BURHAN

L'ordre dans $\mathbb{R}$: exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
L'ordre dans $\mathbb{R}$	Application	8

Exercice 1

Quelle boisson contient le plus d'orange ?

Une boisson de 12 litres contient 7 litres de jus d'orange. Une autre boisson de 19 litres en contient 11 litres. La part d'orange vaut $\frac{7}{12}$ dans la première et $\frac{11}{19}$ dans la seconde.

1.

Calculer la différence $\frac{7}{12} - \frac{11}{19}$. En déduire la boisson la plus riche en orange.

INDICE

Outil : la comparaison de deux réels par le signe de leur différence. **Début :** le dénominateur commun est $12 \times 19 = 228$.

CORRIGÉ

Différence. Au dénominateur commun 228 :

$$\begin{aligned}&\frac{7}{12} - \frac{11}{19}\\ &= \frac{7 \times 19 - 11 \times 12}{228}\\ &= \frac{133 - 132}{228} = \frac{1}{228}.\end{aligned}$$

Signe. Le nombre $\frac{1}{228}$ est strictement positif.

Conclusion. D'après la définition de la comparaison, $\frac{7}{12} > \frac{11}{19}$: la première boisson est la plus riche en orange, de très peu.

2.

Comparer de la même façon $\frac{9}{8}$ et $\frac{10}{9}$.

INDICE

Outil : même technique. **Début :** le dénominateur commun est 72.

CORRIGÉ

Différence. Au dénominateur commun 72 :

$$\frac{9}{8} - \frac{10}{9} = \frac{81 - 80}{72} = \frac{1}{72}.$$

Conclusion. Cette différence est strictement positive. D'après la définition de la comparaison, $\frac{9}{8} > \frac{10}{9}$.

Exercice 2

Une journée d'hiver en degrés Fahrenheit

Pendant une journée d'hiver à Ifrane, la température t, en degrés Celsius, vérifie $-3 \leq t \leq 4$. La même température en degrés Fahrenheit est $F = 1{,}8\,t + 32$.

1.

Encadrer $1{,}8\,t$.

INDICE

Outil : la propriété ordre et multiplication. **Point délicat :** regarde le signe du facteur $1{,}8$.

CORRIGÉ

Le facteur $1{,}8$ est strictement positif. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier les trois membres de $-3 \leq t \leq 4$ par $1{,}8$ conserve le sens.

Les bornes deviennent $1{,}8 \times (-3) = -5{,}4$ et $1{,}8 \times 4 = 7{,}2$.

Conclusion. Le nombre $1{,}8\,t$ est encadré ainsi :

$$-5{,}4 \leq 1{,}8\,t \leq 7{,}2.$$

2.

En déduire un encadrement de F.

INDICE

Outil : la propriété ordre et addition : on ajoute 32 aux trois membres.

CORRIGÉ

D'après la propriété ordre et addition, ajouter 32 aux trois membres ne change pas le sens. Les bornes deviennent $-5{,}4 + 32 = 26{,}6$ et $7{,}2 + 32 = 39{,}2$.

Conclusion. Comme $F = 1{,}8\,t + 32$:

$$26{,}6 \leq F \leq 39{,}2.$$

Ce jour-là, la température reste entre $26{,}6$ et $39{,}2$ degrés Fahrenheit.

3.

Encadrer le nombre $-2t+1$.

INDICE

Début : encadre d'abord $-2t$. **Point délicat :** le facteur -2 est strictement négatif.

CORRIGÉ

Produit par -2. Le facteur -2 est strictement négatif : d'après la propriété ordre et multiplication, le sens change et les bornes s'échangent. Comme $-2\times 4=-8$ et $-2\times(-3)=6$:

$$-8\leq -2t\leq 6.$$

Ajout de 1. D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 1 aux trois membres :

$$-7\leq -2t+1\leq 7.$$

Conclusion. Le nombre $-2t+1$ est compris entre -7 et 7.

Exercice 3

Comparer des racines carrées par leurs carrés

1.

Comparer $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$.

INDICE

Outil : pour deux réels positifs, l'ordre est celui de leurs carrés. **Début :** $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5$.

CORRIGÉ

Signe. Les nombres $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$ sont positifs, comme produits de deux nombres positifs.

Carrés.

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5 = 45$$
$$\left(2\sqrt{11}\right)^2 = 4 \times 11 = 44$$

Conclusion. Comme $44 < 45$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $2\sqrt{11} < 3\sqrt{5}$.

2.

Comparer 9 et $4\sqrt{5}$.

