BURHAN

La droite dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/exercices/examen

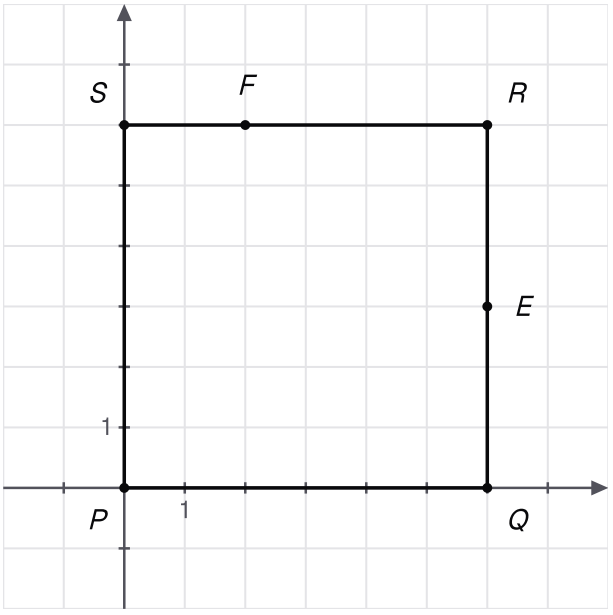
Chapitre	Palier	Exercices
La droite dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux droites qui se coupent dans un carré

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine P. Les points P, $Q(6,0)$, $R(6,6)$ et $S(0,6)$ sont les sommets du carré $PQRS$. Fais la figure sur ton cahier.

- E est le milieu du côté $[QR]$;
- F est le point du côté $[SR]$ tel que $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SR}$.



Le carré PQRS d'origine P, avec E milieu du côté [QR] et F sur le côté [SR], au tiers de S vers R.

1. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de E et de F, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QF}$.

INDICE

Début : pour E, la moyenne des coordonnées de Q et R. **Ensuite :** pour F, calcule d'abord $\overrightarrow{SR}$.

2. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (PE), puis une représentation paramétrique de la droite (QF).

INDICE

Outil : pour (PE), écris $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PE}) = 0$. **Ensuite :** pour (QF), le point Q et le vecteur directeur $\overrightarrow{QF}$.

3. 1,25 pts

Justifier que les droites (PE) et (QF) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection K.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QF}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (QF) dans l'équation de (PE) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

4. 0,75 pts

En déduire le réel k tel que $\overrightarrow{PK} = k\,\overrightarrow{PE}$. Le point K appartient-il au segment $[PE]$?

INDICE

Début : compare les coordonnées de $\overrightarrow{PK}$ à celles de $\overrightarrow{PE}$. **Rappel :** d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite » du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan », K est sur $[PE]$ si et seulement si $0 \leq k \leq 1$.

5. 1,25 pts

On note Δ la droite passant par R et parallèle à (PE). Déterminer une équation cartésienne de Δ. En déduire que Δ coupe la droite (PS) au milieu T du segment $[PS]$.

INDICE

Outil : Δ a le même vecteur directeur $(2, 1)$ que (PE) ; écris que $\overrightarrow{RM}$ et ce vecteur ont un déterminant nul. **Ensuite :** reporte une représentation paramétrique de (PS) dans cette équation.

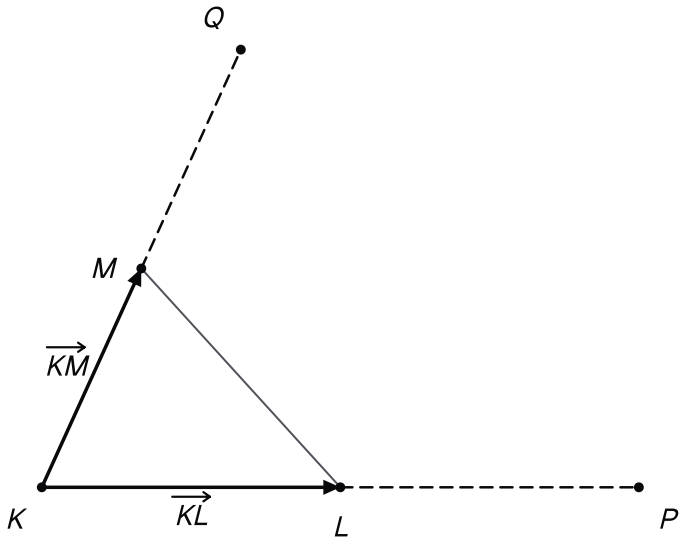
Exercice 2 — 5 pts

Un trapèze dans un repère qui n'est pas orthonormé

KLM est un triangle. On munit le plan du repère $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$, qui n'est pas orthonormé en général. On place les points P et Q tels que

$$\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL},$$
$$\overrightarrow{KQ} = 2\,\overrightarrow{KM}.$$

Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle KLM, le repère d'origine K formé par les vecteurs KL et KM, et les points P et Q tels que KP vaut deux fois KL et KQ deux fois KM.

