BURHAN

Résumé : La droite dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
La droite dans le plan	Semestre 1

Repère et coordonnées

> **À retenir : Se repérer avec deux directions**
>
> Rappel du collège : dans un repère orthonormé, tu lis l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur deux axes gradués. Au lycée, les deux axes ne forment plus forcément un angle droit. Il suffit de deux vecteurs non colinéaires : chaque vecteur du plan se décompose alors de façon unique selon eux.

Définition : Repère du plan

Soit O un point du plan et $\vec{i}, \vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle un **repère** du plan ; le point O est son **origine**.

On écrit $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. La droite (OI) est l'**axe des abscisses** et la droite (OJ) l'**axe des ordonnées**.

- Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, le repère est **orthogonal**.
- Si, de plus, $OI = OJ = 1$, le repère est **orthonormé**.

Propriété : Décomposition d'un vecteur selon deux vecteurs non colinéaires

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un **unique** couple (x, y) de réels tel que

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Définition : Coordonnées d'un vecteur et d'un point

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Le couple (x, y) tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ s'appelle le couple des **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u}(x, y)$.
- Les coordonnées d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $M(x, y)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Le réel x est l'**abscisse** de M et le réel y son **ordonnée**.

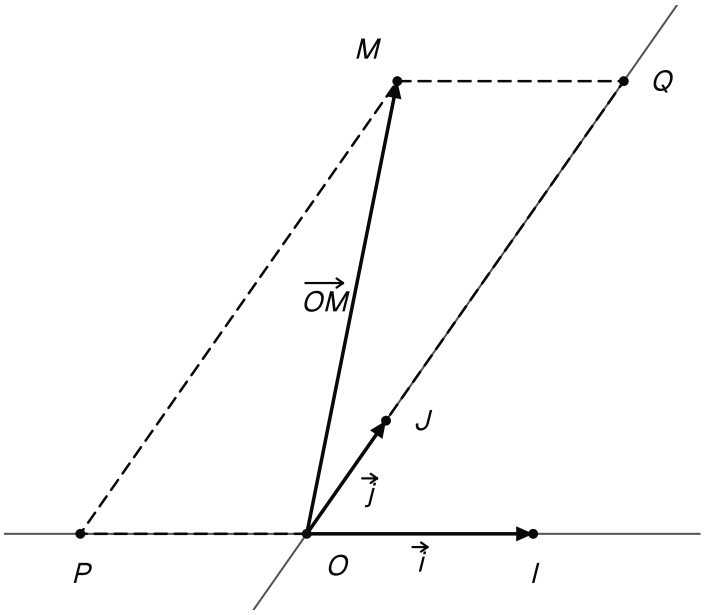
En particulier, $O(0, 0)$, $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$ et $\vec{0}(0, 0)$.

Exemple

Énoncé. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ et le point M tel que $\overrightarrow{OM} = -\vec{i} + 4\,\vec{j}$. Donne leurs coordonnées.

Vecteur. On lit les coefficients devant $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $\vec{u}(3, -2)$.

Point. Les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{OM}$: $M(-1, 4)$. Ce calcul vaut aussi dans un repère qui n'est pas orthonormé.



Repère oblique d'origine O : pour atteindre M, on fait un pas de moins i puis quatre pas de j, d'où M(-1, 4).

Calculer avec les coordonnées

Propriété : Calculs sur les coordonnées de vecteurs

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs et k un réel.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$.
- Le vecteur $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Propriété : Coordonnées d'un vecteur défini par deux points et d'un milieu

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Méthode : calculer des coordonnées

1. **Note** les coordonnées de chaque point de l'énoncé.
2. **Vecteur** $\overrightarrow{PQ}$: retranche les coordonnées de P à celles de Q.
3. **Somme, produit par un réel** : travaille séparément sur les abscisses, puis sur les ordonnées.
4. **Milieu** : moyenne des deux abscisses, puis moyenne des deux ordonnées.
5. **Point inconnu** défini par une égalité de vecteurs : écris l'égalité des abscisses et celle des ordonnées, puis résous chaque équation.

