BURHAN

L'ordre dans $\mathbb{R}$: exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
L'ordre dans $\mathbb{R}$	Entraînement	7

Exercice 1

Comparer des expressions avec des racines et des inverses

1.

Comparer $\sqrt{5}-2$ et $\frac{1}{4}$.

INDICE

Début : ajoute 2 aux deux nombres ; tu compares alors $\sqrt{5}$ et $\frac{9}{4}$. **Ensuite :** ces deux nombres sont positifs.

CORRIGÉ

Ajout de 2. D'après la propriété ordre et addition, ajouter 2 ne change pas l'ordre : $\sqrt{5}-2$ et $\frac{1}{4}$ sont rangés comme $\sqrt{5}$ et $\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$.

Carrés. Les réels $\sqrt{5}$ et $\frac{9}{4}$ sont positifs. Leurs carrés valent $5=\frac{80}{16}$ et $\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$. Comme $\frac{80}{16}<\frac{81}{16}$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $\sqrt{5}<\frac{9}{4}$.

Conclusion. En retranchant 2 (ordre et addition), on obtient :

$$\sqrt{5}-2<\frac{1}{4}.$$

2.

Comparer $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

INDICE

Début : compare d'abord les dénominateurs, et cherche leur signe. **Point délicat :** le passage à l'inverse change le sens.

CORRIGÉ

Signe des dénominateurs. D'après la comparaison des racines carrées de réels positifs, $4<5$ donne $\sqrt{4}<\sqrt{5}$, soit $2<\sqrt{5}$. En retranchant 2, puis 1 (ordre et addition) : $\sqrt{5}-2>0$ et $\sqrt{5}-1>1>0$.

Ordre des dénominateurs. La différence $(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-2)$ vaut 1, qui est strictement positif : donc $\sqrt{5}-2<\sqrt{5}-1$.

Inverses. Les deux dénominateurs sont strictement positifs. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, le passage à l'inverse renverse leur ordre.

Conclusion. Le premier nombre est le plus grand :

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}>\frac{1}{\sqrt{5}-1}.$$

3.

Soit x un réel strictement positif. Comparer $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x+2}$.

INDICE

Outil : le signe de la différence. **Début :** réduis au dénominateur commun $(x+1)(x+2)$. **Point délicat :** développe $(x+1)^2$ avec une identité remarquable.

CORRIGÉ

Numérateur. D'après l'identité remarquable $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$:

$$\begin{aligned} &x(x+2) - (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Différence. Au dénominateur commun $(x+1)(x+2)$:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \\ &= \frac{x(x+2) - (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{-1}{(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $x > 0$, les facteurs $x+1$ et $x+2$ sont strictement positifs, donc leur produit aussi : la différence est strictement négative.

Conclusion. Pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}.$$

Contrôle avec $x = 1$: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2

Équations et inéquation avec une valeur absolue

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-6|=4$.

INDICE

Début : factorise $2x-6=2(x-3)$. **Outil :** la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x, $2x-6=2(x-3)$. D'après les propriétés de la valeur absolue, $|2(x-3)|=2\,|x-3|$. L'équation s'écrit donc $2\,|x-3|=4$, soit $|x-3|=2$.

Solutions. Les réels situés à la distance 2 de 3 sont $3-2=1$ et $3+2=5$.

Contrôle. $|2\times 1-6|=4$ et $|2\times 5-6|=4$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{1;5\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1|=|x-7|$. Interpréter le résultat sur la droite graduée.

INDICE

Outil : $|X|=|Y|$ équivaut à $X=Y$ ou $X=-Y$. **Point délicat :** dans chaque cas, simplifie avec soin et regarde ce qui reste.

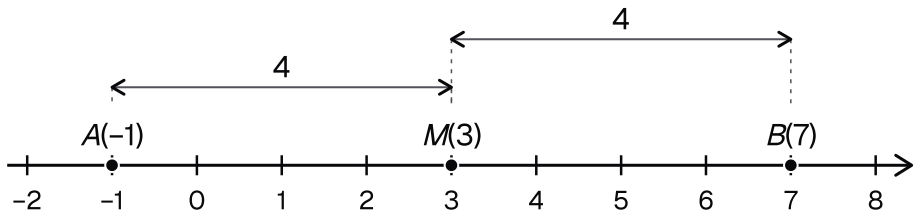
CORRIGÉ

D'après les propriétés de la valeur absolue, $|X|=|Y|$ équivaut à $X=Y$ ou $X=-Y$. On distingue deux cas.

