BURHAN

L'ordre dans $\mathbb{R}$: exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
L'ordre dans $\mathbb{R}$	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Encadrer le nombre d'or et son inverse

On appelle nombre d'or le réel $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. 1 pts

Calculer $2{,}2^2$ et $2{,}3^2$. En déduire un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude $0{,}1$.

INDICE

Outil : pour des réels positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres.

CORRIGÉ

Carrés.

$$2{,}2^2 = 4{,}84$$
$$2{,}3^2 = 5{,}29$$

Donc $2{,}2^2 \leq 5 \leq 2{,}3^2$.

Comparaison. Les réels $2{,}2$, $\sqrt{5}$ et $2{,}3$ sont positifs, et $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$. D'après la comparaison des carrés de réels positifs :

$$2{,}2 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}3.$$

Conclusion. C'est un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude $2{,}3 - 2{,}2 = 0{,}1$.

2. 1 pts

En déduire que $1{,}6 \leq \varphi \leq 1{,}65$.

INDICE

Début : ajoute 1 aux trois membres. **Ensuite :** multiplie par $\dfrac{1}{2}$; quel est son signe ?

CORRIGÉ

Ajout de 1. D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 1 aux trois membres :

$$3{,}2 \leq 1+\sqrt{5} \leq 3{,}3.$$

Multiplication par $\dfrac{1}{2}$. Le facteur $\dfrac{1}{2}$ est strictement positif : d'après la propriété ordre et multiplication, le sens est conservé. Les bornes deviennent $\dfrac{3{,}2}{2} = 1{,}6$ et $\dfrac{3{,}3}{2} = 1{,}65$.

Conclusion. Le nombre d'or vérifie :

$$1{,}6 \leq \varphi \leq 1{,}65.$$

3. 1 pts

Calculer φ^2 et vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Point délicat :** le dénominateur 2 est élevé au carré.

CORRIGÉ

Carré. D'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = 1$ et $b = \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Somme. D'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi + 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux calculs donnent le même nombre : $\varphi^2 = \varphi + 1$.

4. 1 pts

En déduire que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, puis donner un encadrement de $\dfrac{1}{\varphi}$.

INDICE

Début : φ n'est pas nul ; divise les deux membres de l'égalité de la question 3 par φ. **Ensuite :** utilise la question 2.

CORRIGÉ

Signe de φ. D'après la question 2, $\varphi \geq 1{,}6$, donc $\varphi - 1{,}6 \geq 0$ (ordre et addition). Ainsi $\varphi = (\varphi - 1{,}6) + 1{,}6$ est la somme d'un réel positif ou nul et d'un réel strictement positif : $\varphi > 0$. En particulier, φ n'est pas nul.

Égalité. On divise les deux membres de $\varphi^2 = \varphi + 1$ par le réel non nul φ :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

En retranchant 1 aux deux membres, $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

Encadrement. On retranche 1 aux trois membres de $1{,}6 \leq \varphi \leq 1{,}65$ (ordre et addition), et l'on remplace $\varphi - 1$ par $\dfrac{1}{\varphi}$.

Conclusion. On a $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ et :

$$0{,}6 \leq \frac{1}{\varphi} \leq 0{,}65.$$

5. 1 pts

Calculer la distance entre φ et $\dfrac{1}{\varphi}$ sur la droite graduée. Puis écrire l'encadrement de la question 2 sous la forme $|\varphi - c| \leq r$, et en déduire une valeur approchée de φ.

INDICE

Outil : la distance entre deux réels x et y est $|x - y|$. **Ensuite :** c est le milieu de $1{,}6$ et $1{,}65$.