Exemple

Énoncé. Dans un repère, $P(-3,2)$, $Q(5,-4)$, $\vec{u}(2,-1)$ et $\vec{v}(-3,4)$.

Vecteur. Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées

$$(5-(-3), -4-2) = (8,-6).$$

Milieu. Le milieu de $[PQ]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) = (1,-1).$$

Combinaison. Le vecteur $2\,\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $(4+3, -2-4) = (7,-6)$.

Point inconnu. Le point N tel que $\overrightarrow{PN} = 2\,\vec{u}-\vec{v}$ vérifie, d'après les calculs sur les coordonnées, $x_N+3=7$ et $y_N-2=-6$, donc $N(4,-4)$.

Attention : Arrivée moins départ

Avec $R(4,-1)$ et $S(1,3)$, le vecteur $\overrightarrow{RS}$ a pour coordonnées $(1-4, 3-(-1)) = (-3,4)$. Le couple $(3,-4)$ est celui de $\overrightarrow{SR}$. On écrit toujours en premier les coordonnées du point d'arrivée.

Déterminant, colinéarité et alignement

Définition : Déterminant de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, est le réel

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Théorème : Condition analytique de colinéarité

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Propriété : Alignement de trois points : condition analytique

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Méthode : colinéarité et alignement

1. **Calcule** les coordonnées des deux vecteurs ; pour trois points A, B, C, prends $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Première voie** : le déterminant. S'il est nul, les vecteurs sont colinéaires ; sinon, ils ne le sont pas.
3. **Deuxième voie** : un réel k qui fait passer d'un vecteur à l'autre, coordonnée par coordonnée.
4. **Rédige** la conclusion avec le nom de la propriété : colinéarité, alignement ou parallélisme.

Exemple

Énoncé. On donne $\vec{u}(-2, 5)$, $\vec{v}(6, -15)$ et $\vec{w}(3, -7)$.

Premier couple. On calcule :

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= (-2) \times (-15) - 6 \times 5 \\ &= 30 - 30 = 0.\end{aligned}$$

D'après la condition analytique de colinéarité, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; en effet, $\vec{v} = -3\,\vec{u}$.

Second couple. On calcule :

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{w}) &= (-2) \times (-7) - 3 \times 5 \\ &= 14 - 15 = -1.\end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas nul : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple

Énoncé. Les points $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(7, 7)$ sont-ils alignés ?

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(3, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(9, 6)$.

Déterminant. On calcule :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 3 \times 6 - 9 \times 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après la condition analytique d'alignement, A, B et C sont alignés.

Autre voie. $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$: on retrouve la même conclusion.

À retenir : L'ordre des deux vecteurs

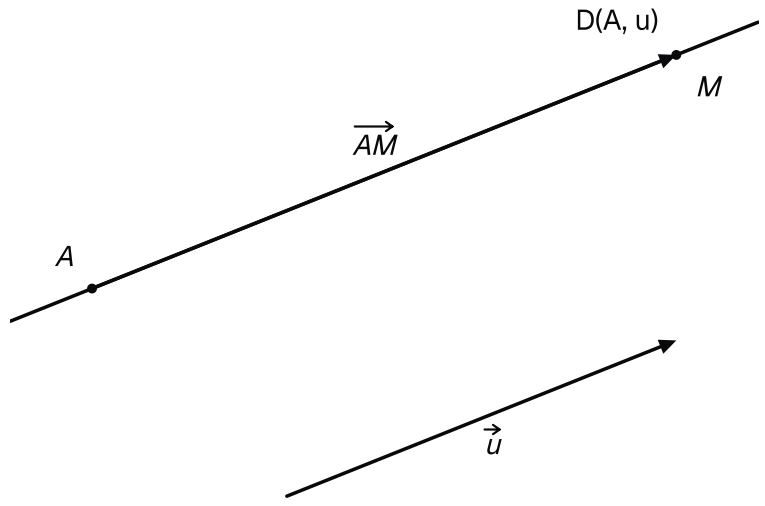
L'ordre des vecteurs compte : $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$. Le signe change, mais un déterminant nul le reste. Pour une question de colinéarité, l'ordre est donc sans effet sur la conclusion.