INDICE

Outil : même technique ; vérifie d'abord le signe des deux nombres.

CORRIGÉ

Signe. Les nombres 9 et $4\sqrt{5}$ sont positifs.

Carrés.

$$9^2 = 81$$
$$\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$$

Conclusion. Comme $80 < 81$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $4\sqrt{5} < 9$.

Exercice 4

Deux plantes de montagne

Dans le Haut Atlas, une première plante pousse entre 800 m et $1\,900$ m d'altitude, bornes comprises. Une seconde plante ne pousse qu'au-dessus de $1\,500$ m, strictement. On note h l'altitude, en mètres.

1.

Écrire sous forme d'intervalles l'ensemble I des altitudes où pousse la première plante, et l'ensemble J de celles où pousse la seconde.

INDICE

Outil : la définition des intervalles. **Point délicat :** du côté de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert.

CORRIGÉ

Première plante. L'altitude vérifie $800 \leq h \leq 1\,900$, bornes comprises : les deux crochets sont fermés.

Seconde plante. L'altitude vérifie $h > 1\,500$: le crochet est ouvert en $1\,500$, et il l'est toujours du côté de $+\infty$.

Conclusion. Les deux ensembles s'écrivent :

$$I = [800; 1\,900]$$
$$J =]1\,500; +\infty[$$

2.

Écrire l'ensemble des altitudes où l'on peut trouver les deux plantes, puis celui où l'on trouve au moins l'une d'elles.

INDICE

Début : dessine I et J sur une même droite graduée. **Ensuite :** « les deux » correspond à l'intersection, « au moins l'une » à la réunion.

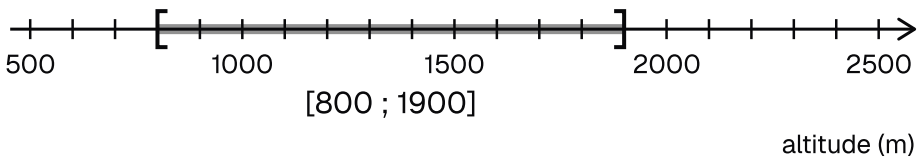
CORRIGÉ

Les deux plantes. Il faut à la fois $800 \leq h \leq 1\,900$ et $h > 1\,500$, c'est-à-dire $1\,500 < h \leq 1\,900$: c'est l'intersection de I et de J.

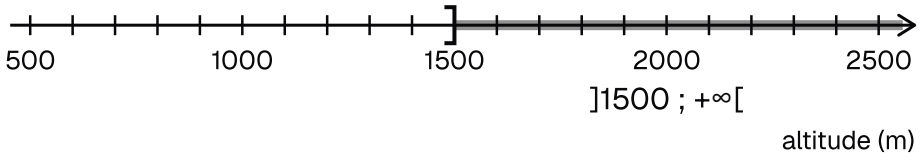
Au moins l'une. Une altitude de I ou de J vérifie $h \geq 800$. Inversement, une altitude $h \geq 800$ est dans I si $h \leq 1\,900$, et dans J sinon : c'est la réunion.

Conclusion. On trouve les deux plantes sur $I \cap J$, au moins l'une d'elles sur $I \cup J$, avec :

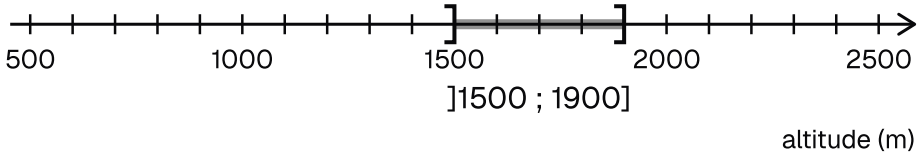
$$I \cap J =]1\,500; 1\,900]$$
$$I \cup J = [800; +\infty[$$



Les altitudes de la première plante : I = [800 ; 1 900].



Les altitudes de la seconde plante : J =]1 500 ; +∞[.



Là où les deux traits se recouvrent, on trouve les deux plantes :]1 500 ; 1 900].

3.

On pose $K =]-\infty ; -2[$ et $L = [-5 ; 3]$. Écrire $K \cap L$ et $K \cup L$.

INDICE

Outil : même lecture sur la droite graduée. **Point délicat :** la borne -2 n'appartient pas à K.

CORRIGÉ

Intersection. Un réel de $K \cap L$ vérifie $x < -2$ et $-5 \leq x \leq 3$, c'est-à-dire $-5 \leq x < -2$.

Réunion. Un réel de K ou de L vérifie $x \leq 3$. Inversement, un réel $x \leq 3$ est dans K si $x < -2$, et dans L si $-2 \leq x \leq 3$.

