BURHAN

L'ordre dans $\mathbb{R}$

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ordre-dans-r/cours

Chapitre	Semestre
L'ordre dans $\mathbb{R}$	Semestre 1

Lequel est le plus grand ?

Une calculatrice qui affiche dix chiffres après la virgule donne le même résultat pour les deux nombres suivants :

$$A = \frac{299\,999}{300\,000}$$
$$B = \frac{300\,000}{300\,001}$$

Pour chacun, l'écran montre $0{,}9999966667$.

Ces deux nombres sont-ils égaux ? Sinon, lequel est le plus grand ? La calculatrice ne peut pas trancher.

Devine : Une prédiction

Compare $A = \frac{299\,999}{300\,000}$ et $B = \frac{300\,000}{300\,001}$. Que peux-tu affirmer ?

A. A est le plus grand.

Faux.

La différence $B - A$ est strictement positive : c'est l'inverse.

B. Ils sont égaux.

Faux.

L'affichage est le même, mais les produits en croix diffèrent.

C. B est le plus grand.

Juste.

Juste : $B - A$ est strictement positif, même s'il est minuscule.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

La calculatrice ne tranche pas, mais un calcul exact le peut.

Correction

On étudie le signe de la différence. Pour alléger l'écriture, posons $n = 300\,000$: alors $A = \frac{n-1}{n}$ et $B = \frac{n}{n+1}$.

Au dénominateur commun $n(n+1)$:

$$B - A = \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)}.$$

En effet, d'après une identité remarquable, $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$, c'est-à-dire $299\,999 \times 300\,001 = 300\,000^2 - 1$. Le numérateur vaut donc 1.

La différence est strictement positive : $B > A$. L'écart est de l'ordre de 10^{-11} : il échappe à l'écran.

Ce calcul exact repose sur une idée : **comparer, c'est étudier le signe d'une différence**.

Dans ce chapitre, tu apprends à comparer des nombres et à transformer des inégalités.

Tu décris des ensembles de réels par des intervalles, et tu mesures des distances avec la valeur absolue.

Tu apprends enfin à encadrer un résultat et à lire un affichage de calculatrice.

Comparer deux réels ; ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Comparer par la différence

Rappel du collège : un réel est positif, négatif ou nul. La somme de deux réels positifs est positive.

Le produit de deux réels de même signe est positif ; celui de deux réels de signes contraires est négatif.

Dans ce chapitre, « positif » veut dire « positif ou nul ».

Devine : Deux fractions

Sans calculatrice, lequel des nombres $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$ est le plus grand ?

A. Ils sont égaux.

Faux.

Les produits en croix diffèrent : $5 \times 10 = 50$ et $7 \times 7 = 49$.

B. Le nombre $\frac{5}{7}$.

Juste.

Juste : la différence $\frac{5}{7} - \frac{7}{10}$ est strictement positive.

C. Le nombre $\frac{7}{10}$.

Faux.

Le numérateur 7 dépasse 5, mais le dénominateur aussi : cette lecture ne suffit pas.

D. On ne peut pas savoir.

Faux.

Le signe de la différence se calcule à la main.

Correction

On calcule la différence au dénominateur commun 70 :

$$\frac{5}{7} - \frac{7}{10} = \frac{50 - 49}{70} = \frac{1}{70}.$$

Elle est strictement positive, donc $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$.

Comparer, c'est étudier le signe d'une différence : c'est la définition qui suit.

Définition : Comparaison de deux réels

Soit a et b deux nombres réels. On dit que a est **inférieur ou égal** à b, et on écrit $a \leq b$, lorsque la différence $b - a$ est positive ou nulle :

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0.$$

On écrit $a < b$ (« a est strictement inférieur à b ») lorsque $b - a > 0$. Les écritures $b \geq a$ et $b > a$ ont le même sens que $a \leq b$ et $a < b$.

Deux réels a et b vérifient toujours une, et une seule, des trois relations $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Exemple : comparer par la différence

Deux fractions. Compare $\frac{11}{8}$ et $\frac{18}{13}$. Au dénominateur commun 104 :

$$\frac{18}{13} - \frac{11}{8} = \frac{144 - 143}{104} = \frac{1}{104}.$$

Le résultat est strictement positif : la définition de la comparaison donne $\frac{11}{8} < \frac{18}{13}$.

Une expression. Soit a un réel ; compare $a^2 + 1$ et $2a$. D'après une identité remarquable, la différence vaut :

$$a^2 + 1 - 2a = (a - 1)^2.$$

Un carré est positif ou nul : donc $a^2 + 1 \geq 2a$, pour tout réel a. L'égalité n'a lieu que pour $a = 1$.

Ordre et addition

En clair. Sur la droite graduée, ajouter 3 à deux nombres les déplace tous deux de 3 unités vers la droite. Leur ordre ne change pas : $-2 < 1$, et $-2 + 3 < 1 + 3$, c'est-à-dire $1 < 4$.

Pourquoi est-ce vrai ? La différence ne bouge pas :

$$(1 + 3) - (-2 + 3) = 1 - (-2).$$

Tout se ramène au signe d'une différence.

Propriété : Ordre et addition

Soit a, b, c et d des réels.

- **Transitivité** : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
- **Ajouter un même réel** : si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$. On peut donc ajouter ou retrancher un même réel aux deux membres d'une inégalité sans changer son sens.
- **Additionner membre à membre** : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Ces trois propriétés restent vraies lorsqu'on remplace partout $\leq$ par $<$.

Démonstration

Étape 1. D'après la définition de la comparaison, il suffit chaque fois d'étudier le signe d'une différence.

Étape 2. Transitivité : $c - a = (c - b) + (b - a)$. Les deux termes sont positifs ou nuls, donc leur somme aussi : $a \leq c$.

Étape 3. Ajouter c : $(b + c) - (a + c) = b - a$, qui est positif ou nul, donc $a + c \leq b + c$.

Étape 4. Membre à membre : $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$ est une somme de deux réels positifs ou nuls, donc elle est positive ou nulle : $a + c \leq b + d$.

Étape 5. Avec $<$ partout, les différences sont strictement positives, et une somme de réels strictement positifs est strictement positive.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque fois, on **écrit la différence** des deux membres, puis on la découpe en différences dont on connaît le signe.

Pour l'addition membre à membre :

$$\begin{aligned}(b + d) - (a + c) \\ = (b - a) + (d - c).\end{aligned}$$

C'est une somme de deux réels positifs ou nuls. Une somme de réels positifs ou nuls est positive ou nulle (collège) : cela conclut.

Vérifie : La transitivité

Dans la preuve de la transitivité, comment découpe-t-on la différence $c - a$?

A. $c - a = (c - b) + (b - a)$

Juste.

Juste : deux différences positives ou nulles, par hypothèse.

B. $c - a = (c - b) - (b - a)$

Faux.
Développe : on obtient $c - 2b + a$, pas $c - a$.

C. $c - a = (c - b) \times (b - a)$
Faux.
Un produit ne redonne pas $c - a$: avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$, il vaut 2 au lieu de 3.

D. $c - a = (b - c) + (a - b)$
Faux.
Ce découpage vaut $a - c$: le signe est inversé.

Correction
On insère b :

$$c - a = (c - b) + (b - a).$$

Par hypothèse, $b \leq c$ et $a \leq b$: les deux termes sont positifs ou nuls.

Leur somme l'est aussi, donc $a \leq c$.

Exemple : ajouter, additionner, et une précaution

Soit x et y deux réels.

- Si $x \leq 3$, alors $x + 5 \leq 8$: d'après la propriété ordre et addition, on ajoute 5 aux deux membres.
- Si $x \geq 2$ et $y \geq -1$, alors $x + y \geq 1$, par addition membre à membre.

L'hypothèse compte. La transitivité exige deux inégalités de même sens. Avec $1 \leq 5$ et $5 \geq 3$, on a $1 < 3$; avec $4 \leq 5$ et $5 \geq 3$, on a $4 > 3$. On ne peut donc rien conclure.

Ordre et multiplication

En clair. Pars de $2 < 5$. En multipliant par 3, tu obtiens $6 < 15$: l'ordre est conservé.

En multipliant par -1, tu obtiens -2 et -5. Or -5 est à gauche de -2 sur la droite graduée : $-2 > -5$, l'ordre est inversé.

Pourquoi est-ce vrai ? On factorise la différence $bc - ac$. La règle des signes donne alors son signe.

Propriété : Ordre et multiplication

Soit a, b, c et d des réels.

- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$: multiplier par un réel **strictement positif** conserve le sens de l'inégalité.
- Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $ac \geq bc$: multiplier par un réel **strictement négatif** change le sens de l'inégalité.

- **Multiplier membre à membre des réels positifs** : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Les deux premiers points restent vrais avec des inégalités strictes : si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$; si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.

Démonstration

Étape 1. On a $bc - ac = (b - a)\,c$, et $b - a \geq 0$ par hypothèse.

Étape 2. Si $c > 0$, le produit $(b - a)\,c$ est positif ou nul (règle des signes), donc $ac \leq bc$. Si $c < 0$, ce produit est négatif ou nul, donc $bc \leq ac$, c'est-à-dire $ac \geq bc$.

Étape 3. Membre à membre : comme $c \geq 0$ et $b - a \geq 0$, on a $bc - ac = (b - a)\,c \geq 0$, donc $ac \leq bc$. Comme $b \geq a \geq 0$, on a $b \geq 0$ (transitivité) ; avec $d - c \geq 0$, on obtient $bd - bc = b\,(d - c) \geq 0$, donc $bc \leq bd$.

