 0{,}1 = 0{,}11$ près.

Méthode : valeur approchée avec la calculatrice

1. **Tape** l'expression avec des parenthèses autour de chaque numérateur, dénominateur ou radicande.
2. **Lis** l'écran comme une valeur approchée : il montre un nombre fini de chiffres.
3. **Écris** un encadrement décimal, par défaut et par excès, à la précision demandée.
4. **Pour un nombre très grand ou très petit**, lis l'écriture scientifique $a \times 10^n$.

Attention : L'écran ne donne pas la valeur exacte

Pour $\sqrt{13}$, l'écran indique $3{,}605551275$. Ce nombre n'est qu'une valeur approchée : écris $\sqrt{13} \approx 3{,}605$, ou l'encadrement $3{,}605 \leq \sqrt{13} \leq 3{,}606$.

Attention aussi aux priorités : sans parenthèses, $1 + 3 \div 4$ donne $1{,}75$, et non $\dfrac{1+3}{4} = 1$.

Quelle technique pour quelle question ?

Méthode : Quelle technique pour quelle question ?

- **Comparer** deux nombres : le signe de la différence ; les carrés pour deux positifs ; les inverses, qui changent le sens, pour deux nombres non nuls de même signe.
- **Transformer** une inégalité : ajouter un réel, multiplier par un réel de signe connu.
- **Décrire** un ensemble de réels : intervalle, intersection, réunion.
- **Mesurer** un écart : la distance $|x - y|$.
- **Résoudre** $|x - a| \leq r$, avec $r > 0$: l'intervalle centré $[a - r ; a + r]$.
- **Majorer** : l'inégalité triangulaire, terme à terme.
- **Encadrer** une somme ou une différence : membre à membre, avec l'opposé pour la différence.
- **Encadrer** un produit ou un quotient de réels strictement positifs : membre à membre, avec l'inverse pour le quotient.
- **Approcher** : les précisions s'additionnent ; l'écran affiche une valeur approchée.

Comparaison

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$$

Facteur strictement négatif, c < 0

$$ac \geq bc \text{ si } a \leq b$$

Passage à l'inverse, a et b non nuls de même signe

$$a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Distance de deux réels

$$MN = |x - y|$$

Intervalle centré, r > 0

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

Inégalité triangulaire

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Différence encadrée

$$a - d \leq x - y \leq b - c$$

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la propriété à chaque inégalité : « d'après la propriété ordre et multiplication, le sens change ».

Annonce les deux cas avant d'enlever une valeur absolue. Vérifie le signe des bornes avant un produit ou un inverse.

Termine par une phrase qui répond à la question.