- **Premier cas** : $x+1=x-7$. En retranchant x, on obtient $1=-7$, ce qui est impossible : ce cas ne fournit aucune solution.
- **Second cas** : $x+1=-(x-7)$, soit $x+1=-x+7$, donc $2x=6$ et $x=3$.

Interprétation. Le réel 3 est à la distance 4 de -1 et de 7 : c'est l'abscisse du milieu de ces deux points.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=\{3\}$.



Le réel 3 est à la distance 4 de -1 et à la distance 4 de 7 : c'est le milieu de ces deux points.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|3-x| \leq 1{,}5$.

INDICE

Début : $|3-x| = |x-3|$, car un réel et son opposé ont la même valeur absolue.

CORRIGÉ

Symétrie. D'après les propriétés de la valeur absolue, un réel et son opposé ont la même valeur absolue : $|3-x| = |-(x-3)| = |x-3|$.

Intervalle centré. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec le centre 3 et le rayon $1{,}5$:

$$\begin{aligned} &|x-3| \leq 1{,}5 \\ \Leftrightarrow\ &1{,}5 \leq x \leq 4{,}5. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S = [1{,}5\,;4{,}5]$.

Exercice 3

Le réglage d'une serre

Dans une serre, on cultive des tomates et des poivrons. On note T la température, en degrés. Les tomates demandent $|T-22| \leq 4$; les poivrons demandent $|T-27| < 3$.

1.

Écrire sous forme d'intervalles l'ensemble S_1 des températures qui conviennent aux tomates et l'ensemble S_2 de celles qui conviennent aux poivrons.

INDICE

Outil : la propriété valeur absolue et intervalle centré. **Point délicat :** pour les poivrons, l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré :

- pour les tomates, centre 22 et rayon 4, bornes comprises : $|T-22| \leq 4$ équivaut à $18 \leq T \leq 26$;
- pour les poivrons, centre 27 et rayon 3, bornes exclues : $|T-27| < 3$ équivaut à $24 < T < 30$.

Conclusion. Les températures qui conviennent forment les intervalles :

$$S_1 = [18;26]$$
$$S_2 =]24;30[$$

2.

Quelles températures conviennent aux deux cultures ? Lesquelles conviennent à au moins l'une d'elles ?

INDICE

Début : dessine S_1 et S_2 sur une même droite graduée. **Ensuite :** « aux deux » correspond à l'intersection.

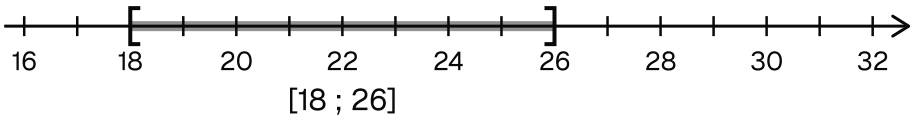
CORRIGÉ

Aux deux cultures. Il faut $18 \leq T \leq 26$ et $24 < T < 30$, c'est-à-dire $24 < T \leq 26$: c'est l'intersection.

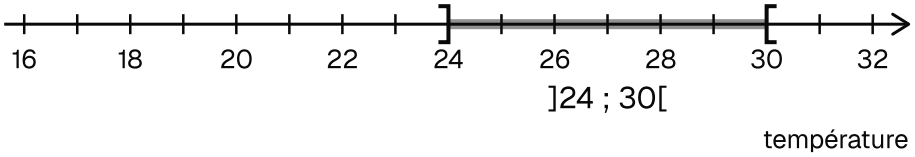
À au moins l'une. Il faut $18 \leq T \leq 26$ ou $24 < T < 30$. Les deux intervalles se chevauchent, donc cela revient à $18 \leq T < 30$: c'est la réunion.

Conclusion.

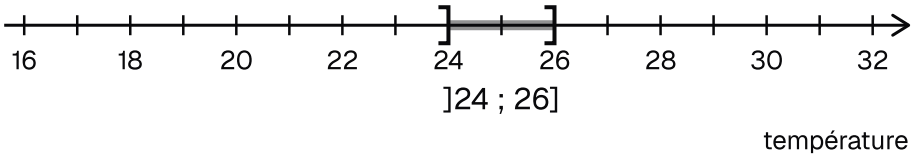
$$S_1 \cap S_2 =]24; 26]$$
$$S_1 \cup S_2 = [18; 30[$$



Les températures qui conviennent aux tomates : S1 = [18 ; 26].



Les températures qui conviennent aux poivrons : S2 =]24 ; 30[.