Étape 4. Par transitivité (ordre et addition), $ac \leq bd$.

Étape 5. Si $a < b$, alors $b - a > 0$, et $(b - a)\,c$ est strictement positif si $c > 0$, strictement négatif si $c < 0$ (règle des signes) : d'où les versions strictes.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **factoriser la différence**,

$$bc - ac = (b - a)\,c.$$

Le facteur $b - a$ est positif ou nul. Le signe du produit dépend donc de celui de c, par la règle des signes.

Si $a < b$, ce facteur est strictement positif : d'où les versions strictes.

Pour le produit membre à membre, la preuve fait deux pas de ce type, puis conclut par transitivité.

Vérifie : Un produit intermédiaire

Dans la preuve du produit membre à membre, quel réel sert d'intermédiaire entre ac et bd ?

A. Le réel $ad + bc$.

Faux.
La preuve ne fait que des produits de deux réels.

B. Le réel $a + c$.

Faux.
La preuve compare des produits, jamais des sommes.

C. Le réel $bd - ac$.

Faux.
C'est la différence finale, pas un intermédiaire.

D. Le réel bc.

Juste.

Juste : $ac \leq bc$, puis $bc \leq bd$.

Correction

La preuve compare d'abord ac et bc : $ac \leq bc$, car $c \geq 0$.

Elle compare ensuite bc et bd : $bc \leq bd$, car $b \geq 0$.

La transitivité donne $ac \leq bd$. Chaque pas multiplie par un réel positif : c'est pourquoi les quatre réels doivent être positifs.

Exemple : multiplier par un négatif, puis un contre-exemple

Multiplier par un négatif. Soit x un réel tel que $-1 \leq x \leq 4$. Le facteur -3 est strictement négatif : la propriété ordre et multiplication renverse donc les deux inégalités :

$$3 \geq -3x \geq -12,$$

c'est-à-dire $-12 \leq -3x \leq 3$.

L'hypothèse compte. Le produit membre à membre exige des réels positifs. On a $-3 \leq 1$ et $-2 \leq 1$. Pourtant, $(-3) \times (-2) = 6$ dépasse $1 \times 1 = 1$.

Un piège, puis à toi

Attention : diviser par un nombre négatif

✗ « $-5x \leq 10$, donc $x \leq -2$. »

✓ Diviser par -5, c'est multiplier par $-\dfrac{1}{5}$, strictement négatif : le sens change. On obtient $x \geq -2$.

Contrôle avec $x = 0$: $-5 \times 0 = 0 \leq 10$ est vrai, et $0 \geq -2$ aussi.

Avant de multiplier ou de diviser, regarde le signe du facteur.

À toi : Transformer une inégalité

Soit x un réel tel que $x \leq -1$. Compare $3x + 2$ et -1, puis $1 - 2x$ et 3. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pars de $x \leq -1$ et applique les propriétés de l'ordre l'une après l'autre.

Indice 2

Multiplie d'abord par 3, puis ajoute 2.

Indice 3

Point délicat : pour $1-2x$, tu multiplies par -2, qui est strictement négatif.

Réponse

Première expression. D'après la propriété ordre et multiplication, multiplier par 3, strictement positif, conserve le sens : $3x \leq -3$. D'après la propriété ordre et addition, on ajoute 2 : $3x+2 \leq -1$.

Seconde expression. Multiplier par -2, strictement négatif, change le sens : $-2x \geq 2$. On ajoute 1 : $1-2x \geq 3$.

Contrôle avec $x=-1$: $3x+2=-1$ et $1-2x=3$.

Conclusion. Pour tout réel x tel que $x \leq -1$, on a $3x+2 \leq -1$ et $1-2x \geq 3$.

Ordre dans $\mathbb{R}$: carrés, racines carrées et inverses

Des carrés et des aires

En clair. Un carré de côté 3 cm a une aire de 9 cm². Un carré de côté 5 cm a une aire de 25 cm².

Plus le côté est grand, plus l'aire est grande. Mais un côté est toujours positif : avec des nombres négatifs, les carrés se comportent autrement.

Devine : Le carré conserve-t-il l'ordre ?

Soit a et b deux réels tels que $a<b$. A-t-on toujours $a^2<b^2$?

A. Oui, pour tous les réels a et b.
Faux.
Avec $a=-4$ et $b=3$: $a<b$, mais $a^2=16$ dépasse $b^2=9$.

B. Oui, lorsque a et b sont négatifs.
Faux.
Avec $a=-4$ et $b=-3$: $a<b$, mais $16>9$. L'ordre s'inverse.

C. Oui, lorsque a et b sont positifs.
Juste.
Juste : c'est le cas des côtés de carrés.

D. Non, jamais.
Faux.
Avec $a=3$ et $b=5$, on a bien $9<25$.

Correction

Pour des réels positifs, oui : c'est le cas des côtés 3 et 5.

Sans hypothèse de signe, non : $-4<3$, mais $(-4)^2=16$ et $3^2=9$.

Pour des réels négatifs, l'ordre des carrés s'inverse même : $-4<-3$ et $16>9$.

Carrés, racines carrées, inverses

Pourquoi est-ce vrai ? Rappel du chapitre sur les ensembles de nombres : pour tous réels a et b,

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Quand a et b sont positifs, le facteur $b+a$ est positif. Le signe de $b^2 - a^2$ est alors celui de $b-a$.

Pour les inverses, on réduit $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ au même dénominateur.

Propriété : Carrés, racines carrées et inverses

Soit a et b deux réels.

- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$, et $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Si a et b sont **non nuls et de même signe**, alors $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$: le passage à l'inverse change le sens de l'inégalité.

Ces équivalences restent vraies avec des inégalités strictes ($<$ et $>$).

Démonstration

Étape 1. Carrés : $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Si $a = b = 0$, les deux inégalités sont vraies. Sinon, $b + a > 0$, car $a \geq 0$, $b \geq 0$ et ils ne sont pas tous deux nuls. Alors $b^2 - a^2$ a le signe de $b - a$, d'où $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.

Étape 2. Racines carrées : on applique l'étape 1 aux réels positifs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, dont les carrés sont a et b. On obtient $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

Étape 3. Inverses : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Comme a et b sont non nuls et de même signe, $ab > 0$: la différence $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ a le signe de $b - a$. Donc $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Étape 4. Aux étapes 1 et 3, la différence étudiée est strictement positive exactement quand $b - a$ l'est ; si $a = b = 0$, les deux inégalités strictes sont fausses. Les équivalences valent donc aussi avec $<$ et $>$. Pour les racines carrées, on applique de même l'étape 1, version stricte, aux réels positifs $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Comparer des carrés, c'est **factoriser** $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Pour des réels positifs, le second facteur est positif.

Les racines carrées se ramènent aux carrés, car $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs.

Pour les inverses, le dénominateur commun ab est strictement positif quand a et b ont le même signe.

Les versions strictes viennent de même : la différence est strictement positive exactement quand $b-a$ l'est.

Vérifie : Le geste de la preuve

Dans la preuve, quelle égalité permet de lire le signe de b^2-a^2 pour comparer a^2 et b^2 ?

A. $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$

Juste.

Juste : c'est l'identité remarquable, et le facteur $b+a$ est positif.

B. $b^2-a^2=(b-a)^2$

Faux.

Fausse : $(b-a)^2$ vaut $b^2-2ab+a^2$.

C. $b^2+a^2=(b+a)^2$

Faux.

Fausse : $(b+a)^2$ vaut $b^2+2ab+a^2$.

D. $b^2-a^2=(b-a)+(b+a)$

Faux.

Fausse : cette somme vaut $2b$.

Correction

On étudie le signe de b^2-a^2. L'identité remarquable le factorise :

$$b^2-a^2=(b-a)(b+a).$$

Si a et b sont positifs, $b+a$ l'est aussi (strictement, sauf pour $a=b=0$) : le signe est celui de $b-a$.

Exemple : des inverses, puis un contre-exemple

Des inverses. Les réels $2{,}5$ et $2{,}6$ sont strictement positifs, et $2{,}5<2{,}6$. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses :

$$\frac{1}{2{,}5}>\frac{1}{2{,}6}.$$

Contrôle : $\frac{1}{2{,}5}=0{,}4$, et la calculatrice affiche $0{,}3846153846$ pour $\frac{1}{2{,}6}$.

L'hypothèse compte. Pour des réels de signes contraires, le passage à l'inverse ne change pas le sens : $-2<4$ et $-\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$.

La méthode pour comparer

Méthode : comparer deux nombres

1. **Calcule** la différence $A - B$. Transforme-la (même dénominateur, factorisation) jusqu'à connaître son signe.
2. **Conclus** : si $A - B \geq 0$, alors $A \geq B$; si $A - B \leq 0$, alors $A \leq B$.
3. **Deux nombres positifs**, avec des racines carrées par exemple : compare plutôt leurs carrés.
4. **Deux nombres non nuls de même signe** : tu peux comparer leurs inverses, en changeant le sens.

Exemple : des nombres avec des racines carrées

Premier exemple. Compare $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$. Ces réels sont positifs, et leurs carrés valent :

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12,$$
$$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18.$$

Comme $12 < 18$, la propriété carrés, racines carrées et inverses donne $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Second exemple. Compare $\sqrt{3} + 1$ et $\sqrt{7}$. Ces réels sont positifs. Leurs carrés valent $4 + 2\sqrt{3}$ et 7.

Or $2\sqrt{3} > 3$, car leurs carrés vérifient $12 > 9$. Donc $4 + 2\sqrt{3} > 7$, puis, d'après la comparaison des carrés de réels positifs, $\sqrt{3} + 1 > \sqrt{7}$.