CORRIGÉ

Distance. D'après la question 4, $\varphi - \dfrac{1}{\varphi} = \varphi - (\varphi - 1) = 1$. La distance entre φ et $\dfrac{1}{\varphi}$ vaut donc :

$$\left|\varphi - \frac{1}{\varphi}\right| = |1| = 1.$$

Centre et rayon.

$$c = \frac{1{,}6 + 1{,}65}{2} = 1{,}625$$
$$r = \frac{1{,}65 - 1{,}6}{2} = 0{,}025$$

Intervalle centré. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $1{,}6 \leq \varphi \leq 1{,}65$ équivaut à :

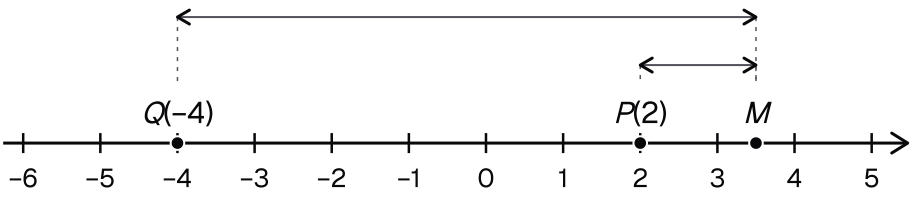
$$|\varphi - 1{,}625| \leq 0{,}025.$$

Conclusion. La distance entre φ et $\dfrac{1}{\varphi}$ vaut 1, et $1{,}625$ est une valeur approchée de φ à $0{,}025$ près.

Exercice 2 — 5 pts

La somme de deux distances sur la droite graduée

Pour tout réel x, on pose $A = |x-2| + |x+4|$. Sur une droite graduée, on note M le point d'abscisse x, P le point d'abscisse 2 et Q le point d'abscisse -4.



Le point mobile M d'abscisse x et les deux points fixes P, d'abscisse 2, et Q, d'abscisse -4.

1. — 0,5 pts

Calculer A pour $x = 0$, pour $x = 3$ et pour $x = -5$. Exprimer A à l'aide des distances MP et MQ.

INDICE

Début : remplace x, puis calcule chaque valeur absolue. **Outil :** $|x+4| = |x-(-4)|$.

CORRIGÉ

Calculs.

- Pour $x = 0$: $A = |-2| + |4| = 2 + 4 = 6$.
- Pour $x = 3$: $A = |1| + |7| = 1 + 7 = 8$.
- Pour $x = -5$: $A = |-7| + |-1| = 7 + 1 = 8$.

Distances. D'après la définition de la distance, $|x-2| = MP$ et $|x+4| = |x-(-4)| = MQ$.

Conclusion. Pour tout réel x, $A = MP + MQ$.

2. 1 pts

Remarquer que $(2-x)+(x+4)=6$. En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $A \geq 6$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire, appliquée à $2-x$ et $x+4$. **Point délicat :** $|2-x|=|x-2|$.

CORRIGÉ

Inégalité triangulaire. Soit x un réel. On a $(2-x)+(x+4)=6$, donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 6 &= |(2-x)+(x+4)| \\ &\leq |2-x|+|x+4|. \end{aligned}$$

Symétrie. D'après les propriétés de la valeur absolue, $|2-x|=|x-2|$: le membre de droite est égal à A.

Conclusion. Pour tout réel x, $A \geq 6$. Sur la droite graduée, $MP+MQ$ est toujours au moins égal à $PQ=6$.

3. 0,5 pts

On suppose que $-4 \leq x \leq 2$. Donner le signe de $x-2$, puis celui de $x+4$. En déduire A sans valeur absolue, et sa valeur.

INDICE

Début : retranche 2 aux deux membres de $x \leq 2$, puis ajoute 4 à ceux de $x \geq -4$. **Outil :** la définition de la valeur absolue, appliquée au nombre $x-2$, puis au nombre $x+4$.

CORRIGÉ

Signes. Comme $x \leq 2$, en retranchant 2 (ordre et addition) : $x-2 \leq 0$. Comme $x \geq -4$, en ajoutant 4 : $x+4 \geq 0$.

Sans valeur absolue. D'après la définition de la valeur absolue, $|x-2|=-(x-2)=2-x$ (pour $x=2$, les deux écritures valent 0) et $|x+4|=x+4$.

Valeur.

$$\begin{aligned} A &= (2-x)+(x+4) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de $[-4;2]$, $A=6$.