Conclusion.

$$K \cap L = [-5 ; -2[$$
$$K \cup L =]-\infty ; 3]$$

Exercice 5

Valeurs absolues et écart de températures

1.

Écrire sans valeur absolue : $|-12|$, $|3-\pi|$ et $|\sqrt{5}-2|$.

INDICE

Outil : la définition de la valeur absolue. **Début :** cherche d'abord le signe du nombre entre les barres. **Point délicat :** pour $\sqrt{5}$ et 2, compare leurs carrés.

CORRIGÉ

Pour chaque nombre, on cherche son signe, puis on applique la définition de la valeur absolue.

- **Le nombre -12.** On a $-12<0$, donc $|-12|=12$.
- **Le nombre $3-\pi$.** On sait que $\pi>3{,}14$ et $3{,}14>3$; par transitivité, $\pi>3$. En retranchant π (ordre et addition), $3-\pi<0$, donc $|3-\pi|=\pi-3$.
- **Le nombre $\sqrt{5}-2$.** Les réels $\sqrt{5}$ et 2 sont positifs, de carrés 5 et 4. Comme $4<5$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $2<\sqrt{5}$. Ainsi $\sqrt{5}-2>0$ et $|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$.

Conclusion. Sans valeur absolue, ces trois nombres s'écrivent 12, $\pi-3$ et $\sqrt{5}-2$.

2.

À Midelt, un matin d'hiver, le thermomètre indique -7 degrés ; l'après-midi, il indique 9 degrés. On place ces deux valeurs sur une droite graduée. Calculer l'écart entre ces températures comme une distance.

INDICE

Outil : la distance entre deux réels x et y est $|x-y|$.

CORRIGÉ

L'écart entre les deux températures est la distance entre 9 et -7 sur la droite graduée :

$$|9-(-7)|=|16|=16.$$

Conclusion. Du matin à l'après-midi, la température a varié de 16 degrés.

Exercice 6

La tolérance d'une résistance électrique

1.

Un fabricant garantit qu'une résistance marquée 220 ohms a une valeur R telle que $|R-220| \leq 11$. Entre quelles valeurs se trouve R ?

INDICE

Outil : la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec $a = 220$ et $r = 11$.

CORRIGÉ

D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, avec le centre 220 et le rayon 11 :

$$\begin{aligned} &|R-220| \leq 11 \\ \Leftrightarrow\ &209 \leq R \leq 231, \end{aligned}$$

car $220-11=209$ et $220+11=231$.

Conclusion. $R \in [209;231]$: la résistance vaut entre 209 et 231 ohms, bornes comprises.

2.

Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x+2|<4$.

INDICE

Début : écris $x+2=x-(-2)$: c'est la distance de x à -2. **Point délicat :** l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

Distance. On écrit $x+2=x-(-2)$: le nombre $|x+2|$ est la distance de x à -2.

Intervalle. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, dans le cas d'une inégalité stricte, le centre est -2, le rayon 4, et les bornes $-2-4=-6$ et $-2+4=2$ sont exclues.

Conclusion. L'inégalité $|x+2|<4$ équivaut à $x \in \,]-6;2[$.

3.

Écrire la condition $x \in [-1;9]$ à l'aide d'une valeur absolue.

INDICE

Début : le centre est le milieu des deux bornes. **Ensuite :** le rayon est la moitié de la longueur de l'intervalle.

CORRIGÉ

Centre et rayon. Le centre c et le rayon r de l'intervalle valent :

$$\begin{aligned} c &= \frac{-1+9}{2} = 4 \\ r &= \frac{9-(-1)}{2} = 5 \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré :

$$\begin{aligned} &x \in [-1;9] \\ \Leftrightarrow\ &|x-4| \leq 5. \end{aligned}$$

Exercice 7

La masse d'un colis

Un colis est formé d'un carton et de son contenu. La masse c du carton, en kilogrammes, vérifie $0{,}4 \leq c \leq 0{,}5$. La masse m du contenu vérifie $3{,}2 \leq m \leq 3{,}6$.

1.

Encadrer la masse totale $m + c$ du colis.

INDICE

Outil : l'encadrement d'une somme : on additionne membre à membre.

CORRIGÉ

D'après l'encadrement d'une somme, on additionne membre à membre les encadrements de m et de c. Les bornes valent $3{,}2 + 0{,}4 = 3{,}6$ et $3{,}6 + 0{,}5 = 4{,}1$.