Exemple : un nombre, son carré, sa racine carrée

Prenons $a = 0{,}25$: $a^2 = 0{,}0625$ et $\sqrt{a} = 0{,}5$. Donc $0{,}0625 < 0{,}25 < 0{,}5$, soit $a^2 < a < \sqrt{a}$.

Cas $0 < a < 1$. La différence $a^2 - a = a(a-1)$ est le produit d'un réel strictement positif par un réel strictement négatif : $a^2 < a$.

On a aussi $0 < \sqrt{a} < 1$, en comparant les racines carrées. Le même calcul avec $\sqrt{a}$, dont le carré est a, donne $a < \sqrt{a}$.

Cas $a > 1$. Le produit $a(a-1)$ est strictement positif : $a < a^2$. De même, $\sqrt{a} > 1$ donne $\sqrt{a} < a$.

L'ordre s'inverse : $\sqrt{a} < a < a^2$. Pour $a = 4$: $2 < 4 < 16$.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : un encadrement qui contient zéro

✗ « $-3 \leq x \leq 4$, donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$. »

✓ La propriété exige des réels non nuls de même signe. Ici, x peut valoir 0, et $\frac{1}{x}$ n'existe pas.

La conclusion est d'ailleurs absurde : $\frac{1}{4}$ est plus grand que $-\frac{1}{3}$.

Pour $1 \leq x \leq 4$, en revanche, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.

Vérifie : Passer à l'inverse

Soit x un réel tel que $4 \leq x \leq 10$. Quel encadrement de $\frac{1}{x}$ est juste ?

A. $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{10}$

Faux.

Absurde : $\frac{1}{4}$ dépasse $\frac{1}{10}$. Le passage à l'inverse change le sens.

B. $-10 \leq \frac{1}{x} \leq -4$

Faux.

Ce sont les opposés, pas les inverses.

C. $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{4}$

Faux.

C'est l'inverse : $\frac{1}{x}$ est au plus égal à $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$

Juste.

Juste : les bornes s'échangent.

Correction

Les réels 4, x et 10 sont tous strictement positifs : on peut passer aux inverses en renversant les inégalités (propriété carrés, racines carrées et inverses) :

$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4},$$

soit $0{,}1 \leq \frac{1}{x} \leq 0{,}25$.

À toi : Deux comparaisons

Compare $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les deux nombres sont positifs : compare leurs carrés.

Indice 2

On a $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7$ et $(3\sqrt{3})^2 = 9 \times 3$.

Indice 3

Point délicat : pour les inverses, le sens change.

Réponse

Les deux nombres. Les réels $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$ sont positifs. Leurs carrés valent 28 et 27, et $27 < 28$. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, $3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$.

Leurs inverses. Ces deux réels sont non nuls et de même signe. Le passage à l'inverse change le sens : $\dfrac{1}{2\sqrt{7}} < \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Conclusion. On a $3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{7}} < \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une comparaison**

En devoir, chaque comparaison annonce le signe des nombres, puis nomme la propriété. Par exemple :

« Les réels $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ sont positifs. Leurs carrés valent $9+2\sqrt{14}$ et $9+2\sqrt{18}$. Comme $14 < 18$, on a $\sqrt{14} < \sqrt{18}$. Donc $9+2\sqrt{14} < 9+2\sqrt{18}$. D'après la propriété carrés, racines carrées et inverses, $\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$. »

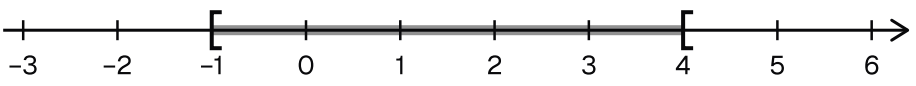
Sans l'annonce du signe, la comparaison des carrés n'est pas justifiée.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Une portion de la droite

En clair. La condition « $x \geq -1$ et $x < 4$ » décrit une portion de la droite graduée : les points situés entre les abscisses -1 et 4, le point -1 compris, le point 4 exclu.

Fais le dessin sur ton cahier : un trait épais de -1 à 4. En -1, borne comprise, le crochet est tourné vers l'intérieur ; en 4, borne exclue, il est tourné vers l'extérieur.



La portion de droite décrite par la condition : de -1, compris, jusqu'à 4, exclu.

Devine : Dans la portion ou non ?

Lequel de ces réels vérifie la condition $-1 \leq x < 4$?

A. Le réel $-1{,}5$.
Faux.
Il est à gauche de -1 : $-1 \leq -1{,}5$ est faux.

B. Le réel 4.
Faux.

L'inégalité $x < 4$ est stricte : 4 est exclu.

C. Le réel -1.

Juste.

Juste : l'inégalité $-1 \leq x$ est large.

D. Le réel $4{,}2$.

Faux.

Il est à droite de 4.

Correction

Pour $x = -1$, on a bien $-1 \leq -1$ et $-1 < 4$. En revanche, pour $x = 4$, l'inégalité $4 < 4$ est fausse.

Le réel $-1{,}5$ est à gauche de -1 ; le réel $4{,}2$ est à droite de 4.

La condition décrit l'intervalle $[-1; 4[$, défini ci-dessous.

Les intervalles

Définition : Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est l'**intervalle fermé** $[a; b]$. On définit de même :

- $]a; b[$: les réels x tels que $a < x < b$ (**intervalle ouvert**) ; $[a; b[$: $a \leq x < b$; $]a; b]$: $a < x \leq b$;
- $[a; +\infty[$: $x \geq a$; $]a; +\infty[$: $x > a$; $]-\infty; b]$: $x \leq b$; $]-\infty; b[$: $x < b$.

Les réels a et b sont les **bornes** de l'intervalle. Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres : le crochet est toujours ouvert de leur côté. L'ensemble $\mathbb{R}$ s'écrit $]-\infty; +\infty[$.

Exemple : traduire des inégalités

- $-3 \leq x \leq 0$ s'écrit $x \in [-3; 0]$.
- $x > 2$ s'écrit $x \in]2; +\infty[$.
- $x \leq \sqrt{2}$ s'écrit $x \in \left]-\infty; \sqrt{2}\right]$.
- $1 < x \leq 3{,}5$ s'écrit $x \in]1; 3{,}5]$.

L'intervalle $[-3; 0]$ contient une infinité de réels, pas seulement les entiers -3, -2, -1 et 0.

Il contient par exemple $-\dfrac{1}{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Remarque : crochets et infini

Un crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle garde la borne ; tourné vers l'extérieur, il l'exclut.

Du côté de $+\infty$ ou de $-\infty$, le crochet est toujours ouvert : ces symboles ne sont pas des nombres. On écrit donc $[2; +\infty[$, avec un crochet ouvert à droite.

Enfin, la définition exige des bornes $a < b$.

Intersection et réunion

Méthode : intersection et réunion d'intervalles

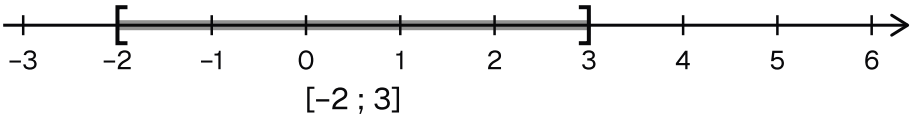
1. **Traduis** chaque condition sur x par un intervalle : crochet fermé pour $\leq$ ou $\geq$, ouvert pour $<$ ou $>$.
2. **Représente** chaque intervalle sur une même droite graduée, sur ton cahier.
3. **Lis** l'intersection $I \cap J$: les réels communs aux deux, condition « et ».
4. **Lis** la réunion $I \cup J$: les réels de l'un ou de l'autre, condition « ou ».

Exemple : intersection et réunion

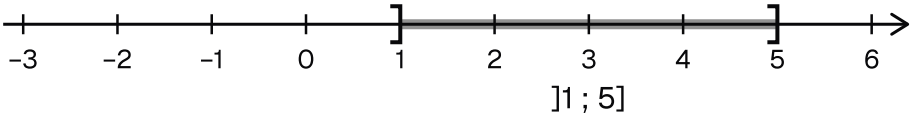
Soit $I = [-2; 3]$ et $J =]1; 5]$. Sur la droite, I va de -2 à 3, et J de 1 à 5, le point 1 exclu.

- **Intersection.** Les réels communs vont de 1, exclu, à 3, compris : $I \cap J =]1; 3]$.
- **Réunion.** Les deux intervalles se chevauchent. Ensemble, ils couvrent de -2 à 5 : $I \cup J = [-2; 5]$.

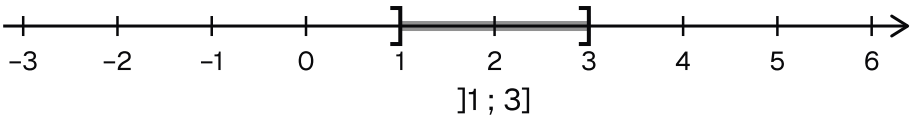
Contrôle avec $x = 2$: il est dans I et dans J, donc dans $I \cap J$.



Sur la droite, l'intervalle I = [-2 ; 3] va de -2 à 3, les deux bornes comprises.



L'intervalle J =]1 ; 5] va de 1, exclu, à 5, compris.



Les réels communs à I et à J forment l'intersection]1 ; 3], là où les deux traits précédents se recouvrent.

Vérifie : Une intersection

Soit $K =]-\infty; 2]$ et $L =]-1; +\infty[$. Que vaut $K \cap L$?