1. — 0,75 pts

Justifier que $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$ est un repère. Donner les coordonnées des points K, L, M, P et Q.

INDICE

Outil : la définition d'un repère. **Ensuite :** les coordonnées d'un point X sont les coefficients de $\overrightarrow{KX}$ selon $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$.

2. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{LM}$ et de $\overrightarrow{PQ}$. En déduire que les droites (LM) et (PQ) sont parallèles, puis que $LPQM$ est un trapèze.

INDICE

Outil : le déterminant des deux vecteurs. **Ensuite :** un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

3. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la diagonale (LQ) et une représentation paramétrique de la diagonale (MP).

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{LQ}$, puis écris $\det(\overrightarrow{LX}, \overrightarrow{LQ}) = 0$ pour un point $X(x, y)$. **Ensuite :** pour (MP), le point M et le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

4. 1,25 pts

Justifier que les diagonales (LQ) et (MP) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection N.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{LQ}$ et $\overrightarrow{MP}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (MP) dans l'équation de (LQ) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

5. 1,25 pts

On note J le milieu du segment $[PQ]$. Calculer les coordonnées de J. En déduire que les points K, N et J sont alignés, et exprimer $\overrightarrow{KN}$ en fonction de $\overrightarrow{KJ}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du milieu restent valables dans ce repère. **Ensuite :** la condition analytique d'alignement avec $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KJ}$.

Exercice 3 5 pts

Le triangle formé par trois droites

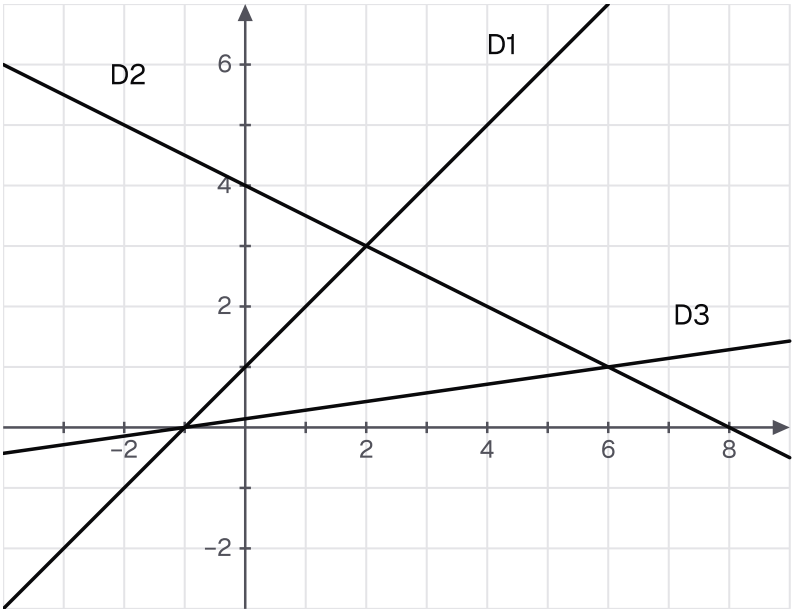
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites

$$D_1 : x - y + 1 = 0,$$
$$D_2 : x + 2y - 8 = 0,$$

et la droite D_3 de représentation paramétrique

$$D_3 : \begin{cases} x = -1 + 7t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On note X le point commun à D_1 et D_2, Y le point commun à D_1 et D_3, et Z le point commun à D_2 et D_3.



Les trois droites D1, D2 et D3 de l'énoncé, tracées dans le repère.

1. 1 pts

Donner un vecteur directeur de chacune des trois droites. Justifier qu'elles sont sécantes deux à deux.

INDICE

Outil : $(-b, a)$ pour une équation cartésienne ; les coefficients de t pour la représentation paramétrique. **Ensuite :** trois déterminants à calculer.

2. 1 pts

Écrire une représentation paramétrique de D_1. En déduire les coordonnées de X.

INDICE

Début : donne à x la valeur 0 pour trouver un point de D_1, et utilise $\vec{u}_1$. **Ensuite :** reporte cette représentation dans l'équation de D_2 : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de Y, puis celles de Z. Vérifier que les points X, Y et Z forment un triangle.

INDICE

Outil : reporte la représentation de D_3 dans l'équation de D_1, puis dans celle de D_2 ; la valeur $t = 0$ est une solution comme une autre. **Ensuite :** pour le triangle, calcule le déterminant de $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{XZ}$.

4. 0,75 pts

Déterminer une équation cartésienne de D_3 en éliminant le paramètre. Vérifier que Y et Z la satisfont.

INDICE

Début : la seconde ligne donne directement t en fonction de y.

5. 1 pts

On note I le milieu de $[XZ]$ et J le milieu de $[YZ]$. Déterminer une équation de la droite Δ parallèle à D_1 passant par I. En déduire que J appartient à Δ.