Conclusion. La masse totale du colis vérifie :

$$3{,}6 \leq m + c \leq 4{,}1.$$

2.

Encadrer la différence $m - c$, qui indique de combien le contenu est plus lourd que le carton.

INDICE

Début : encadre d'abord $-c$. **Point délicat :** multiplier par -1 change le sens et échange les bornes.

CORRIGÉ

Opposé. Le facteur -1 est strictement négatif : d'après la propriété ordre et multiplication, multiplier $0{,}4 \leq c \leq 0{,}5$ par -1 change le sens et échange les bornes :

$$-0{,}5 \leq -c \leq -0{,}4.$$

Somme. Comme $m - c = m + (-c)$, on additionne membre à membre cet encadrement et celui de m (ordre et addition). Les bornes valent $3{,}2 - 0{,}5 = 2{,}7$ et $3{,}6 - 0{,}4 = 3{,}2$.

Conclusion. L'excès de masse du contenu sur le carton vérifie :

$$2{,}7 \leq m - c \leq 3{,}2.$$

3.

Comparer l'amplitude de chacun des deux encadrements obtenus avec celles des encadrements de m et de c.

INDICE

Outil : l'amplitude d'un encadrement $a \leq x \leq b$ est $b - a$.

CORRIGÉ

Amplitudes de départ. On a $3{,}6 - 3{,}2 = 0{,}4$ pour m, et $0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$ pour c.

Amplitudes obtenues. On a $4{,}1 - 3{,}6 = 0{,}5$ pour $m + c$, et $3{,}2 - 2{,}7 = 0{,}5$ pour $m - c$.

Conclusion. Les deux encadrements obtenus ont la même amplitude, $0{,}5$, égale à la somme $0{,}4 + 0{,}1$ des amplitudes de départ : une somme comme une différence cumule les imprécisions.

Exercice 8

Approximations décimales d'un quotient et d'une racine

1.

Donner les approximations décimales de $\dfrac{17}{6}$ par défaut et par excès, à 10^{-1} près puis à 10^{-2} près.

INDICE

Outil : la définition des approximations décimales. **Début :** pour justifier $2{,}8 \leq \dfrac{17}{6}$, compare $6 \times 2{,}8$ et 17.

CORRIGÉ

À 10^{-1} près. On a $6 \times 2{,}8 = 16{,}8$ et $6 \times 2{,}9 = 17{,}4$. Comme $16{,}8 \leq 17 < 17{,}4$, la multiplication par $\dfrac{1}{6} > 0$ conserve le sens (ordre et multiplication) :

$$2{,}8 \leq \frac{17}{6} < 2{,}9.$$

À 10^{-2} près. On a $6 \times 2{,}83 = 16{,}98$ et $6 \times 2{,}84 = 17{,}04$. De même :

$$2{,}83 \leq \frac{17}{6} < 2{,}84.$$

Conclusion. D'après la définition des approximations décimales, $\dfrac{17}{6}$ a pour approximations par défaut $2{,}8$ puis $2{,}83$, et par excès $2{,}9$ puis $2{,}84$.

2.

Calculer $2{,}23^2$ et $2{,}24^2$. En déduire les approximations décimales de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près, sans utiliser la touche racine.

INDICE

Outil : pour des réels positifs, l'ordre des carrés est celui des nombres. **Point délicat :** 5 est le carré de $\sqrt{5}$.

CORRIGÉ

Carrés.

$$2{,}23^2 = 4{,}9729$$
$$2{,}24^2 = 5{,}0176$$

Donc $2{,}23^2 < 5 < 2{,}24^2$.

Comparaison. Les réels $2{,}23$, $\sqrt{5}$ et $2{,}24$ sont positifs, et $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$. La comparaison des carrés de réels positifs donne :

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24.$$

Conclusion. À 10^{-2} près, l'approximation décimale de $\sqrt{5}$ par défaut est $2{,}23$, et celle par excès $2{,}24$.

3.

Sachant que $2{,}236^2 = 4{,}999696$ et $2{,}237^2 = 5{,}004169$, dire si $2{,}236$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près, et de quel type.

INDICE

Outil : la définition d'une valeur approchée par défaut. **Début :** encadre $\sqrt{5}$ comme à la question 2.

CORRIGÉ

Encadrement. Comme à la question 2, $4{,}999696 < 5 < 5{,}004169$ et la comparaison des carrés de réels positifs donnent :

$$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237.$$

Précision. Comme $2{,}237 = 2{,}236 + 10^{-3}$, on a $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}236 + 10^{-3}$.

Conclusion. D'après la définition, $2{,}236$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près, par défaut.