A. $[-1; 2[$
Faux.
Les crochets sont inversés : -1 est exclu de L, et 2 est dans K.

B. $]-1; 2]$
Juste.
Juste : les réels strictement plus grands que -1 et au plus égaux à 2.

C. $]-\infty; +\infty[$
Faux.
C'est la réunion $K \cup L$, pas l'intersection.

D. $]-\infty; -1[$
Faux.
Ces réels ne sont pas dans L.

Correction
Un réel de $K \cap L$ vérifie $x \leq 2$ et $x > -1$, c'est-à-dire $-1 < x \leq 2$. Donc $K \cap L =]-1; 2]$.

Les deux intervalles se chevauchent et couvrent toute la droite : $K \cup L = \mathbb{R}$.

Un ensemble vide, puis à toi

Exemple : une intersection vide

Soit $I = [-3; -1]$ et $J =]0; 2[$. Aucun réel n'est à la fois au plus égal à -1 et strictement plus grand que 0.

L'intersection $I \cap J$ est donc l'**ensemble vide**, noté $\varnothing$: $I \cap J = \varnothing$.

Leur réunion n'est pas un intervalle : il lui manque les réels de $]-1; 0]$. On la laisse écrite $[-3; -1] \cup]0; 2[$.

De même, la condition « $x \leq 1$ et $x > 4$ » n'a aucune solution.

À toi : Traduire des conditions

Écris avec un intervalle, ou une réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x tels que : (a) $x \geq -2$ et $x < 3$; (b) $x < -1$ ou $x \geq 2$; (c) $x \leq 5$ ou $x > 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Traduis chaque condition par un intervalle, puis applique la méthode.

Indice 2

Pour (a), « et » garde les réels communs aux intervalles $[-2; +\infty[$ et $]-\infty; 3[$.

Indice 3

Point délicat : en (c), les deux intervalles se chevauchent et recouvrent toute la droite.

Réponse

(a) Les réels qui vérifient $x \geq -2$ et $x < 3$ forment une intersection :

$$[-2; +\infty[\cap]-\infty; 3[= [-2; 3[.$$

(b) « Ou » donne une réunion : $]-\infty; -1[\cup [2; +\infty[$. Cette réunion n'est pas un intervalle : il lui manque les réels de $[-1; 2[$.

(c) Tout réel est au plus égal à 5 ou strictement plus grand que 0 :

$$]-\infty; 5] \cup]0; +\infty[= \mathbb{R}.$$

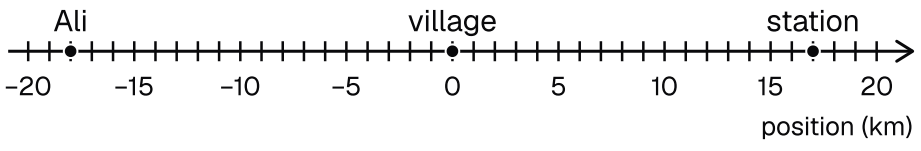
Valeur absolue et distance

Une distance sur la route

En clair. Sur une route rectiligne, des bornes indiquent la position en kilomètres. Prends comme repère zéro le village situé à la borne 30, et compte positivement vers les bornes plus grandes.

Ali est à la borne 12 : son abscisse est $12 - 30 = -18$. Une station est à la borne 47 : son abscisse est $47 - 30 = 17$.

Leurs distances au village sont 18 km et 17 km : chaque abscisse, sans son signe.



La route vue comme une droite graduée en kilomètres, avec le village pour repère zéro : Ali à -18, la station à 17.

Devine : La ferme et le puits

Sur cette route, une ferme a l'abscisse -5 et un puits l'abscisse 9. Quelle distance les sépare ?

A. 4 km

Faux.

Tu as calculé $9 + (-5)$: c'est une somme d'abscisses, pas une distance.

B. 14 km

Juste.

Juste : 5 km jusqu'au village, puis 9 km au-delà.

C. -14 km

Faux.

Une distance n'est jamais négative.

D. 5 km

Faux.

C'est la distance de la ferme au village seulement.

Correction

La ferme est à 5 km du village d'un côté, le puits à 9 km de l'autre côté. La distance vaut $5 + 9 = 14$ km.

Avec les abscisses : $9 - (-5) = 14$. Dans l'autre ordre, $-5 - 9 = -14$: on garde ce nombre sans son signe. C'est sa valeur absolue.

Valeur absolue et distance

Définition : Valeur absolue et distance

Soit x un réel. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est le réel défini par

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0.$$

Sur une droite graduée d'origine O, soit M et N les points d'abscisses x et y. La **distance** MN est le réel $|x - y|$; on l'appelle aussi la distance entre les réels x et y. En particulier, $|x| = OM$ est la distance entre x et 0.

Exemple : valeurs absolues et distances

- $|-7| = 7$, $|2{,}5| = 2{,}5$ et $|0| = 0$.
- Comme $2 < 4$, la comparaison des racines carrées de réels positifs donne $\sqrt{2} < 2$: le réel $\sqrt{2} - 2$ est strictement négatif. Donc $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}$.
- Les points d'abscisses -6 et -2 sont à la distance $|-6 - (-2)| = |-4| = 4$.
- Sur la route, Ali et la station sont à $|-18 - 17| = 35$ km l'un de l'autre. Contrôle avec les bornes : $47 - 12 = 35$.

Enlever les barres. Soit x un réel. Pour écrire $|x - 3|$ sans barres, on annonce deux cas.

- Si $x \geq 3$, alors $x - 3 \geq 0$ et $|x - 3| = x - 3$.
- Si $x < 3$, alors $x - 3 < 0$ et $|x - 3| = 3 - x$.

Vérifie : Une valeur absolue avec une racine

Combien vaut $|1 - \sqrt{3}|$?

A. $1 - \sqrt{3}$

Faux.

Ce réel est strictement négatif, car $1 < \sqrt{3}$; une valeur absolue ne l'est jamais.

B. $1 + \sqrt{3}$

Faux.

La valeur absolue ne transforme pas une différence en somme.

C. $-1 - \sqrt{3}$

Faux.

Ce réel est strictement négatif : ce n'est pas une valeur absolue.

D. $\sqrt{3} - 1$

Juste.

Juste : c'est l'opposé de $1 - \sqrt{3}$, qui est négatif.

Correction

Comme $1 < 3$, on a $1 < \sqrt{3}$, d'après la propriété carrés, racines carrées et inverses. Le réel $1 - \sqrt{3}$ est donc strictement négatif.

D'après la définition de la valeur absolue :

$$|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1.$$

Propriétés de la valeur absolue

En clair. Les réels $|-4|$ et $|4|$ valent tous deux 4. Le carré efface aussi le signe : $(-4)^2 = 16 = |-4|^2$. Et $|(-2) \times 3| = 6 = |-2| \times |3|$.

Pourquoi est-ce vrai ? La définition distingue deux cas, selon le signe de x. Chaque propriété se vérifie dans les deux cas, ou en passant par le carré.

Propriété : Propriétés de la valeur absolue

Pour tous réels x et y :

- $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|-x| = |x|$ et $-|x| \leq x \leq |x|$;

- $|x|^2 = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|xy| = |x|\,|y|$ et, si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$.

Démonstration

Étape 1. On distingue deux cas. Si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$ et $-|x| = -x \leq 0 \leq x$. Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$ et $-|x| = x < 0 < |x|$. Dans les deux cas, $|x| \geq 0$, $|x|$ vaut x ou $-x$, $-|x| \leq x \leq |x|$, et $|x|$ n'est nul que si $x = 0$.

Étape 2. Comme $|x|$ vaut x ou $-x$, $|x|^2 = x^2$. Or $\sqrt{x^2}$ est l'unique réel positif dont le carré est x^2 : c'est donc $|x|$. En particulier, $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Étape 3. Les réels x^2 et y^2 sont positifs : $|xy| = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{y^2} = |x|\,|y|$. Si $y \neq 0$, on écrit $x = \dfrac{x}{y} \times y$: alors $|x| = \left|\dfrac{x}{y}\right| |y|$, et on divise par $|y| \neq 0$.

Étape 4. Les réels $|x|$ et $|y|$ sont positifs : d'après la comparaison des carrés, appliquée dans les deux sens, $|x| = |y| \Leftrightarrow |x|^2 = |y|^2$, c'est-à-dire, d'après l'étape 2, $x^2 = y^2$, soit $(x - y)(x + y) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est : $x = y$ ou $x = -y$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux outils reviennent.

D'abord, la **disjonction des deux cas**, annoncée : $x \geq 0$ ou $x < 0$.

Ensuite, le **carré**, qui efface le signe : $\sqrt{x^2} = |x|$, car $|x|$ est le réel positif de carré x^2.

Pour l'égalité de deux valeurs absolues, on compare les carrés de deux réels positifs.

Vérifie : Deux valeurs absolues égales

Dans la preuve de « $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$ », quelle égalité apparaît à la fin ?

A. $(x - y)(x + y) = 0$

Juste.

Juste : un produit nul, donc $x = y$ ou $x = -y$.

B. $(x - y)^2 = 0$

Faux.

Elle ne donnerait que $x = y$: on perdrait $x = -y$.

C. $x^2 + y^2 = 0$

Faux.

Elle n'est vraie que pour $x = y = 0$.

D. $(x+y)^2 = 0$

Faux.

Elle ne donnerait que $x = -y$.

Correction

Les réels $|x|$ et $|y|$ sont positifs. D'après la comparaison des carrés, appliquée dans les deux sens, $|x| = |y|$ équivaut à $x^2 = y^2$, soit $x^2 - y^2 = 0$.

L'identité remarquable donne $(x-y)(x+y) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est : $x = y$ ou $x = -y$.