INDICE

Début : calcule I ; Δ est dirigée par $\vec{u}_1$, écris que $\overrightarrow{IM}$ et $\vec{u}_1$ ont un déterminant nul. **Ensuite :** calcule J et teste ses coordonnées.

Exercice 4 5 pts

Des droites qui tournent autour d'un point

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D de représentation paramétrique

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour tout réel m, on note D_m la droite d'équation cartésienne $mx - y + 5 - m = 0$.

1. 0,75 pts

Donner un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D. Déterminer une équation cartésienne de D, puis son équation réduite.

INDICE

Début : la valeur $t = 0$ donne un point ; les coefficients de t donnent un vecteur. **Ensuite :** écris $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, puis isole y.

2. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel m, le point $\Omega(1, 5)$ appartient à la droite D_m. Le point Ω appartient-il à la droite D ?

INDICE

Outil : remplace x par 1 et y par 5 dans l'équation de D_m, en gardant la lettre m. **Ensuite :** fais de même avec l'équation de D trouvée à la question 1.

3. 1,25 pts

Donner un vecteur directeur $\vec{v}_m$ de la droite D_m. Déterminer le réel m pour lequel les droites D_m et D sont parallèles. En déduire que, pour cette valeur, elles sont strictement parallèles.

INDICE

Outil : pour l'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $(-b, a)$. **Ensuite :** calcule $\det(\vec{u}, \vec{v}_m)$ en fonction de m, puis utilise la question 2.

4. 1 pts

Dans cette question, $m = 0$. Écrire l'équation de D_0 et donner un vecteur directeur de cette droite. Prouver que les droites D_0 et D se coupent en un point E, et trouver ce point par report.

INDICE

Début : remplace m par 0 ; la droite obtenue est parallèle à un axe. **Ensuite :** reporte la représentation paramétrique de D dans l'équation de D_0 : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

5. 1,25 pts

Déterminer le réel m pour lequel la droite D_m passe par le point A de la question 1. En déduire, sans nouveau report, le point commun à D et à cette droite, puis une représentation paramétrique de cette droite.

INDICE

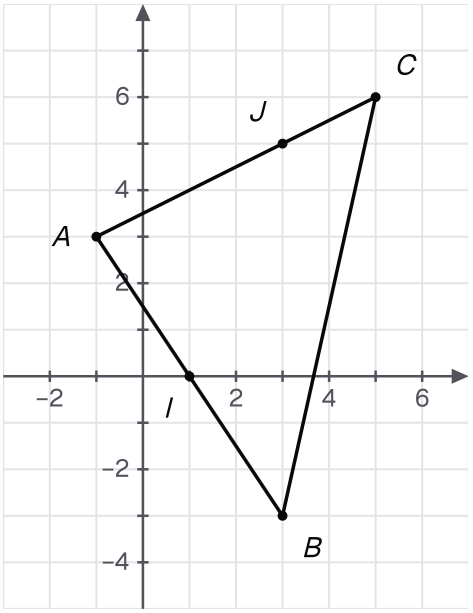
Début : remplace x et y par les coordonnées de $A(0,1)$ dans l'équation de D_m et résous en m. **Ensuite :** la question 3 dit si les deux droites sont sécantes ; deux droites sécantes ont un seul point commun.

Exercice 5 — 5 pts

Une droite qui traverse un triangle

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle ABC avec $A(-1, 3)$, $B(3, -3)$ et $C(5, 6)$. Fais la figure sur ton cahier.

- I est le milieu du côté $[AB]$;
- J est le point du côté $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Le triangle ABC de l'énoncé, avec I milieu de [AB] et J sur [AC], aux deux tiers de A vers C.

1. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point I, puis celles du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et du point J.

INDICE

Début : pour I, la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées de A et B. **Ensuite :** pour J, calcule $\overrightarrow{AJ}$, puis écris l'égalité des abscisses et celle des ordonnées.

2. — 1 pts

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ), puis une équation cartésienne de la droite (BC).

INDICE

Début : pour (IJ), le point I et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$. **Ensuite :** pour (BC), calcule $\overrightarrow{BC}$, puis écris $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

3. 1,25 pts

Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point commun K.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (IJ) dans l'équation de (BC) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

4. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ) en éliminant le paramètre. Vérifier que le point K la satisfait, puis que le point C est le milieu du segment $[BK]$.

INDICE

Début : tire t de la seconde équation ($t = \dfrac{y}{5}$) et reporte-le dans la première. **Ensuite :** calcule les coordonnées du milieu de $[BK]$ et compare-les à celles de C.

5. 1 pts

On note G le point du côté $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculer les coordonnées de G. En déduire que la droite (JG) est parallèle à la droite (AB).

INDICE

Début : procède comme pour J à la question 1, avec $\overrightarrow{BC}(2, 9)$. **Ensuite :** calcule $\det(\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{AB})$.