Les deux cultures supportent les températures de]24 ; 26], partie commune aux deux traits.

3.

Une alarme se déclenche lorsque $|T-22|>4$. Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : compare avec l'inéquation $|T-22|\leq 4$ de la question 1. **Point délicat :** pense à la distance qui dépasse 4, des deux côtés de 22.

CORRIGÉ

Contraire. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré (question 1) :

$$\begin{aligned}&|T-22|\leq 4\\&\Leftrightarrow T\in[18;26]\,.\end{aligned}$$

D'après la définition de la comparaison, une seule des relations $<$, $=$, $>$ est vraie entre deux réels. L'inégalité $|T-22|>4$ est donc exactement le contraire de $|T-22|\leq 4$:

$$\begin{aligned}&|T-22|>4\\&\Leftrightarrow T\notin[18;26]\,.\end{aligned}$$

Solutions. Les réels hors de $[18;26]$ sont ceux qui vérifient $T<18$ ou $T>26$.

Contrôle. Pour $T=30$, $|30-22|=8>4$: l'alarme sonne. Pour $T=20$, $|20-22|=2$: elle reste muette.

Conclusion. L'ensemble des solutions est :

$$]-\infty;18[\,\cup\,]26;+\infty[\,.$$

Exercice 4

Majorer une expression sur un intervalle

Dans tout l'exercice, x est un réel de l'intervalle $[-2;1]$. On pose $A = x^2 + 3x - 1$.

1.

Justifier que $|x| \leq 2$.

INDICE

Outil : la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec le centre 0. **Début :** cherche un intervalle $[-r;r]$ qui contient $[-2;1]$.

CORRIGÉ

On a $-2 \leq x \leq 1$ et $1 \leq 2$; par transitivité, $-2 \leq x \leq 2$.

D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec le centre 0 et le rayon 2, cette double inégalité équivaut à $|x - 0| \leq 2$.

Conclusion. Pour tout x de $[-2;1]$, $|x| \leq 2$.

2.

Majorer $|A|$ à l'aide de l'inégalité triangulaire.

INDICE

Outil : l'inégalité triangulaire, appliquée deux fois à la somme de trois termes. **Point délicat :** $x^2 = |x|^2$, et $|x|$ est positif.

CORRIGÉ

Inégalité triangulaire. Appliquée deux fois à la somme $x^2 + 3x + (-1)$, elle donne :

$$\begin{aligned} |A| &\leq |x^2| + |3x| \\ &\quad + |-1| \\ &= x^2 + 3\,|x| + 1, \end{aligned}$$

car $x^2 \geq 0$ et, d'après les propriétés de la valeur absolue, $|3x| = 3\,|x|$.

Chaque terme. Les réels $|x|$ et 2 sont positifs et $|x| \leq 2$: d'après la comparaison des carrés, $x^2 = |x|^2 \leq 4$. D'après la propriété ordre et multiplication, par le facteur $3 > 0$, $3\,|x| \leq 6$.

Somme. En additionnant membre à membre (ordre et addition) :

$$\begin{aligned} &x^2 + 3\,|x| + 1 \\ &\leq 4 + 6 + 1 = 11. \end{aligned}$$

Conclusion. Par transitivité, pour tout x de $[-2;1]$, $|A| \leq 11$.

3.

Calculer $|A|$ pour $x = -2$, $x = 0$ et $x = 1$. Le majorant obtenu est-il atteint en ces valeurs ?

INDICE

Début : remplace x dans A, puis prends la valeur absolue.

CORRIGÉ

On remplace x dans A, puis on prend la valeur absolue.

- Pour $x = -2$: $A = 4 - 6 - 1 = -3$, donc $|A| = 3$.
- Pour $x = 0$: $A = -1$, donc $|A| = 1$.
- Pour $x = 1$: $A = 1 + 3 - 1 = 3$, donc $|A| = 3$.

Conclusion. Ces trois valeurs sont inférieures à 11, et aucune ne l'atteint. Un majorant obtenu par l'inégalité triangulaire est sûr, mais il n'est pas forcément le plus petit possible.

Exercice 5

Puissance et résistance d'un circuit

Dans un circuit, on mesure la tension U aux bornes d'une lampe, en volts, et l'intensité I qui la traverse, en ampères. On obtient $11{,}5 \leq U \leq 12$ et $0{,}4 \leq I \leq 0{,}5$. La puissance de la lampe est $P = U \times I$, en watts, et sa résistance $R = \dfrac{U}{I}$, en ohms.

1.

Encadrer la puissance P.