Exemple : la racine d'un carré, et une précaution

- $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, c'est-à-dire $|-5|$, et non -5.
- Comme $4 < 7$, on a $2 < \sqrt{7}$. D'après les propriétés de la valeur absolue, $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = |2 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 2$.

L'hypothèse compte. L'égalité $\sqrt{x^2} = x$ n'est vraie que pour x positif ou nul. Pour $x = -5$, elle donnerait $5 = -5$.

Deux cas, un piège, à toi

Exemple : deux valeurs absolues égales

Résolvons $|2x - 1| = |x + 4|$. D'après les propriétés de la valeur absolue, deux cas sont possibles.

- Premier cas : $2x - 1 = x + 4$, d'où $x = 5$.
- Second cas : $2x - 1 = -(x + 4)$, soit $3x = -3$, d'où $x = -1$.

Contrôle : pour $x = 5$, les deux membres valent 9 ; pour $x = -1$, ils valent 3.

Conclusion. L'équation a deux solutions : -1 et 5.

Attention : la valeur absolue d'une somme

✗ « $|-6 + 2| = |-6| + |2| = 8$. »

✓ On calcule d'abord la somme : $|-6 + 2| = |-4| = 4$.

En général, $|x + y| \neq |x| + |y|$: seuls le produit et le quotient se séparent. De même, $|-x|$ vaut $|x|$, et pas toujours x.

Vérifie : Une valeur particulière

Pour $x = -2$, combien vaut $|x - 3|$?

A. -1

Faux.

Tu as séparé la différence : $|-2| - 3 = -1$. On calcule d'abord $x - 3$.

B. 1

Faux.

Tu as calculé $|-2 + 3|$: le signe de 3 a changé.

C. 5

Juste.

Juste : $x - 3 = -5$, et $|-5| = 5$.

D. -5

Faux.

Une valeur absolue n'est jamais négative.

Correction

On calcule d'abord l'intérieur : $x - 3 = -2 - 3 = -5$. Puis $|-5| = 5$.

Le choix -1 vient de $|x| - 3 = 2 - 3$: les barres n'entourent que x. Or $|x - 3|$ n'est jamais négatif.

À toi : Calculer, puis résoudre

(a) Calcule $|3 - \sqrt{10}|$, puis la distance entre $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{4}$. (b) Résous $|x - 2| = |3x|$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour une valeur absolue, cherche d'abord le signe du réel ; pour une distance, calcule la différence des abscisses.

Indice 2

Pour (b), applique la propriété des valeurs absolues égales : deux cas.

Indice 3

Point délicat : $\sqrt{10}$ dépasse 3, car $10 > 9$.

Réponse

(a) Comme $9 < 10$, on a $3 < \sqrt{10}$: le réel $3 - \sqrt{10}$ est strictement négatif. D'après la définition de la valeur absolue, $|3 - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$.

La distance entre $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{4}$ vaut :

$$\begin{aligned}\left|-\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right| &= \left|-\frac{11}{4}\right| \\ &= \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

(b) D'après les propriétés de la valeur absolue, deux cas sont possibles.

- Premier cas : $x - 2 = 3x$, d'où $x = -1$.
- Second cas : $x - 2 = -3x$, d'où $x = \dfrac{1}{2}$.

Contrôle : pour $x = -1$, les deux membres valent 3 ; pour $x = \dfrac{1}{2}$, ils valent $\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. L'équation a deux solutions : -1 et $\dfrac{1}{2}$.

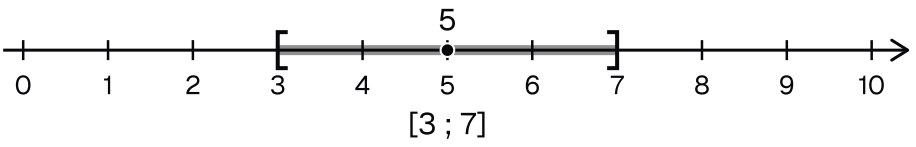
Distance, intervalle centré, inégalité triangulaire

Les réels proches d'un nombre

En clair. Sur la droite graduée, quels réels sont à une distance au plus 2 de 5 ? Pars de 5 : tu peux reculer jusqu'à 3 et avancer jusqu'à 7.

Ce sont les réels de $[3; 7]$, et ils vérifient $|x - 5| \leq 2$.

Pourquoi est-ce vrai ? On pose $X = x - a$. On distingue deux cas selon le signe de X, puis on ajoute a.



Les réels à une distance au plus 2 de 5 : en reculant jusqu'à 3 et en avançant jusqu'à 7, on obtient l'intervalle [3 ; 7].

Devine : Une distance au plus égale à 4

Quels réels x vérifient $|x - 1| \leq 4$?

A. Les réels de $[1; 5]$.

Faux.

Tu n'as avancé qu'à droite de 1 ; on recule aussi de 4.

B. Les réels de $[-4; 4]$.

Faux.

C'est l'intervalle centré en 0, pas en 1.

C. Les réels de $]-3; 5[$.

Faux.

L'inégalité est large : les bornes -3 et 5 conviennent.

D. Les réels de $[-3; 5]$.

Juste.

Juste : de $1 - 4$ à $1 + 4$.

Correction

Ce sont les réels à distance au plus 4 de 1 : de $1-4=-3$ à $1+4=5$, bornes comprises. Donc $x \in [-3;5]$.

Contrôle : $|5-1|=4$ et $|-3-1|=4$.

Valeur absolue et intervalle centré

Propriété : Valeur absolue et intervalle centré

Soit a un réel et r un réel strictement positif. Pour tout réel x :

$$|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r \Leftrightarrow x \in [a-r;a+r].$$

De même, $|x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r;a+r[$.

Sur la droite graduée, les réels dont la distance à a est au plus r forment l'intervalle de **centre** a et de **rayon** r.

Démonstration

Étape 1. On pose $X = x-a$. On montre d'abord que $|X| \leq r \Leftrightarrow -r \leq X \leq r$, en distinguant deux cas.

Étape 2. Si $X \geq 0$, alors $|X| = X$, et $-r \leq X$ est toujours vrai, car $-r < 0 \leq X$. Les deux conditions se réduisent à $X \leq r$.

Étape 3. Si $X < 0$, alors $|X| = -X$, et $X \leq r$ est toujours vrai, car $X < 0 < r$. Les deux conditions se réduisent à $-X \leq r$, c'est-à-dire $X \geq -r$ (multiplication par -1, qui change le sens).

Étape 4. On ajoute a aux trois membres de $-r \leq x-a \leq r$ (ordre et addition) : $a-r \leq x \leq a+r$, c'est-à-dire $x \in [a-r;a+r]$. Le cas strict se traite de même, en remplaçant $\leq$ par $<$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **annonce deux cas**, selon le signe de $X = x-a$.

Dans chaque cas, l'une des deux inégalités est toujours vraie ; l'autre se réduit à la condition cherchée.

Le changement $X = x-a$ ramène tout au centre 0. On revient au centre a par la propriété ordre et addition.

Vérifie : Une inégalité toujours vraie

Dans le cas $X < 0$ de la preuve, pourquoi l'inégalité $X \leq r$ est-elle toujours vraie ?

A. Car $|X| = X$ dans ce cas.

Faux.
Dans ce cas, $|X| = -X$.

B. Car $X < 0 < r$ dans ce cas.

Juste.
Juste : r est strictement positif.

C. Car r est négatif dans ce cas.

Faux.
Par hypothèse, r est strictement positif.

D. Car $X^2 \leq r^2$ dans ce cas.

Faux.
La preuve n'emploie aucun carré ; c'est d'ailleurs ce qu'on cherche.

Correction
Si $X < 0$, alors $X < 0 < r$, car r est strictement positif. L'inégalité $X \leq r$ est donc toujours vraie.

Il reste $|X| = -X \leq r$, c'est-à-dire $X \geq -r$: multiplier par -1 change le sens.

Exemple : un intervalle centré, et une hypothèse

Un intervalle centré. L'inéquation $|x + 2| < 0{,}5$ s'écrit $|x - (-2)| < 0{,}5$. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $x \in]-2{,}5 ; -1{,}5[$.

L'hypothèse compte. Le rayon doit être strictement positif. L'inéquation $|x - 4| \leq -1$ n'a aucune solution, car une valeur absolue est positive ou nulle.

La formule donnerait des bornes 5 et 3 dans le mauvais ordre.

Résoudre avec une distance

Méthode : résoudre avec une distance

1. **Écris** l'expression sous la forme $|x - a|$, distance entre x et a. Par exemple, $|x + 3| = |x - (-3)|$.
2. **Équation** $|x - a| = r$, avec $r > 0$: deux solutions, $a - r$ et $a + r$. Avec $r = 0$, la seule solution est a ; avec $r < 0$, aucune.
3. **Inéquation** $|x - a| \leq r$, avec $r > 0$: l'intervalle $[a - r ; a + r]$. Pour $|x - a| > r$, ce sont les réels hors de cet intervalle.
4. **Contrôle** sur la droite graduée, ou avec une valeur particulière.

Exemple : résoudre, puis trouver centre et rayon

- $|x-2| \leq 3$: la distance de x à 2 est au plus 3. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $x \in [-1;5]$.
- $|x+1| = 4$ s'écrit $|x-(-1)| = 4$. Les solutions sont $-1-4=-5$ et $-1+4=3$.

Centre et rayon. L'intervalle $[-3;7]$ a pour centre $\dfrac{-3+7}{2} = 2$ et pour rayon $\dfrac{7-(-3)}{2} = 5$.