4. 1,5 pts

On étudie deux autres cas, $x > 2$ puis $x < -4$. Dans chaque cas, donner le signe de $x - 2$ et celui de $x + 4$, écrire A sans valeur absolue, puis résoudre l'équation $A = 10$.

INDICE

Début : procède comme à la question 3 ; dans chaque cas, $x - 2$ et $x + 4$ ont le même signe. **Point délicat :** garde seulement une solution qui vérifie la condition du cas.

CORRIGÉ

Premier cas, $x > 2$. On a $x - 2 > 0$, et $x + 4 > 6 > 0$ (ordre et addition). D'après la définition de la valeur absolue :

$$\begin{aligned} A &= (x - 2) + (x + 4) \\ &= 2x + 2. \end{aligned}$$

L'équation $A = 10$ s'écrit $2x + 2 = 10$, soit $2x = 8$, puis $x = 4$. Cette valeur vérifie $x > 2$: elle convient.

Second cas, $x < -4$. On a $x + 4 < 0$, et $x - 2 < -6 < 0$ (ordre et addition). D'après la définition de la valeur absolue :

$$\begin{aligned} A &= (2 - x) - (x + 4) \\ &= -2x - 2. \end{aligned}$$

L'équation $A = 10$ s'écrit $-2x - 2 = 10$, soit $-2x = 12$, puis $x = -6$. Cette valeur vérifie $x < -4$: elle convient.

Conclusion. Pour $x > 2$, $A = 2x + 2$ et l'équation $A = 10$ a pour solution 4 ; pour $x < -4$, $A = -2x - 2$ et elle a pour solution -6.

5. 1,5 pts

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $A = 10$, puis celui de l'inéquation $A \leq 10$, en reprenant les trois cas : $x > 2$, $-4 \leq x \leq 2$, $x < -4$.

INDICE

Début : n'oublie pas le cas de la question 3. **Ensuite :** dans chaque cas, résous $A \leq 10$, puis réunis les ensembles obtenus.

CORRIGÉ

Équation. D'après la question 3, $A = 6$ sur $[-4;2]$: aucune solution dans ce cas. Avec la question 4, l'ensemble des solutions de $A = 10$ est $\{-6;4\}$.

Inéquation, cas $x > 2$. On retranche 2 (ordre et addition), puis on multiplie par $\frac{1}{2} > 0$: le sens est conservé (ordre et multiplication).

$$\begin{aligned} &2x + 2 \leq 10 \\ \Leftrightarrow\ &2x \leq 8 \\ \Leftrightarrow\ &x \leq 4. \end{aligned}$$

Avec $x > 2$, on obtient l'intervalle $]2;4]$.

Inéquation, cas $-4 \leq x \leq 2$. Ici $A = 6 \leq 10$: tout l'intervalle $[-4;2]$ convient.

Inéquation, cas $x < -4$. On ajoute 2 (ordre et addition), puis on multiplie par $-\frac{1}{2}$, strictement négatif : le sens change (ordre et multiplication).

$$\begin{aligned} &-2x - 2 \leq 10 \\ \Leftrightarrow\ &-2x \leq 12 \\ \Leftrightarrow\ &x \geq -6. \end{aligned}$$

Avec $x < -4$, on obtient l'intervalle $[-6;-4[$.

Conclusion. L'équation $A = 10$ a pour ensemble de solutions $\{-6;4\}$. L'inéquation $A \leq 10$ a pour ensemble de solutions la réunion de $[-6;-4[$, $[-4;2]$ et $]2;4]$, soit :

$$S = [-6;4]\,.$$

Exercice 3 5 pts

Le volume d'une citerne et la réserve d'eau

Une ferme stocke son eau dans une citerne en forme de cylindre. Son volume, en mètres cubes, est $V = \pi \times R^2 \times h$, où R est le rayon et h la hauteur, en mètres. Les mesures donnent $1 \leq R \leq 1{,}1$ et $2 \leq h \leq 2{,}1$. On utilise l'encadrement $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$. La calculatrice est autorisée pour les produits.