INDICE

Outil : la multiplication membre à membre de réels positifs. **Point délicat :** vérifie d'abord le signe de toutes les bornes.

CORRIGÉ

Signe des bornes. Les bornes $11{,}5$, 12, $0{,}4$ et $0{,}5$ sont strictement positives ; les nombres U et I le sont donc aussi.

Produit. Ces encadrements portent sur des nombres strictement positifs : on peut les multiplier membre à membre (propriété ordre et multiplication). Les bornes valent $11{,}5 \times 0{,}4 = 4{,}6$ et $12 \times 0{,}5 = 6$.

Conclusion. La puissance de la lampe vérifie :

$$4{,}6 \leq P \leq 6.$$

2.

Encadrer $\dfrac{1}{I}$, puis la résistance R.

INDICE

Outil : le passage à l'inverse change le sens. **Ensuite :** $R = U \times \dfrac{1}{I}$ est un produit de deux nombres positifs.

CORRIGÉ

Inverse. Les réels $0{,}4$, I et $0{,}5$ sont strictement positifs. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, le passage à l'inverse change le sens et échange les bornes. Comme $\dfrac{1}{0{,}5} = 2$ et $\dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$:

$$2 \leq \frac{1}{I} \leq 2{,}5.$$

Produit. On écrit $R = U \times \dfrac{1}{I}$. Les encadrements de U et de $\dfrac{1}{I}$ portent sur des nombres strictement positifs ; le produit membre à membre donne les bornes $11{,}5 \times 2 = 23$ et $12 \times 2{,}5 = 30$.

Conclusion. La résistance de la lampe vérifie :

$$23 \leq R \leq 30.$$

3.

Un élève relève $U = 11{,}8$ et $I = 0{,}45$. Contrôler les deux encadrements avec ces valeurs, à la calculatrice.

INDICE

Début : calcule P et R pour ces valeurs. **Point délicat :** l'écran donne une valeur approchée de R.

CORRIGÉ

Puissance. On trouve :

$$P = 11{,}8 \times 0{,}45 = 5{,}31,$$

qui est bien compris entre $4{,}6$ et 6.

Résistance. Pour $R = \dfrac{11{,}8}{0{,}45}$, l'écran affiche $26{,}22222222$. L'écriture décimale de ce quotient ne s'arrête pas : l'écran n'en montre que les premiers chiffres et donne une valeur approchée de R.

Conclusion. Les deux valeurs respectent les encadrements : $4{,}6 \leq P \leq 6$ et $23 \leq R \leq 30$.

Exercice 6

Encadrer une somme et une différence de deux irrationnels

On admet les encadrements $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237$ et $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}142$.

1.

Encadrer $\sqrt{5} + \pi$, puis $\pi - \sqrt{5}$.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une somme et d'une différence. **Point délicat :** pour la différence, encadre d'abord $-\sqrt{5}$.

CORRIGÉ

Somme. D'après l'encadrement d'une somme, on additionne membre à membre. Les bornes valent $2{,}236 + 3{,}141 = 5{,}377$ et $2{,}237 + 3{,}142 = 5{,}379$:

$$5{,}377 \leq \sqrt{5} + \pi \leq 5{,}379.$$

Opposé. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par -1 change le sens : $-2{,}237 \leq -\sqrt{5} \leq -2{,}236$.

Différence. On additionne membre à membre cet encadrement et celui de π (ordre et addition). Les bornes valent $3{,}141 - 2{,}237 = 0{,}904$ et $3{,}142 - 2{,}236 = 0{,}906$:

$$0{,}904 \leq \pi - \sqrt{5} \leq 0{,}906.$$

Conclusion. La somme $\sqrt{5} + \pi$ est comprise entre $5{,}377$ et $5{,}379$, la différence $\pi - \sqrt{5}$ entre $0{,}904$ et $0{,}906$.

2.

Justifier que $2{,}236$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près, et $3{,}142$ une valeur approchée de π à 10^{-3} près. Préciser chaque fois s'il s'agit d'une valeur par défaut ou par excès.

INDICE

Outil : la définition d'une valeur approchée par défaut ou par excès. **Début :** $2{,}237 = 2{,}236 + 10^{-3}$.

CORRIGÉ

Pour $\sqrt{5}$. Comme $2{,}237 = 2{,}236 + 10^{-3}$, l'encadrement admis s'écrit $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}236 + 10^{-3}$.

Pour π. Comme $3{,}141 = 3{,}142 - 10^{-3}$, l'encadrement admis s'écrit $3{,}142 - 10^{-3} \leq \pi \leq 3{,}142$.