Donc, pour tout réel x, la condition $x \in [-3;7]$ équivaut à $|x-2| \leq 5$.

L'inégalité triangulaire

En clair. Sur la route, tu roules 5 km vers l'est, puis 3 km vers l'ouest. Tu as parcouru 8 km, mais tu n'es qu'à 2 km du départ.

Ainsi $|5+(-3)| = 2$, alors que $|5|+|-3| = 8$: la distance au départ ne dépasse jamais le chemin parcouru.

Pourquoi est-ce vrai ? On élève les deux membres au carré, puis on développe.

Propriété : Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration

Étape 1. Les deux membres sont positifs ou nuls. D'après la comparaison des carrés de réels positifs, il suffit de montrer que $|x+y|^2 \leq \left(|x|+|y|\right)^2$.

Étape 2. D'après les propriétés de la valeur absolue, $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et $\left(|x|+|y|\right)^2 = x^2 + 2\,|x|\,|y| + y^2$.

Étape 3. La différence du second carré et du premier vaut $2\left(|x|\,|y| - xy\right) = 2\left(|xy| - xy\right)$. Elle est positive ou nulle, car $xy \leq |xy|$. D'où l'inégalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : passer aux **carrés**, qui font disparaître la valeur absolue de la somme.

Développer fait apparaître $2xy$ d'un côté, $2\,|x|\,|y|$ de l'autre.

Tout repose alors sur un fait simple : un réel est au plus égal à sa valeur absolue.

Vérifie : Le droit de passer aux carrés

Dans la preuve, pourquoi peut-on comparer les carrés des deux membres ?

A. Car les deux membres sont positifs ou nuls.

Juste.

Juste : c'est l'hypothèse de la comparaison des carrés.

B. Car x et y sont positifs.

Faux.

L'énoncé vaut pour tous réels x et y, de signes quelconques.

C. Car un carré est toujours positif.

Faux.

La comparaison des carrés exige des réels positifs avant le passage au carré.

D. Car $x + y$ est positif.

Faux.

Le réel $x + y$ peut être négatif ; c'est $|x + y|$ qui est positif.

Correction

Les deux membres, $|x + y|$ et $|x| + |y|$, sont positifs ou nuls. D'après la comparaison des carrés de réels positifs, il suffit de comparer leurs carrés.

Sans cette hypothèse, le passage au carré ne conserverait pas l'ordre.

Exemple : égalité ou inégalité stricte

- Pour $x = 4$ et $y = 6$: $|4 + 6| = 10 = |4| + |6|$. Il y a égalité : les deux réels ont le même signe.
- Pour $x = 4$ et $y = -6$: $|4 - 6| = 2$, alors que $|4| + |-6| = 10$.
- En remplaçant y par $-y$, on obtient aussi $|x - y| \leq |x| + |y|$, car $|-y| = |y|$.

Majorer, à toi, le coin devoir

Méthode : majorer une expression

1. **Écris** l'expression comme une somme de termes plus simples.
2. **Majore** la valeur absolue de la somme par la somme des valeurs absolues : c'est l'inégalité triangulaire.
3. **Majore** chaque terme grâce aux hypothèses sur x et aux propriétés de l'ordre.
4. **Additionne** les majorations, en nommant chaque propriété employée.

Exemple : majorer sur un intervalle

Soit $x \in [-3; 1]$. Majorons $|4x + 2|$.

Majorer $|x|$. Comme $-3 \leq x \leq 1$ et $1 \leq 3$, on a $-3 \leq x \leq 3$, par transitivité. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $|x| \leq 3$.

Inégalité triangulaire. D'après l'inégalité triangulaire et les propriétés de la valeur absolue :

$$\begin{aligned} |4x+2| &\leq |4x| + 2 \\ &= 4\,|x| + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété ordre et multiplication, $4\,|x| \leq 12$. Donc $|4x+2| \leq 14$.

Un majorant n'est pas forcément atteint : ici, la plus grande valeur est 10, pour $x = -3$.

À toi : Majorer une expression

Soit x un réel tel que $|x| \leq 4$. Majore $|2x+7|$, puis $|x^2 - 5x|$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Chaque expression est une somme de deux termes : applique la méthode pour majorer.
Indice 2
On a $|2x| = 2\,|x|$, $|x^2| = |x|^2$ et $|-5x| = 5\,|x|$.
Indice 3
Point délicat : pour majorer $|x|^2$, emploie la comparaison des carrés de réels positifs.

Réponse
Première expression. D'après l'inégalité triangulaire, $|2x+7| \leq |2x| + 7 = 2\,|x| + 7$.

Comme $|x| \leq 4$, la propriété ordre et multiplication donne $2\,|x| \leq 8$. On ajoute 7, puis la transitivité donne $|2x+7| \leq 15$.

Seconde expression. De même :

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x| &\leq |x^2| + |-5x| \\ &= |x|^2 + 5\,|x|. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq |x| \leq 4$, la comparaison des carrés de réels positifs donne $|x|^2 \leq 16$. La propriété ordre et multiplication donne $5\,|x| \leq 20$.

En additionnant membre à membre : $|x^2 - 5x| \leq 16 + 20 = 36$.

Conclusion. Si $|x| \leq 4$, alors $|2x+7| \leq 15$ et $|x^2 - 5x| \leq 36$. Ces majorants sont atteints : 15 pour $x = 4$, et 36 pour $x = -4$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une inéquation avec une distance**

En devoir, chaque transformation est justifiée. Par exemple :

« D'après les propriétés de la valeur absolue, $|2x-6| = 2\,|x-3|$. On divise par 2, strictement positif : l'inéquation $|2x-6| \leq 4$ équivaut à $|x-3| \leq 2$. D'après la propriété valeur absolue et intervalle centré, $x \in [1;5]$. »

Termine par un contrôle : pour $x = 5$, $|10-6| = 4$.

Encadrer une somme, une différence de deux réels

Mesurer à la règle

En clair. Tu mesures la longueur L d'un crayon avec une règle graduée en millimètres. Son extrémité tombe entre deux traits : $14{,}3$ cm et $14{,}4$ cm.

Tu ne connais pas L exactement, mais tu sais que :

$$14{,}3 \leq L \leq 14{,}4.$$

C'est un encadrement de L ; l'écart entre ses bornes vaut $0{,}1$ cm.

Devine : Ce que dit la règle

Laquelle de ces affirmations sur la longueur L est sûre ?

A. On a $L = 14{,}35$ cm.
Faux.
Rien ne dit que L est au milieu des deux traits.

B. On a $L > 14{,}4$ cm.
Faux.
L'extrémité est avant le trait $14{,}4$.

C. L est à $0{,}1$ cm au plus de $14{,}3$ cm.
Juste.
Juste : $0 \leq L - 14{,}3 \leq 0{,}1$.

D. L est à $0{,}01$ cm au plus de $14{,}3$ cm.
Faux.
La règle ne donne pas cette précision : L peut valoir $14{,}38$.

Correction
D'après la propriété ordre et addition, on retranche $14{,}3$ aux trois membres de $14{,}3 \leq L \leq 14{,}4$: $0 \leq L - 14{,}3 \leq 0{,}1$. La distance entre L et $14{,}3$ est donc au plus $0{,}1$.

On dira que $14{,}3$ est une valeur approchée de L à $0{,}1$ près, par défaut. De même, $14{,}4$ en est une valeur approchée par excès.

Encadrement et valeur approchée

Définition : Encadrement, valeur approchée, approximation décimale

Soit x un réel.

- Si $a \leq x \leq b$, on dit que $a \leq x \leq b$ est un **encadrement** de x, d'**amplitude** $b - a$.
- Soit ε un réel strictement positif. Un réel a est une **valeur approchée** de x **à** ε **près** lorsque $|x - a| \leq \varepsilon$. Elle est **par défaut** si $a \leq x \leq a + \varepsilon$, et **par excès** si $a - \varepsilon \leq x \leq a$.
- Soit n un entier naturel et k l'entier relatif tel que $k \times 10^{-n} \leq x < (k+1) \times 10^{-n}$. Le décimal $k \times 10^{-n}$ est l'**approximation décimale par défaut** de x à 10^{-n} près, et $(k+1) \times 10^{-n}$ est son **approximation décimale par excès**.

Exemple : les racines carrées de deux et de trois

Racine carrée de deux. On a $1{,}41^2 = 1{,}9881$ et $1{,}42^2 = 2{,}0164$, donc $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$.

Ces réels sont positifs : la propriété carrés, racines carrées et inverses donne $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Ainsi $1{,}41$ et $1{,}42$ sont les approximations décimales de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, par défaut et par excès.

Racine carrée de trois. De même, $1{,}73^2 = 2{,}9929$ et $1{,}74^2 = 3{,}0276$, donc $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$.

Ces deux encadrements ont pour amplitude $0{,}01$.

Encadrer une somme, une différence

En clair. Tu mesures un second crayon : $9{,}7 \leq \ell \leq 9{,}8$. Mis bout à bout, les deux crayons mesurent au moins $14{,}3 + 9{,}7 = 24$ cm, et au plus $14{,}4 + 9{,}8 = 24{,}2$ cm.

Pourquoi est-ce vrai ? On additionne les encadrements membre à membre. Pour une différence, on encadre d'abord l'opposé.

Propriété : Encadrement d'une somme et d'une différence

Soit x et y deux réels, et a, b, c, d des réels tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$. Alors

$$a + c \leq x + y \leq b + d \quad \text{et} \quad a - d \leq x - y \leq b - c.$$

Démonstration

Étape 1. Somme : on additionne membre à membre $a \leq x$ et $c \leq y$, puis $x \leq b$ et $y \leq d$ (ordre et addition). On obtient $a + c \leq x + y \leq b + d$.