1. 2 pts

Encadrer R^2, puis $\pi \times R^2$.

INDICE

Outil : la comparaison des carrés de réels positifs, puis la multiplication membre à membre. **Point délicat :** vérifie que toutes les bornes sont positives.

CORRIGÉ

Carré. Les réels 1, R et $1{,}1$ sont positifs. D'après la comparaison des carrés de réels positifs, $1^2 \leq R^2 \leq 1{,}1^2$, soit :

$$1 \leq R^2 \leq 1{,}21.$$

Produit par π. Les nombres $3{,}14$, π, $3{,}15$, 1, R^2 et $1{,}21$ sont tous strictement positifs : on peut multiplier membre à membre (propriété ordre et multiplication). Les bornes valent $3{,}14 \times 1 = 3{,}14$ et $3{,}15 \times 1{,}21 = 3{,}8115$.

Conclusion. On obtient $1 \leq R^2 \leq 1{,}21$, puis :

$$3{,}14 \leq \pi R^2 \leq 3{,}8115.$$

2. 1 pts

En déduire que $6{,}28 \leq V \leq 8{,}01$.

INDICE

Début : multiplie membre à membre avec l'encadrement de h. **Ensuite :** compare la borne de droite obtenue avec $8{,}01$.

CORRIGÉ

Produit par h. Avec $2 \leq h \leq 2{,}1$, tous les nombres en jeu sont strictement positifs. Le produit membre à membre donne les bornes $3{,}14 \times 2 = 6{,}28$ et $3{,}8115 \times 2{,}1 = 8{,}00415$:

$$6{,}28 \leq V \leq 8{,}00415.$$

Majoration. Comme $8{,}00415 \leq 8{,}01$, la transitivité permet de remplacer la borne de droite par $8{,}01$.

Conclusion. Le volume de la citerne vérifie bien :

$$6{,}28 \leq V \leq 8{,}01.$$

3. 1 pts

La ferme consomme chaque jour un volume c d'eau, en mètres cubes, avec $0{,}2 \leq c \leq 0{,}25$. La citerne étant pleine, la réserve dure $N = \dfrac{V}{c}$ jours. Encadrer N.

INDICE

Début : encadre d'abord $\dfrac{1}{c}$. **Point délicat :** le passage à l'inverse échange les bornes.

CORRIGÉ

Inverse. Les réels $0{,}2$, c et $0{,}25$ sont strictement positifs. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire. Comme $\dfrac{1}{0{,}25} = 4$ et $\dfrac{1}{0{,}2} = 5$:

$$4 \leq \frac{1}{c} \leq 5.$$

Produit. On écrit $N = V \times \dfrac{1}{c}$. Avec la question 2, le produit membre à membre de ces encadrements de nombres positifs donne les bornes $6{,}28 \times 4 = 25{,}12$ et $8{,}01 \times 5 = 40{,}05$.

Conclusion. Le nombre de jours N vérifie :

$$25{,}12 \leq N \leq 40{,}05.$$

La réserve dure donc au moins 25 jours.

4. 1 pts

Écrire l'encadrement $6{,}28 \leq V \leq 8{,}01$ sous la forme $|V - a| \leq r$. En déduire une valeur approchée de V et sa précision.

INDICE

Début : a est le milieu des bornes et r la moitié de l'amplitude. **Outil :** la propriété valeur absolue et intervalle centré.

CORRIGÉ

Centre et rayon.

$$\begin{aligned} a &= \frac{6{,}28 + 8{,}01}{2} \\ &= 7{,}145 \\ r &= \frac{8{,}01 - 6{,}28}{2} \\ &= 0{,}865 \end{aligned}$$

Intervalle centré. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $6{,}28 \leq V \leq 8{,}01$ équivaut à :

$$|V - 7{,}145| \leq 0{,}865.$$

Conclusion. Le nombre $7{,}145$ est une valeur approchée de V à $0{,}865$ près.