Conclusion. D'après la définition d'une valeur approchée, $2{,}236$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près par défaut, et $3{,}142$ une valeur approchée de π à 10^{-3} près par excès.

3.

En déduire une valeur approchée de $\sqrt{5}+\pi$ et une valeur approchée de $\pi-\sqrt{5}$, en donnant leur précision.

INDICE

Outil : la valeur approchée d'une somme et d'une différence ; les précisions s'additionnent.

CORRIGÉ

Calculs. On a $2{,}236+3{,}142=5{,}378$ et $3{,}142-2{,}236=0{,}906$.

Précision. D'après la valeur approchée d'une somme et d'une différence, les deux précisions s'additionnent : $10^{-3}+10^{-3}=2\times10^{-3}$.

Contrôle. Ces deux valeurs sont bien dans les encadrements de la question 1.

Conclusion. Le nombre $5{,}378$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}+\pi$, et $0{,}906$ une valeur approchée de $\pi-\sqrt{5}$, chacune à 2×10^{-3} près.

Exercice 7

La masse volumique de l'eau au laboratoire

En travaux pratiques de physique, on pèse un bécher vide : sa masse m_1, en grammes, vérifie $85{,}2 \leq m_1 \leq 85{,}4$. On y verse de l'eau et l'on pèse de nouveau : la masse m_2 vérifie $134{,}6 \leq m_2 \leq 134{,}8$. La masse d'eau est $m = m_2 - m_1$.

1.

Encadrer la masse d'eau m.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une différence. **Point délicat :** on ne soustrait pas les bornes une à une ; encadre $-m_1$.

CORRIGÉ

Opposé. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier $85{,}2 \leq m_1 \leq 85{,}4$ par -1 change le sens : $-85{,}4 \leq -m_1 \leq -85{,}2$.

Différence. Comme $m = m_2 + (-m_1)$, on additionne membre à membre cet encadrement et celui de m_2 (ordre et addition). Les bornes valent $134{,}6 - 85{,}4 = 49{,}2$ et $134{,}8 - 85{,}2 = 49{,}6$.

Conclusion. La masse d'eau vérifie :

$$49{,}2 \leq m \leq 49{,}6.$$

2.

Écrire cet encadrement sous la forme $|m - c| \leq r$. En déduire une valeur approchée de m et sa précision.

INDICE

Début : c est le milieu des deux bornes, r la moitié de l'amplitude.

CORRIGÉ

Centre et rayon.

$$c = \frac{49{,}2 + 49{,}6}{2} = 49{,}4$$
$$r = \frac{49{,}6 - 49{,}2}{2} = 0{,}2$$

Intervalle centré. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $49{,}2 \leq m \leq 49{,}6$ équivaut à :

$$|m - 49{,}4| \leq 0{,}2.$$

Conclusion. D'après la définition d'une valeur approchée, $49{,}4$ est une valeur approchée de m à $0{,}2$ près.

3.

Le volume d'eau lu sur le bécher vérifie $49 \leq V \leq 50$, en centimètres cubes. Encadrer la masse volumique $\rho = \dfrac{m}{V}$. La valeur attendue, 1 gramme par centimètre cube, est-elle compatible avec ces mesures ?

INDICE

Outil : l'encadrement de $\dfrac{1}{V}$, puis un produit de deux nombres positifs. **Point délicat :** le passage à l'inverse échange les bornes.

CORRIGÉ

Inverse. Les réels 49, V et 50 sont strictement positifs. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, le passage à l'inverse échange les bornes :

$$\frac{1}{50} \leq \frac{1}{V} \leq \frac{1}{49}.$$

Produit. On écrit $\rho = m \times \dfrac{1}{V}$. Les encadrements de m et de $\dfrac{1}{V}$ portent sur des nombres strictement positifs ; le produit membre à membre donne :

$$\frac{49{,}2}{50} \leq \rho \leq \frac{49{,}6}{49}.$$

Bornes. D'une part, $\dfrac{49{,}2}{50} = 0{,}984$. D'autre part, $49 \times 1{,}013 = 49{,}637$, donc $49{,}6 \leq 49 \times 1{,}013$. En multipliant par $\dfrac{1}{49} > 0$ (ordre et multiplication), on obtient $\dfrac{49{,}6}{49} \leq 1{,}013$. Par transitivité :

$$0{,}984 \leq \rho \leq 1{,}013.$$

Conclusion. La valeur 1 appartient à cet encadrement : elle est compatible avec les mesures.