BURHAN

# L'ordre dans $\mathbb{R}$ : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| L'ordre dans $\mathbb{R}$ | Niveau examen | 5 |

## Exercice 1 — 5 pts

### Encadrer le nombre d'or et son inverse

On appelle nombre d'or le réel $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**1.** — 1 pts

Calculer $2{,}2^2$ et $2{,}3^2$. En déduire un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude $0{,}1$.

INDICE

**Outil :** pour des réels positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres.

**2.** — 1 pts

En déduire que $1{,}6 \leq \varphi \leq 1{,}65$.

INDICE

**Début :** ajoute $1$ aux trois membres. **Ensuite :** multiplie par $\dfrac{1}{2}$ ; quel est son signe ?

**3.** — 1 pts

Calculer $\varphi^2$ et vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

INDICE

**Outil :** l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Point délicat :** le dénominateur $2$ est élevé au carré.

**4.** — 1 pts

En déduire que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, puis donner un encadrement de $\dfrac{1}{\varphi}$.

INDICE

**Début :** $\varphi$ n'est pas nul ; divise les deux membres de l'égalité de la question 3 par $\varphi$. **Ensuite :** utilise la question 2.

**5.** — 1 pts

Calculer la distance entre $\varphi$ et $\dfrac{1}{\varphi}$ sur la droite graduée. Puis écrire l'encadrement de la question 2 sous la forme $|\varphi - c| \leq r$, et en déduire une valeur approchée de $\varphi$.

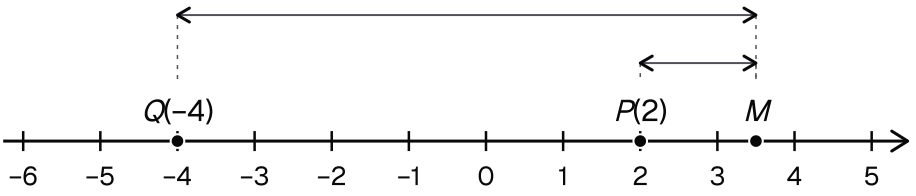
INDICE

**Outil :** la distance entre deux réels $x$ et $y$ est $|x-y|$. **Ensuite :** $c$ est le milieu de $1{,}6$ et $1{,}65$.

## Exercice 2 — 5 pts

### La somme de deux distances sur la droite graduée

Pour tout réel $x$, on pose $A = |x-2| + |x+4|$. Sur une droite graduée, on note $M$ le point d'abscisse $x$, $P$ le point d'abscisse $2$ et $Q$ le point d'abscisse $-4$.




**Le point mobile M d'abscisse x et les deux points fixes P, d'abscisse 2, et Q, d'abscisse -4.**

**1.** — 0,5 pts

Calculer $A$ pour $x = 0$, pour $x = 3$ et pour $x = -5$. Exprimer $A$ à l'aide des distances $MP$ et $MQ$.

INDICE

**Début :** remplace $x$, puis calcule chaque valeur absolue. **Outil :** $|x+4| = |x-(-4)|$.

**2.** — 1 pts

Remarquer que $(2-x)+(x+4) = 6$. En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $A \geq 6$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** l'inégalité triangulaire, appliquée à $2-x$ et $x+4$. **Point délicat :** $|2-x| = |x-2|$.

**3.** — 0,5 pts

On suppose que $-4 \leq x \leq 2$. Donner le signe de $x-2$, puis celui de $x+4$. En déduire $A$ sans valeur absolue, et sa valeur.

INDICE

**Début :** retranche $2$ aux deux membres de $x \leq 2$, puis ajoute $4$ à ceux de $x \geq -4$. **Outil :** la définition de la valeur absolue, appliquée au nombre $x-2$, puis au nombre $x+4$.

**4.** — 1,5 pts

On étudie deux autres cas, $x > 2$ puis $x < -4$. Dans chaque cas, donner le signe de $x-2$ et celui de $x+4$, écrire $A$ sans valeur absolue, puis résoudre l'équation $A = 10$.

INDICE

**Début :** procède comme à la question 3 ; dans chaque cas, $x-2$ et $x+4$ ont le même signe. **Point délicat :** garde seulement une solution qui vérifie la condition du cas.

**5.** 1,5 pts

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $A = 10$, puis celui de l'inéquation $A \leq 10$, en reprenant les trois cas : $x > 2$, $-4 \leq x \leq 2$, $x < -4$.

INDICE

**Début :** n'oublie pas le cas de la question 3. **Ensuite :** dans chaque cas, résous $A \leq 10$, puis réunis les ensembles obtenus.

## Exercice 3 — 5 pts

### Le volume d'une citerne et la réserve d'eau

Une ferme stocke son eau dans une citerne en forme de cylindre. Son volume, en mètres cubes, est $V = \pi \times R^2 \times h$, où $R$ est le rayon et $h$ la hauteur, en mètres. Les mesures donnent $1 \leq R \leq 1{,}1$ et $2 \leq h \leq 2{,}1$. On utilise l'encadrement $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$. La calculatrice est autorisée pour les produits.

**1.** 2 pts

Encadrer $R^2$, puis $\pi \times R^2$.

INDICE

**Outil :** la comparaison des carrés de réels positifs, puis la multiplication membre à membre. **Point délicat :** vérifie que toutes les bornes sont positives.

**2.** 1 pts

En déduire que $6{,}28 \leq V \leq 8{,}01$.

INDICE

**Début :** multiplie membre à membre avec l'encadrement de $h$. **Ensuite :** compare la borne de droite obtenue avec $8{,}01$.