Droite et représentation paramétrique

Définition : Droite définie par un point et un vecteur directeur

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur **non nul**. La **droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$**, notée $D(A, \vec{u})$, est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle un **vecteur directeur** de cette droite.



Un point M appartient à la droite D(A, u) exactement quand le vecteur AM est colinéaire au vecteur directeur u.

Propriété : Vecteurs directeurs et points d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $D = D(A, \vec{u})$.

- Si B est un point de D distinct de A, alors D est la droite (AB) et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D.
- Tout vecteur **non nul** colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

- Si C est un point de D, alors $D = D(C, \vec{u})$.

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A, y_A)$ un point et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

Ce système, où t décrit $\mathbb{R}$, s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$; le réel t est le **paramètre**.

Méthode : représentation paramétrique et appartenance

1. **Repère** un point A de la droite et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ non nul. Pour la droite (AB), choisis $\overrightarrow{AB}$.
2. **Écris** $x = x_A + t\alpha$ et $y = y_A + t\beta$, avec une accolade et « t réel ».
3. **Pour un point donné** : tire t de l'équation des abscisses (de celle des ordonnées si $\alpha = 0$), puis remplace-le dans l'autre équation. Le point appartient à la droite quand la même valeur convient aux deux, et seulement dans ce cas.

Exemple

Énoncé. D passe par $E(2, -1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3, 2)$.

Représentation. Une représentation paramétrique de D est

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

avec t réel.

Un point. Pour $t = 2$, on obtient le point $(8, 3)$ de D.

Appartenance. Pour $K(-4, -5)$: $2 + 3t = -4$ donne $t = -2$, puis $y = -1 + 2 \times (-2) = -5$. La même valeur convient : K appartient à D.

À retenir : Une droite, plusieurs représentations

La droite D de l'exemple admet bien d'autres représentations. Avec le point $(8, 3)$ et le vecteur $2\,\vec{u}(6, 4)$, on écrit $x = 8 + 6s$ et $y = 3 + 4s$, avec s réel. Les deux écritures décrivent les mêmes points : seul le réglage du paramètre change.

Attention : Le même paramètre pour les deux coordonnées

Sur la droite D de l'exemple, teste le point $(5, 2)$. L'abscisse donne $2 + 3t = 5$, soit $t = 1$. L'ordonnée donne $-1 + 2t = 2$, soit $t = \frac{3}{2}$. Les deux valeurs diffèrent : le point $(5, 2)$ n'est pas sur D.

Équation cartésienne

Théorème : Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$: un point $M(x, y)$ appartient à D si et seulement si $ax + by + c = 0$. Une telle équation s'appelle une **équation cartésienne** de D.
- Réciproquement, si a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Méthode : équation cartésienne par un point et un vecteur

1. **Choisis** un point $A(x_A, y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.
2. **Écris** que $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : leur déterminant est nul.
3. **Développe** puis range les termes en $ax + by + c = 0$.
4. **Vérifie** deux choses : A satisfait l'équation, et $(-b, a)$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple

Énoncé. Équation cartésienne de la droite passant par $G(1, 3)$, de vecteur directeur $\vec{u}(2, -5)$.

Déterminant. On a $\overrightarrow{GM}(x - 1, y - 3)$. D'après la condition analytique de colinéarité, $M(x, y)$ est sur la droite si et seulement si $\det(\overrightarrow{GM}, \vec{u}) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{GM}, \vec{u}) &= (x - 1) \times (-5) \\ &\quad - 2 \times (y - 3).\end{aligned}$$

Développement. On obtient $-5x - 2y + 11 = 0$, soit $5x + 2y - 11 = 0$ en multipliant par -1.

Contrôle. $5 \times 1 + 2 \times 3 - 11 = 0$, et $(-2, 5) = -\vec{u}$.

Attention : Le vecteur directeur se lit (-b, a)

Pour la droite d'équation $4x - y + 2 = 0$, un vecteur directeur est $(1, 4)$, pas $(4, -1)$.

