BURHAN

La droite dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/exercices/examen

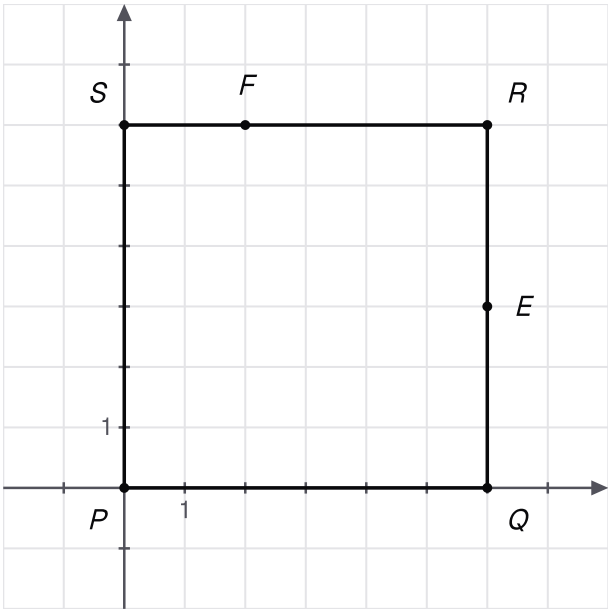
Chapitre	Palier	Exercices
La droite dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux droites qui se coupent dans un carré

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine P. Les points P, $Q(6,0)$, $R(6,6)$ et $S(0,6)$ sont les sommets du carré $PQRS$. Fais la figure sur ton cahier.

- E est le milieu du côté $[QR]$;
- F est le point du côté $[SR]$ tel que $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SR}$.



Le carré PQRS d'origine P, avec E milieu du côté [QR] et F sur le côté [SR], au tiers de S vers R.

1. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de E et de F, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QF}$.

INDICE

Début : pour E, la moyenne des coordonnées de Q et R. **Ensuite :** pour F, calcule d'abord $\overrightarrow{SR}$.

CORRIGÉ

Points E et F. D'après les coordonnées du milieu, E a pour coordonnées $\left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (6,3)$.

Pour F, on a $\overrightarrow{SR}(6-0, 6-6)$, soit $\overrightarrow{SR}(6,0)$. D'après les calculs sur les coordonnées, $\overrightarrow{SF}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\times 6, \frac{1}{3}\times 0\right) = (2,0)$. Avec $F(x_F, y_F)$: $x_F - 0 = 2$ et $y_F - 6 = 0$, d'où $F(2,6)$.

Vecteurs. D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{PE}$ a pour coordonnées $(6-0, 3-0) = (6,3)$ et $\overrightarrow{QF}$ a pour coordonnées $(2-6, 6-0) = (-4,6)$.

Conclusion. $E(6,3)$, $F(2,6)$, $\overrightarrow{PE}(6,3)$ et $\overrightarrow{QF}(-4,6)$.

2. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (PE), puis une représentation paramétrique de la droite (QF).

INDICE

Outil : pour (PE), écris $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PE}) = 0$. **Ensuite :** pour (QF), le point Q et le vecteur directeur $\overrightarrow{QF}$.

CORRIGÉ

Droite (PE). Soit $M(x, y)$ un point du plan ; $\overrightarrow{PM}(x, y)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M appartient à (PE) si et seulement si $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PE}) = 0$, c'est-à-dire $x \times 3 - 6 \times y = 0$, soit $3x - 6y = 0$.

En divisant par 3 : $x - 2y = 0$. Contrôle avec E : $6 - 2 \times 3 = 0$.

Droite (QF). D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec le point $Q(6, 0)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{QF}(-4, 6)$:

$$(QF) : \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Conclusion. (PE) a pour équation cartésienne $x - 2y = 0$, et (QF) admet la représentation paramétrique ci-dessus.

3. 1,25 pts

Justifier que les droites (PE) et (QF) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection K.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QF}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (QF) dans l'équation de (PE) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

CORRIGÉ

Sécantes.