**3.** 1 pts

La ferme consomme chaque jour un volume $c$ d'eau, en mètres cubes, avec $0{,}2 \leq c \leq 0{,}25$. La citerne étant pleine, la réserve dure $N = \dfrac{V}{c}$ jours. Encadrer $N$.

INDICE

**Début :** encadre d'abord $\dfrac{1}{c}$. **Point délicat :** le passage à l'inverse échange les bornes.

**4.** 1 pts

Écrire l'encadrement $6{,}28 \leq V \leq 8{,}01$ sous la forme $|V - a| \leq r$. En déduire une valeur approchée de $V$ et sa précision.

INDICE

**Début :** $a$ est le milieu des bornes et $r$ la moitié de l'amplitude. **Outil :** la propriété valeur absolue et intervalle centré.

**Exercice 4** 5 pts

## La balance aux bras inégaux et la moyenne des pesées

Une balance à deux plateaux a des bras de longueurs différentes. On pèse un objet de masse $m$, en kilogrammes. Placé sur le plateau de gauche, il est équilibré par des masses marquées de total $a$ ; placé sur le plateau de droite, par des masses marquées de total $b$. Les réels $a$ et $b$ sont strictement positifs et l'on admet que $m = \sqrt{ab}$. Le vendeur, lui, annonce la moyenne des deux pesées : $p = \dfrac{a+b}{2}$.

**1.** 1 pts

Dans cette question, $a = 1{,}6$ et $b = 2{,}5$. Calculer $m$ et $p$, puis le signe de $p - m$. Laquelle des deux masses est la plus grande ?

INDICE

**Début :** calcule d'abord le produit $ab$. **Outil :** pour comparer deux nombres, étudie le signe de leur différence.

**2.** 1,5 pts

On revient au cas général. Développer $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$. En déduire que $p - m = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$, puis comparer $p$ et $m$.

INDICE

**Outil :** l'identité remarquable $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$. **Point délicat :** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, car $a$ et $b$ sont positifs.

**3.** 1 pts

On suppose $a \leq b$. Multiplier les deux membres de $a \leq b$ par $a$, puis par $b$, et comparer $a^2$, $ab$ et $b^2$. En déduire que $a \leq m \leq b$.

INDICE

**Outil :** avant de multiplier $a \leq b$ par $a$, puis par $b$, vérifie que ces deux nombres sont positifs (ordre et multiplication). **Ensuite :** compare les carrés de réels positifs.

**4.** 1,5 pts

Sur une autre balance aux bras inégaux, un objet donne $a = 2{,}4$ et $b = 2{,}6$. On donne $2{,}49^2 = 6{,}2001$ et $2{,}5^2 = 6{,}25$. Calculer $ab$ et en déduire un encadrement de $m$ d'amplitude $0{,}01$, puis un encadrement de $p - m$. Le nombre $p$ est-il une valeur approchée de $m$ à $10^{-2}$ près ? Par défaut ou par excès ?

INDICE

**Début :** compare $ab$ aux deux carrés. **Ensuite :** encadre $-m$ (passer à l'opposé change le sens), puis ajoute $p$. **Point délicat :** relis la définition d'une valeur approchée par excès.

**Exercice 5** 5 pts

## Approcher 9 par le carré d'un réel voisin de 3

Dans les questions 1 à 3, $x$ est un réel tel que $|x-3| \leq 0{,}1$. On cherche à quelle précision le nombre $x^2$ approche $9$.

**1.** 1 pts

Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels $x$ tels que $|x-3| \leq 0{,}1$. En déduire un encadrement de $x+3$.

INDICE

**Outil :** la propriété valeur absolue et intervalle centré. **Ensuite :** ajoute $3$ aux trois membres.

**2.** 1 pts

Vérifier que $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. En déduire que $|x^2-9| \leq 0{,}61$.

INDICE

**Outil :** l'identité remarquable $(u-v)(u+v) = u^2 - v^2$, puis la valeur absolue d'un produit. **Point délicat :** $x+3$ est positif, donc $|x+3| = x+3$.

**3.** 1 pts

En déduire un encadrement de $x^2$. Le comparer avec l'encadrement obtenu en élevant au carré les bornes de $2{,}9 \leq x \leq 3{,}1$.

INDICE

**Début :** $|x^2-9| \leq 0{,}61$ signifie que $x^2$ est à une distance au plus $0{,}61$ de $9$. **Outil :** pour des réels positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres.

**4.** 1 pts

Soit maintenant $r$ un réel tel que $0 < r \leq 1$, et $x$ un réel tel que $|x-3| \leq r$. Écrire $x+3 = (x-3)+6$ et appliquer l'inégalité triangulaire pour obtenir $|x+3| \leq 7$, puis en déduire que $|x^2-9| \leq 7r$.

INDICE

**Outil :** l'inégalité triangulaire, appliquée à $x-3$ et à $6$. **Ensuite :** utilise $r \leq 1$, puis reprends le produit de la question 2.

**5.** 1 pts

En déduire que, si $|x-3| \leq 0{,}001$, alors $x^2$ est une valeur approchée de $9$ à $10^{-2}$ près. La condition $|x-3| \leq 0{,}01$ suffit-elle aussi ? On pourra calculer $3{,}01^2$.

INDICE

**Début :** applique la question 4 avec $r = 0{,}001$. **Point délicat :** pour établir qu'une condition ne suffit pas, un seul exemple bien choisi suffit.