Exercice 4 5 pts

La balance aux bras inégaux et la moyenne des pesées

Une balance à deux plateaux a des bras de longueurs différentes. On pèse un objet de masse m, en kilogrammes. Placé sur le plateau de gauche, il est équilibré par des masses marquées de total a ; placé sur le plateau de droite, par des masses marquées de total b. Les réels a et b sont strictement positifs et l'on admet que $m = \sqrt{ab}$. Le vendeur, lui, annonce la moyenne des deux pesées : $p = \dfrac{a+b}{2}$.

1. 1 pts

Dans cette question, $a = 1{,}6$ et $b = 2{,}5$. Calculer m et p, puis le signe de $p - m$. Laquelle des deux masses est la plus grande ?

INDICE

Début : calcule d'abord le produit ab. **Outil :** pour comparer deux nombres, étudie le signe de leur différence.

CORRIGÉ

Calculs. On a $ab = 1{,}6 \times 2{,}5 = 4$, donc $m = \sqrt{4} = 2$. Et :

$$p = \frac{1{,}6 + 2{,}5}{2} = \frac{4{,}1}{2} = 2{,}05.$$

Signe. On a $p - m = 2{,}05 - 2 = 0{,}05 > 0$.

Conclusion. D'après la définition de la comparaison, $p > m$: la masse annoncée par le vendeur est la plus grande, elle dépasse la masse de l'objet.

2. 1,5 pts

On revient au cas général. Développer $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$. En déduire que $p-m=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$, puis comparer p et m.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$. **Point délicat :** $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, car a et b sont positifs.

CORRIGÉ

Développement. D'après l'identité remarquable $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$, avec $u=\sqrt{a}$ et $v=\sqrt{b}$:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\\&=a-2\sqrt{a}\times\sqrt{b}+b\\&=a+b-2\sqrt{ab},\end{aligned}$$

car a et b sont positifs : $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $\left(\sqrt{b}\right)^2=b$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Différence.

$$\begin{aligned}p-m&=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\\&=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}\\&=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.\end{aligned}$$

Signe. Un carré est positif ou nul et $2>0$, donc $p-m\geq 0$.

Conclusion. D'après la définition de la comparaison, $p\geq m$: la moyenne des deux pesées n'est jamais inférieure à la masse de l'objet.

3. 1 pts

On suppose $a\leq b$. Multiplier les deux membres de $a\leq b$ par a, puis par b, et comparer a^2, ab et b^2. En déduire que $a\leq m\leq b$.

INDICE

Outil : avant de multiplier $a\leq b$ par a, puis par b, vérifie que ces deux nombres sont positifs (ordre et multiplication). **Ensuite :** compare les carrés de réels positifs.

CORRIGÉ

Produits. Les réels a et b sont strictement positifs. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier $a\leq b$ par $a>0$ conserve le sens : $a^2\leq ab$. De même, multiplier $a\leq b$ par $b>0$ donne $ab\leq b^2$.

Carrés. Comme $m^2=ab$, on obtient $a^2\leq m^2\leq b^2$. Les réels a, m et b sont positifs : d'après la comparaison des carrés de réels positifs, $a\leq m\leq b$.

Conclusion. Lorsque $a\leq b$, on a $a\leq m\leq b$: la masse de l'objet est comprise entre les deux pesées.

4. 1,5 pts

Sur une autre balance aux bras inégaux, un objet donne $a = 2{,}4$ et $b = 2{,}6$. On donne $2{,}49^2 = 6{,}2001$ et $2{,}5^2 = 6{,}25$. Calculer ab et en déduire un encadrement de m d'amplitude $0{,}01$, puis un encadrement de $p - m$. Le nombre p est-il une valeur approchée de m à 10^{-2} près ? Par défaut ou par excès ?

INDICE

Début : compare ab aux deux carrés. **Ensuite :** encadre $-m$ (passer à l'opposé change le sens), puis ajoute p. **Point délicat :** relis la définition d'une valeur approchée par excès.