Contrôle avec le point $(0, 2)$ de la droite : $(0+1, 2+4) = (1, 6)$ vérifie $4 - 6 + 2 = 0$. En revanche, $(0+4, 2-1) = (4, 1)$ donne $16 - 1 + 2 = 17$.

Équation réduite et passage d'une forme à l'autre

Propriété : Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

- Si $b \neq 0$, la droite D admet une **unique** équation de la forme $y = mx + p$, son **équation réduite**. Le réel m est le **coefficient directeur** de D et le vecteur $\vec{u}(1, m)$ est un vecteur directeur de D.
- Si $b = 0$, la droite D a une équation de la forme $x = k$: elle est parallèle à l'axe des ordonnées, et $\vec{j}$ est un vecteur directeur de D.

Exemple

Rappel du collège. La droite d'équation $y = mx + p$ représente la fonction affine $x \mapsto mx + p$.

Cas $b \neq 0$. $6x - 3y + 9 = 0$ équivaut à $3y = 6x + 9$, soit $y = 2x + 3$. Coefficient directeur 2 ; vecteur directeur $(1, 2)$.

Cas $b = 0$. $2x - 5 = 0$ équivaut à $x = \dfrac{5}{2}$. Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées ; elle n'a pas d'équation réduite.

Méthode : changer de représentation

1. **De l'équation $ax + by + c = 0$ vers une représentation paramétrique** : prends le vecteur $(-b, a)$; donne une valeur à x (ou à y) pour trouver un point ; écris l'accolade.
2. **D'une représentation paramétrique vers une équation** : tire t d'une des deux lignes, puis remplace-le dans l'autre. La méthode du déterminant convient aussi.
3. **Termine** en testant un point connu dans le résultat.

Exemple

Vers une équation. Soit D la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

La seconde ligne donne $t = y - 4$. Donc $x = 1 - 2(y - 4) = 9 - 2y$, soit $x + 2y - 9 = 0$. Contrôle : $1 + 2 \times 4 - 9 = 0$.

Vers une représentation. La droite D' : $3x + y - 6 = 0$ a pour vecteur directeur $(-1, 3)$. Avec $x = 0$, on trouve $y = 6$. Donc D' admet la représentation

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 6 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Attention : Deux écritures pour une seule droite

Les équations $x - 3y + 2 = 0$ et $-2x + 6y - 4 = 0$ semblent différentes. Pourtant, la seconde est la première multipliée par -2 : elles ont exactement les mêmes solutions. Elles décrivent donc la même droite. Compare les coefficients avant de conclure.