Étape 2. Différence : on multiplie les inégalités $c \leq y \leq d$ par -1, qui est strictement négatif ; le sens change (ordre et multiplication) : $-d \leq -y \leq -c$.

Étape 3. On additionne membre à membre $a \leq x \leq b$ et $-d \leq -y \leq -c$ (ordre et addition) : $a - d \leq x - y \leq b - c$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une somme, on **additionne membre à membre**, grâce à la propriété ordre et addition.

Pour une différence, on ne soustrait jamais : on écrit $x - y = x + (-y)$, on encadre $-y$, puis on additionne.

Retiens l'ordre des bornes : $a - d$ à gauche, $b - c$ à droite.

Vérifie : L'encadrement de l'opposé

Dans la preuve, comment obtient-on l'encadrement de $-y$?

A. Par multiplication par -1, sans changer le sens.
Faux.
Le réel -1 est strictement négatif : le sens change.

B. Par multiplication par -1, qui change le sens.
Juste.
Juste : $-d \leq -y \leq -c$.

C. Par soustraction membre à membre.
Faux.
C'est justement ce que la preuve évite.

D. Par passage à l'inverse.
Faux.
L'inverse de y est $\dfrac{1}{y}$, pas $-y$.

Correction
À l'étape 2, la preuve multiplie $c \leq y \leq d$ par -1. Ce facteur est strictement négatif : la propriété ordre et multiplication inverse donc le sens, et l'on obtient $-d \leq -y \leq -c$.

Elle additionne ensuite cet encadrement avec celui de x.

Exemple : la différence des deux longueurs

On reprend $14{,}3 \leq L \leq 14{,}4$ et $9{,}7 \leq \ell \leq 9{,}8$.

Opposé. D'après la propriété ordre et multiplication, $-9{,}8 \leq -\ell \leq -9{,}7$.

Différence. D'après l'encadrement d'une somme et d'une différence, $14{,}3 - 9{,}8 \leq L - \ell \leq 14{,}4 - 9{,}7$. Soit :

$$4{,}5 \leq L - \ell \leq 4{,}7.$$

Amplitude. Elle vaut $0{,}2$: c'est la somme des deux amplitudes, $0{,}1 + 0{,}1$, même pour une différence.

La méthode, un piège, à toi

Méthode : encadrer une somme ou une différence

1. **Écris** les deux encadrements, dans le même sens.
2. **Somme** : additionne-les membre à membre.
3. **Différence** $x - y$: encadre d'abord $-y$, en multipliant par -1, ce qui change le sens. Additionne ensuite avec l'encadrement de x.
4. **Contrôle** l'amplitude : c'est la somme des amplitudes des deux encadrements.

Exemple : le périmètre d'un rectangle

Tu mesures un rectangle au millimètre, en centimètres. Sa longueur vérifie $5{,}2 \leq x \leq 5{,}3$, et sa largeur $3{,}6 \leq y \leq 3{,}7$.

D'après l'encadrement d'une somme, $8{,}8 \leq x + y \leq 9$.

Le périmètre vaut $P = 2(x + y)$. Multiplier par 2, strictement positif, conserve le sens, d'après la propriété ordre et multiplication. Donc :

$$17{,}6 \leq P \leq 18.$$

Attention : jamais de soustraction membre à membre

✗ « $3 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 4$, donc $3 - 1 \leq x - y \leq 5 - 4$. »

✓ Ce calcul donne $2 \leq x - y \leq 1$: c'est absurde, car $2 > 1$.

On encadre $-y$: $-4 \leq -y \leq -1$. Puis on additionne : $-1 \leq x - y \leq 4$.

Contrôle : pour $x = 3$ et $y = 4$, on a $x - y = -1$.

À toi : Trois encadrements

Soit a et b deux réels tels que $2{,}4 \leq a \leq 2{,}5$ et $-1{,}3 \leq b \leq -1{,}2$. Encadre $a + b$, $a - b$, puis $3a - 2b$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : la somme d'abord, puis la différence par l'opposé.

Indice 2
Pour $a - b$, commence par $1{,}2 \leq -b \leq 1{,}3$.
Indice 3
Point délicat : pour $-2b$, tu multiplies par -2, strictement négatif ; le sens change.

Réponse
Somme. D'après l'encadrement d'une somme : $2{,}4 + (-1{,}3) \leq a + b \leq 2{,}5 + (-1{,}2)$, soit $1{,}1 \leq a + b \leq 1{,}3$.

Différence. Multiplier par -1 change le sens : $1{,}2 \leq -b \leq 1{,}3$. En additionnant, $3{,}6 \leq a - b \leq 3{,}8$.

Combinaison. D'après la propriété ordre et multiplication, $7{,}2 \leq 3a \leq 7{,}5$ et $2{,}4 \leq -2b \leq 2{,}6$. En additionnant, $9{,}6 \leq 3a - 2b \leq 10{,}1$.

Encadrer un produit, un quotient ; approximation à la calculatrice

L'aire d'un rectangle mesuré

En clair. Reprends le rectangle mesuré : $5{,}2 \leq x \leq 5{,}3$ et $3{,}6 \leq y \leq 3{,}7$. Son aire vaut xy.

Tous ces nombres sont strictement positifs. Le plus petit rectangle possible a les plus petits côtés ; le plus grand a les plus grands côtés.

Devine : L'aire du rectangle

Quel encadrement de l'aire xy, en cm², est juste ?

A. $17{,}6 \leq xy \leq 18$
Faux.
C'est l'encadrement du périmètre, pas de l'aire.

B. $8{,}8 \leq xy \leq 9$
Faux.
C'est l'encadrement de $x + y$.

C. $19{,}08 \leq xy \leq 19{,}24$
Faux.
Tu as croisé les bornes : $5{,}3 \times 3{,}6$ et $5{,}2 \times 3{,}7$.

D. $18{,}72 \leq xy \leq 19{,}61$
Juste.
Juste : les petites bornes ensemble, les grandes ensemble.

Correction
Les quatre bornes sont strictement positives. D'après la propriété ordre et multiplication, on multiplie membre à membre :

$$5{,}2 \times 3{,}6 \leq xy \leq 5{,}3 \times 3{,}7,$$

soit $18{,}72 \leq xy \leq 19{,}61$.

Ce n'est pas une règle générale : elle exige des nombres positifs, comme le montre l'encadré plus bas.

Exemple : encadrer un produit de racines carrées

On sait que $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$ et $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$. Tous ces nombres sont strictement positifs.

D'après la propriété ordre et multiplication, on multiplie membre à membre : $1{,}41 \times 1{,}73 \leq \sqrt{2} \times \sqrt{3} \leq 1{,}42 \times 1{,}74$.

Or $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Donc :

$$2{,}4393 \leq \sqrt{6} \leq 2{,}4708.$$

L'amplitude, $0{,}0315$, dépasse celles des encadrements de départ.

Exemple : encadrer un quotient par l'inverse

Pour le rapport $\dfrac{x}{y}$ des côtés du rectangle, on encadre d'abord $\dfrac{1}{y}$.

Inverse. Les réels $3{,}6$, y et $3{,}7$ sont strictement positifs ; en passant aux inverses, l'encadrement se retourne, d'après la propriété carrés, racines carrées et inverses : $\dfrac{1}{3{,}7} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{3{,}6}$.

Produit. On multiplie membre à membre avec $5{,}2 \leq x \leq 5{,}3$:

$$\frac{5{,}2}{3{,}7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5{,}3}{3{,}6}.$$

Valeurs décimales. On a $1{,}40 \times 3{,}7 = 5{,}18 < 5{,}2$, donc $\dfrac{5{,}2}{3{,}7} > 1{,}40$. De même, $1{,}48 \times 3{,}6 = 5{,}328 > 5{,}3$, donc $\dfrac{5{,}3}{3{,}6} < 1{,}48$.

On retient $1{,}40 \leq \dfrac{x}{y} \leq 1{,}48$.

La méthode et ses précautions

Méthode : encadrer un produit ou un quotient, sur des exemples de nombres positifs

1. **Vérifie** que tous les nombres des deux encadrements sont strictement positifs.
2. **Produit** xy : multiplie membre à membre les deux encadrements.
3. **Quotient** $\dfrac{x}{y}$: encadre d'abord $\dfrac{1}{y}$; le passage à l'inverse change le sens. Multiplie ensuite membre à membre avec l'encadrement de x.

4. **Contrôle** avec la calculatrice, sur une valeur particulière.

Attention : des nombres négatifs

✗ « $-2 \leq x \leq 3$ et $-4 \leq y \leq 1$, donc $(-2) \times (-4) \leq xy \leq 3 \times 1$. »

✓ Ce calcul donne $8 \leq xy \leq 3$: c'est absurde. D'ailleurs, pour $x = 3$ et $y = -4$, on a $xy = -12$, bien plus petit que 8.

On ne multiplie membre à membre que des encadrements de nombres strictement positifs.

Vérifie : Encadrer un quotient

Soit $0{,}5 \leq x \leq 2$ et $4 \leq y \leq 5$. Quel encadrement de $\dfrac{x}{y}$ est juste ?

A. $0{,}125 \leq \dfrac{x}{y} \leq 0{,}4$

Faux.
Tu as divisé borne à borne, $\dfrac{0{,}5}{4}$ et $\dfrac{2}{5}$: le passage à l'inverse change le sens.

B. $0{,}1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 0{,}5$

Juste.
Juste : $\dfrac{0{,}5}{5}$ à gauche, $\dfrac{2}{4}$ à droite.