CORRIGÉ

Encadrement de m. On calcule $ab = 2{,}4 \times 2{,}6 = 6{,}24$. Avec $2{,}49^2 = 6{,}2001$ et $2{,}5^2 = 6{,}25$, et comme $m^2 = ab$:

$$2{,}49^2 \leq m^2 \leq 2{,}5^2.$$

Les réels $2{,}49$, m et $2{,}5$ sont positifs. D'après la comparaison des carrés de réels positifs :

$$2{,}49 \leq m \leq 2{,}5.$$

C'est un encadrement d'amplitude $2{,}5 - 2{,}49 = 0{,}01$.

Encadrement de $p - m$. Ici $p = \dfrac{2{,}4 + 2{,}6}{2} = 2{,}5$. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -1, strictement négatif, change le sens : $-2{,}5 \leq -m \leq -2{,}49$. En ajoutant $2{,}5$ (ordre et addition) :

$$0 \leq p - m \leq 0{,}01.$$

Valeur approchée. De $0 \leq p - m \leq 0{,}01$, on tire $p - 0{,}01 \leq m \leq p$ (ordre et addition), c'est-à-dire $2{,}5 - 10^{-2} \leq m \leq 2{,}5$.

Conclusion. D'après la définition, $p = 2{,}5$ est une valeur approchée de m à 10^{-2} près, par excès. Cela confirme la question 2 : $p \geq m$.

Exercice 5 5 pts

Approcher 9 par le carré d'un réel voisin de 3

Dans les questions 1 à 3, x est un réel tel que $|x-3| \leq 0{,}1$. On cherche à quelle précision le nombre x^2 approche 9.

1. 1 pts

Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x-3| \leq 0{,}1$. En déduire un encadrement de $x+3$.

INDICE

Outil : la propriété valeur absolue et intervalle centré. **Ensuite :** ajoute 3 aux trois membres.

CORRIGÉ

Intervalle. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec le centre 3 et le rayon $0{,}1$:

$$\begin{aligned} &|x-3| \leq 0{,}1 \\ \Leftrightarrow\ &2{,}9 \leq x \leq 3{,}1. \end{aligned}$$

Somme. En ajoutant 3 aux trois membres (ordre et addition) :

$$5{,}9 \leq x+3 \leq 6{,}1.$$

Conclusion. L'ensemble cherché est l'intervalle $[2{,}9\,;3{,}1]$, et pour chacun de ses éléments, $5{,}9 \leq x+3 \leq 6{,}1$.

2. 1 pts

Vérifier que $x^2-9=(x-3)(x+3)$. En déduire que $|x^2-9| \leq 0{,}61$.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(u-v)(u+v)=u^2-v^2$, puis la valeur absolue d'un produit. **Point délicat :** $x+3$ est positif, donc $|x+3|=x+3$.

CORRIGÉ

Factorisation. D'après l'identité remarquable $(u-v)(u+v)=u^2-v^2$:

$$\begin{aligned} (x-3)(x+3) &= x^2-3^2 \\ &= x^2-9. \end{aligned}$$

Produit. D'après les propriétés de la valeur absolue, $|x^2-9| = |x-3| \times |x+3|$.

Majoration des facteurs. D'après la question 1, $x+3 \geq 5{,}9 > 0$, donc $|x+3| = x+3$ et $0 \leq |x+3| \leq 6{,}1$. Par hypothèse, $0 \leq |x-3| \leq 0{,}1$.

Conclusion. En multipliant membre à membre ces encadrements de réels positifs (ordre et multiplication) :

$$\begin{aligned} |x^2-9| &\leq 0{,}1 \times 6{,}1 \\ &= 0{,}61. \end{aligned}$$

3. 1 pts

En déduire un encadrement de x^2. Le comparer avec l'encadrement obtenu en élevant au carré les bornes de $2{,}9 \leq x \leq 3{,}1$.

INDICE

Début : $|x^2 - 9| \leq 0{,}61$ signifie que x^2 est à une distance au plus $0{,}61$ de 9. **Outil :** pour des réels positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres.