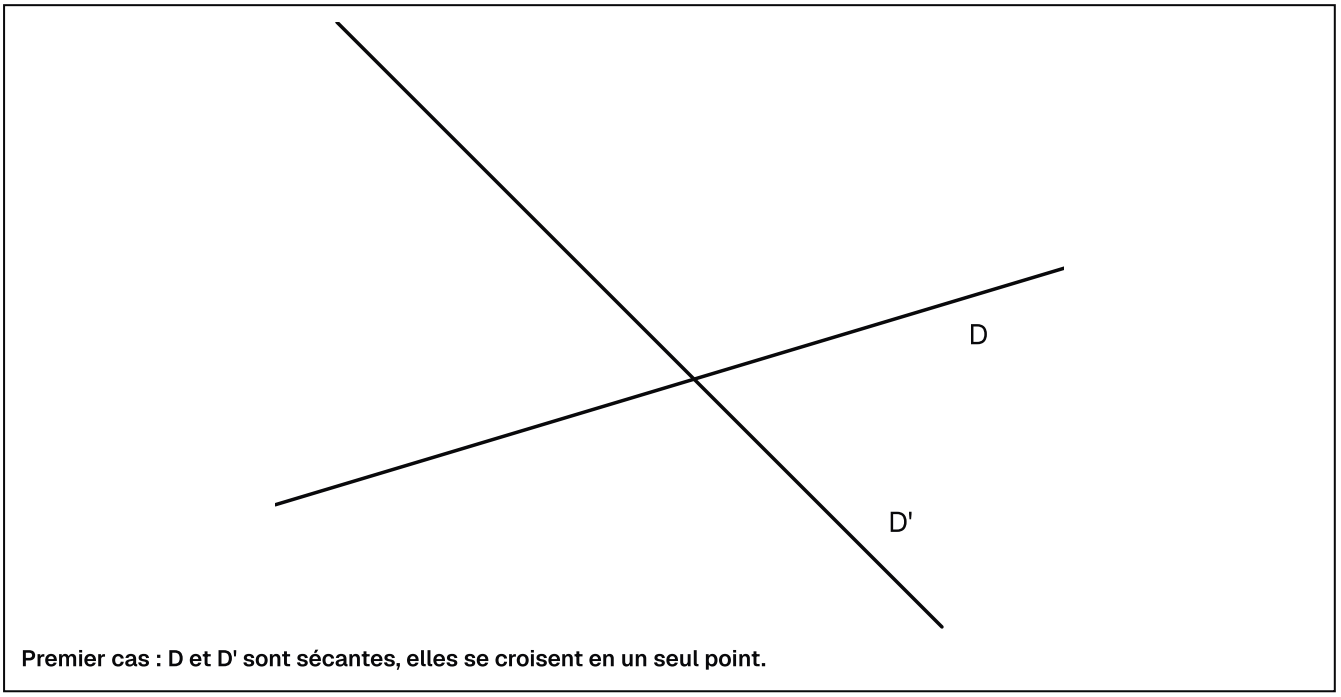
Positions relatives de deux droites

Théorème : Positions relatives de deux droites

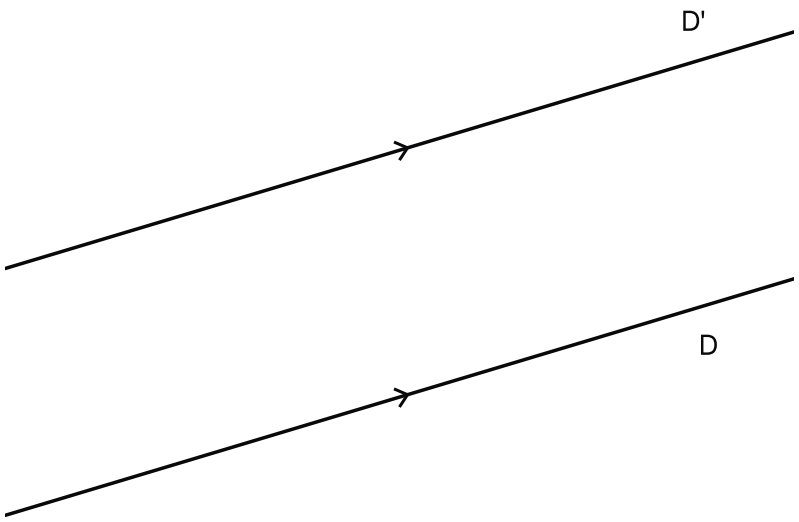
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- D et D' sont **parallèles** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Deux droites parallèles sont soit **confondues**, soit **strictement parallèles** (sans point commun).
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les droites D et D' sont **sécantes** : elles ont un seul point commun.

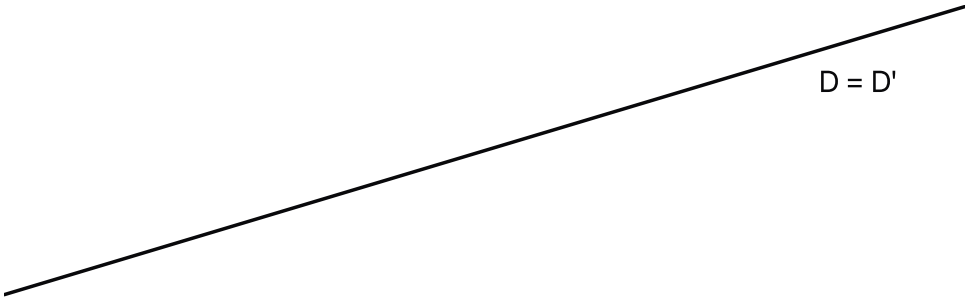
En particulier, les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.