C. $2 \leq \dfrac{x}{y} \leq 10$

Faux.
C'est l'encadrement de $\dfrac{y}{x}$.

D. $-4{,}5 \leq \dfrac{x}{y} \leq -2$

Faux.
C'est l'encadrement de $x - y$.

Correction

Les nombres sont strictement positifs. Le passage à l'inverse change le sens : $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{4}$.

On multiplie membre à membre avec $0{,}5 \leq x \leq 2$:

$$\frac{0{,}5}{5} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{4},$$

soit $0{,}1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 0{,}5$.

Valeur approchée d'une somme

En clair. La règle donne $14{,}3$ comme valeur approchée de L à $0{,}1$ près, et $9{,}7$ comme valeur approchée de ℓ à $0{,}1$ près.

Alors 24 est une valeur approchée de $L+\ell$, mais seulement à $0{,}2$ près : les deux erreurs peuvent s'ajouter.

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit l'erreur sur la somme comme une somme d'erreurs, puis on la majore.

Propriété : Valeur approchée d'une somme et d'une différence

Soit x et y deux réels, et ε et ε' deux réels strictement positifs. Si a est une valeur approchée de x à ε près, et b une valeur approchée de y à ε' près, alors $a+b$ est une valeur approchée de $x+y$, et $a-b$ une valeur approchée de $x-y$, à $\varepsilon+\varepsilon'$ près.

Démonstration

Étape 1. Par définition d'une valeur approchée, $|x-a|\leq\varepsilon$ et $|y-b|\leq\varepsilon'$.

Étape 2. On écrit $(x+y)-(a+b)=(x-a)+(y-b)$. D'après l'inégalité triangulaire, $|(x+y)-(a+b)|\leq|x-a|+|y-b|$. En additionnant membre à membre les inégalités de l'étape 1 (ordre et addition), ce majorant est au plus $\varepsilon+\varepsilon'$.

Étape 3. De même, $(x-y)-(a-b)=(x-a)+(b-y)$, et $|b-y|=|y-b|$ d'après les propriétés de la valeur absolue. La même majoration donne $|(x-y)-(a-b)|\leq\varepsilon+\varepsilon'$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'erreur commise sur une somme est la **somme des erreurs** :

$$\begin{aligned}(x+y)-(a+b)\\ =(x-a)+(y-b).\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire majore sa valeur absolue par $\varepsilon+\varepsilon'$.

Les précisions s'additionnent : la précision garantie est $\varepsilon+\varepsilon'$, moins bonne que chacune des deux précisions de départ.

Vérifie : L'erreur sur une différence

Dans la preuve, comment écrit-on l'erreur $(x-y)-(a-b)$ commise sur la différence ?

A. $(x-a)-(b-y)$
Faux.
Développe : on obtient $x-a-b+y$, qui n'est pas l'erreur cherchée.

B. $(x-a)+(y-b)$
Faux.

C'est l'erreur sur la somme, pas sur la différence.

C. $(x-a)+(b-y)$

Juste.

Juste : $x-a+b-y$, c'est bien $(x-y)-(a-b)$.

D. $(x+a)-(y+b)$

Faux.

Développe : on obtient $x+a-y-b$, qui ne convient pas.

Correction

On développe :

$$\begin{aligned}&(x-y)-(a-b)\\&=x-y-a+b\\&=(x-a)+(b-y).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, sa valeur absolue est au plus $|x-a|+|b-y|$. Or $|b-y|=|y-b|$.

On obtient la même majoration que pour la somme : $\varepsilon+\varepsilon'$.

Exemple : la somme de deux racines carrées

Comme $1{,}414^2<2<1{,}415^2$, on a $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$. Donc $1{,}414$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près. De même, $1{,}732$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près.

D'après la valeur approchée d'une somme et d'une différence :

- $1{,}414+1{,}732=3{,}146$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ à 2×10^{-3} près ;
- $1{,}732-1{,}414=0{,}318$ est une valeur approchée de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ à 2×10^{-3} près.

La précision obtenue est 2×10^{-3}, et non 10^{-3}.

La calculatrice, à toi, le coin devoir

Méthode : obtenir une valeur approchée avec la calculatrice

1. **Saisis** l'expression en respectant les priorités : des parenthèses autour d'un numérateur, d'un dénominateur ou de ce qui est sous une racine.
2. **Lis** l'affichage : c'est en général une valeur approchée décimale, pas la valeur exacte.
3. **Déduis-en** l'encadrement demandé, par exemple les approximations décimales par défaut et par excès à 10^{-3} près.
4. **Utilise** l'écriture scientifique pour les très grands et les très petits nombres : $0{,}00052=5{,}2\times10^{-4}$.

Attention : l'écran n'affiche pas la valeur exacte

✗ « La calculatrice affiche $1{,}414213562$, donc $\sqrt{2} = 1{,}414213562$. »

✓ Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas décimal : l'écran n'en montre qu'une valeur approchée. On écrit $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, ou mieux un encadrement : $1{,}414 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}415$.

Autre piège : pour $\dfrac{1}{2+3}$, saisir 1 ÷ 2 + 3 donne $3{,}5$ au lieu de $0{,}2$. Il faut des parenthèses.

Vérifie : Lire un affichage

La calculatrice affiche $1{,}732050808$ pour $\sqrt{3}$. Quelles sont les approximations décimales de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près, par défaut puis par excès ?

A. $1{,}732$ et $1{,}733$

Juste.

Juste : $1{,}732 \leq \sqrt{3} < 1{,}733$.

B. $1{,}731$ et $1{,}732$

Faux.

Le décimal $1{,}732$ est plus petit que $\sqrt{3}$: ce n'est pas une approximation par excès.

C. $1{,}73$ et $1{,}74$

Faux.

Ce sont les approximations à 10^{-2} près.

D. $1{,}732050808$ deux fois

Faux.

L'écran affiche une valeur approchée : $\sqrt{3}$ n'est pas décimal.

Correction

L'affichage montre que $1{,}732 \leq \sqrt{3} < 1{,}733$.

D'après la définition, avec $n = 3$ et $k = 1732$, l'approximation décimale par défaut à 10^{-3} près est $1{,}732$, et celle par excès est $1{,}733$.

Contrôle sans calculatrice : $1{,}732^2 = 2{,}999824$ et $1{,}733^2 = 3{,}003289$ encadrent 3.

À toi : Une différence et un quotient

On sait que $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$ et $1{,}73 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}74$. Encadre $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, puis $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour la différence, encadre d'abord $-\sqrt{2}$; pour le quotient, encadre d'abord $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Indice 2

On a $-1{,}42 \leq -\sqrt{2} \leq -1{,}41$ et $\dfrac{1}{1{,}42} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{1{,}41}$.

Indice 3

Point délicat : multiplier par un nombre négatif et passer à l'inverse changent tous deux le sens.

Réponse

Différence. Multiplier par -1 change le sens : $-1{,}42 \leq -\sqrt{2} \leq -1{,}41$. D'après l'encadrement d'une somme et d'une différence, $0{,}31 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 0{,}33$.

Inverse. Les nombres sont strictement positifs. Le passage à l'inverse change le sens : $\dfrac{1}{1{,}42} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{1{,}41}$.

Quotient. On multiplie membre à membre avec l'encadrement de $\sqrt{3}$:

$$\frac{1{,}73}{1{,}42} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \leq \frac{1{,}74}{1{,}41}.$$

On a $1{,}42 \times 1{,}21 = 1{,}7182 < 1{,}73$, donc $\dfrac{1{,}73}{1{,}42} > 1{,}21$. De même, $1{,}41 \times 1{,}24 = 1{,}7484 > 1{,}74$, donc $\dfrac{1{,}74}{1{,}41} < 1{,}24$.

Conclusion. On retient $1{,}21 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \leq 1{,}24$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger l'encadrement d'un quotient**

En devoir, on annonce le signe avant chaque produit et chaque passage à l'inverse. Par exemple, avec $2 \leq p \leq 3$ et $5 \leq q \leq 8$:

« Les réels 5, q et 8 sont strictement positifs ; le passage à l'inverse change le sens : $\dfrac{1}{8} \leq \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{5}$. Tous les nombres sont strictement positifs. D'après la propriété ordre et multiplication, $\dfrac{2}{8} \leq \dfrac{p}{q} \leq \dfrac{3}{5}$, soit $0{,}25 \leq \dfrac{p}{q} \leq 0{,}6$. »

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir **: quelle technique pour quelle question**

- **Comparer** : étudie le signe de la différence. Pour des positifs, compare les carrés ; pour des non nuls de même signe, les inverses, en changeant le sens.
- **Transformer une inégalité** : ajouter un réel conserve le sens ; multiplier par un réel strictement négatif le change.
- **Décrire des réels** : intervalles, intersection pour « et », réunion pour « ou ».
- **Une distance** : $|x - a| \leq r$ équivaut à $x \in [a - r ; a + r]$.
- **Majorer** : inégalité triangulaire, puis chaque terme.

- **Encadrer** une somme membre à membre, une différence par l'opposé. Un produit ou un quotient, seulement pour des nombres strictement positifs.
- **Approcher** : les précisions s'additionnent, et la calculatrice affiche une valeur approchée.

Le mot du prof. Dans ce chapitre, tout revient au signe d'une différence.

Avant chaque calcul, regarde le signe des nombres, puis nomme la propriété que tu emploies. Ces réflexes te serviront dans les chapitres suivants, pour résoudre des inéquations et comparer des grandeurs.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « L'ordre dans $\mathbb{R}$ » (tc · sciences · mathematiques)