CORRIGÉ

Par la distance. L'inégalité $|x^2 - 9| \leq 0{,}61$ dit que x^2 est à une distance au plus $0{,}61$ de 9. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $9 - 0{,}61 \leq x^2 \leq 9 + 0{,}61$, soit :

$$8{,}39 \leq x^2 \leq 9{,}61.$$

Par les carrés. Les réels $2{,}9$, x et $3{,}1$ sont positifs : d'après la comparaison des carrés de réels positifs, $2{,}9^2 \leq x^2 \leq 3{,}1^2$, soit :

$$8{,}41 \leq x^2 \leq 9{,}61.$$

Comparaison. Les deux majorants sont égaux, et le second minorant est plus grand : $8{,}41 > 8{,}39$. Les amplitudes valent $9{,}61 - 8{,}39 = 1{,}22$ et $9{,}61 - 8{,}41 = 1{,}2$.

Conclusion. Le calcul direct par les carrés donne l'encadrement le plus fin, d'amplitude $1{,}2$ au lieu de $1{,}22$.

4. 1 pts

Soit maintenant r un réel tel que $0 < r \leq 1$, et x un réel tel que $|x - 3| \leq r$. Écrire $x + 3 = (x - 3) + 6$ et appliquer l'inégalité triangulaire pour obtenir $|x + 3| \leq 7$, puis en déduire que $|x^2 - 9| \leq 7r$.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire, appliquée à $x - 3$ et à 6. **Ensuite :** utilise $r \leq 1$, puis reprends le produit de la question 2.

CORRIGÉ

Inégalité triangulaire. On écrit $x + 3 = (x - 3) + 6$. D'après l'inégalité triangulaire, puis avec $|x - 3| \leq r$ (ordre et addition) :

$$\begin{aligned} |x + 3| &= |(x - 3) + 6| \\ &\leq |x - 3| + |6| \\ &\leq r + 6. \end{aligned}$$

Majoration par 7. Comme $r \leq 1$, en ajoutant 6 (ordre et addition) : $r + 6 \leq 7$. Par transitivité, $|x + 3| \leq 7$.

Produit. Comme à la question 2, $|x^2 - 9| = |x - 3| \times |x + 3|$, avec $0 \leq |x - 3| \leq r$ et $0 \leq |x + 3| \leq 7$. Le produit membre à membre de réels positifs (ordre et multiplication) donne :

$$|x^2 - 9| \leq 7r.$$

Conclusion. Lorsque $0 < r \leq 1$ et $|x - 3| \leq r$, on a $|x + 3| \leq 7$ et $|x^2 - 9| \leq 7r$.

5. 1 pts

En déduire que, si $|x-3| \leq 0{,}001$, alors x^2 est une valeur approchée de 9 à 10^{-2} près. La condition $|x-3| \leq 0{,}01$ suffit-elle aussi ? On pourra calculer $3{,}01^2$.

INDICE

Début : applique la question 4 avec $r = 0{,}001$. **Point délicat :** pour établir qu'une condition ne suffit pas, un seul exemple bien choisi suffit.

CORRIGÉ

Précision suffisante. Le réel $r = 0{,}001$ vérifie $0 < r \leq 1$. Si $|x-3| \leq 0{,}001$, la question 4 donne :

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| &\leq 7 \times 0{,}001 \\ &= 0{,}007. \end{aligned}$$

Comme $0{,}007 \leq 0{,}01$, la transitivité donne $|9 - x^2| = |x^2 - 9| \leq 10^{-2}$.

Contre-exemple. Le réel $x = 3{,}01$ vérifie $|x-3| = 0{,}01$, donc la condition $|x-3| \leq 0{,}01$. Pourtant $3{,}01^2 = 9{,}0601$, et :

$$\begin{aligned} |9{,}0601 - 9| &= 0{,}0601 \\ &> 0{,}01. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition, si $|x-3| \leq 0{,}001$, alors x^2 est une valeur approchée de 9 à 10^{-2} près. La condition $|x-3| \leq 0{,}01$, elle, ne suffit pas.