Premier cas : D et D' sont sécantes, elles se croisent en un seul point.



Deuxième cas : D et D' sont strictement parallèles, sans aucun point commun.



Troisième cas : D et D' sont confondues, leurs points communs forment toute la droite.

Méthode : position relative et point commun

1. **Trouve** un vecteur directeur de chaque droite.
2. **Calcule** leur déterminant. Deux cas se présentent.
3. **Déterminant nul** : les droites sont parallèles. Prends un point de l'une et teste-le dans une équation de l'autre : confondues s'il convient, strictement parallèles sinon.
4. **Déterminant non nul** : les droites sont sécantes. Si elles sont données par deux équations cartésiennes, commence par écrire une représentation paramétrique de l'une (méthode « changer de représentation »). Reporte-la ensuite dans l'équation de l'autre : reporter, c'est remplacer x et y par leurs expressions en fonction de t. Résous en t, puis calcule le point commun.

Exemple

Énoncé. $D : 2x - 3y + 1 = 0$ et $D' : -4x + 6y + 5 = 0$.

Parallélisme. On calcule :

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= 2 \times 6 - (-4) \times (-3) \\ &= 12 - 12 = 0. \end{aligned}$$

D'après les positions relatives de deux droites, D et D' sont parallèles.

Point test. Le point $(1, 1)$ est sur D, car $2 - 3 + 1 = 0$. Dans l'équation de D' : $-4 + 6 + 5 = 7$, qui n'est pas nul. Les droites sont strictement parallèles.

Exemple

Énoncé. $D : 2x - y - 1 = 0$ et D' la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Sécantes. Vecteurs directeurs $(1, 2)$ et $(1, -2)$; déterminant $1 \times (-2) - 1 \times 2 = -4$, non nul.

Report. On remplace x et y dans l'équation de D : $2(3 + t) - (1 - 2t) - 1 = 0$, soit $4t + 4 = 0$, donc $t = -1$.

Point commun. $x = 3 - 1 = 2$ et $y = 1 + 2 = 3$: c'est le point $(2, 3)$. Contrôle : $2 \times 2 - 3 - 1 = 0$.

Attention **: Parallèles, mais peut-être confondues**

Pour $x - 2y + 4 = 0$ et $3x - 6y + 12 = 0$, on trouve $1 \times (-6) - 3 \times (-2) = 0$. Les droites sont parallèles, mais le point $(0, 2)$ vérifie les deux équations : elles sont donc confondues.

Un déterminant nul ne suffit jamais à dire « aucun point commun ».

Quel outil pour quelle question ?

Méthode **: Quel outil pour quelle question ?**

- **Coordonnées d'un vecteur, d'un milieu** : arrivée moins départ, moyennes.
- **Deux vecteurs colinéaires ?** Le déterminant, ou un coefficient k.
- **Trois points alignés ?** Le déterminant de deux vecteurs issus du même point.
- **Décrire une droite** : un point et un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique.
- **Un point est-il sur une droite ?** Le même paramètre, ou l'équation vérifiée.
- **Équation cartésienne** : le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et du vecteur directeur.
- **Parallèles ou sécantes ?** Le déterminant des vecteurs directeurs.

- **Point d'intersection** : le report d'une représentation paramétrique dans une équation.

Vecteur défini par deux points

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Milieu I du segment [AB]

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Déterminant de u(x, y) et v(x', y')

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

Représentation paramétrique de D(A, u), u(alpha, beta) non nul

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Vecteur directeur de la droite ax + by + c = 0

$$\vec{u}(-b, a)$$

Équation réduite, b non nul

$$y = mx + p, \quad \vec{u}(1, m)$$

Droites ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0 parallèles

$$ab' - a'b = 0$$

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la propriété à chaque conclusion : « d'après la condition analytique de colinéarité », « d'après l'équation cartésienne d'une droite ». Annonce les cas quand il y en a. Fais la figure sur ton cahier, sur papier quadrillé : elle contrôle tes calculs. Vérifie chaque équation avec un point connu.