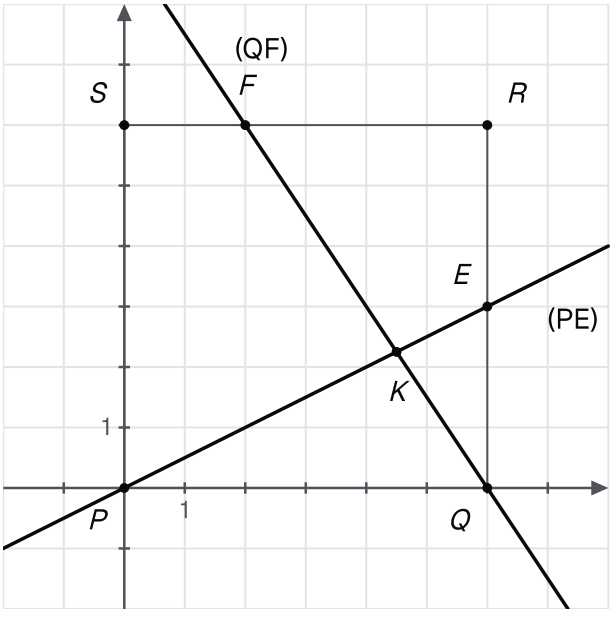
$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{PE},\overrightarrow{QF})\\&=6\times 6-(-4)\times 3\\&=36+12=48\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul : d'après les positions relatives de deux droites, (PE) et (QF) sont sécantes.

Report. On remplace x par $6-4t$ et y par $6t$ dans l'équation $x-2y=0$: $(6-4t)-2\times 6t=0$, soit $6-16t=0$. Ainsi $16t=6$, donc $t=\dfrac{3}{8}$.

Pour cette valeur, $x=6-4\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{2}$ et $y=6\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{4}$. Contrôle : $\dfrac{9}{2}-2\times\dfrac{9}{4}=0$.

Conclusion. Les droites (PE) et (QF) sont sécantes en $K\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{9}{4}\right)$.



Les droites (PE) et (QF) se coupent au point K, d'abscisse neuf demis et d'ordonnée neuf quarts.

4. 0,75 pts

En déduire le réel k tel que $\overrightarrow{PK} = k\,\overrightarrow{PE}$. Le point K appartient-il au segment $[PE]$?

INDICE

Début : compare les coordonnées de $\overrightarrow{PK}$ à celles de $\overrightarrow{PE}$. **Rappel :** d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite » du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan », K est sur $[PE]$ si et seulement si $0 \leq k \leq 1$.

CORRIGÉ

Réel k. $\overrightarrow{PK}\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ et $\overrightarrow{PE}(6, 3)$. Les abscisses imposent $6k = \dfrac{9}{2}$, soit $k = \dfrac{3}{4}$; contrôle sur les ordonnées : $\dfrac{3}{4} \times 3 = \dfrac{9}{4}$. Donc $\overrightarrow{PK} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{PE}$.

Position. Dans le repère (P, E) de la droite (PE), le point K a donc pour abscisse $\dfrac{3}{4}$. Comme $0 \leq \dfrac{3}{4} \leq 1$, d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite » du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan », K est sur le segment $[PE]$.

Conclusion. $k = \dfrac{3}{4}$, et le point K appartient au segment $[PE]$.

5. 1,25 pts

On note Δ la droite passant par R et parallèle à (PE). Déterminer une équation cartésienne de Δ. En déduire que Δ coupe la droite (PS) au milieu T du segment $[PS]$.

INDICE

Outil : Δ a le même vecteur directeur $(2, 1)$ que (PE) ; écris que $\overrightarrow{RM}$ et ce vecteur ont un déterminant nul. **Ensuite :** reporte une représentation paramétrique de (PS) dans cette équation.

CORRIGÉ

Équation. Δ est parallèle à (PE) : d'après les positions relatives de deux droites, elle est dirigée par le vecteur $(2, 1)$, colinéaire à $\overrightarrow{PE}(6, 3)$. Soit $M(x, y)$; $\overrightarrow{RM}(x - 6, y - 6)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M appartient à Δ si et seulement si

$$\begin{aligned}(x - 6) \times 1 \\ - 2 \times (y - 6) = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire $x - 6 - 2y + 12 = 0$, soit $\Delta : x - 2y + 6 = 0$.

Intersection. La droite (PS) passe par $P(0, 0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{PS}(0, 6)$: elle admet la représentation $x = 0$, $y = 6t$ ($t \in \mathbb{R}$). En reportant dans l'équation de Δ : $0 - 2 \times 6t + 6 = 0$, soit $12t = 6$, donc $t = \dfrac{1}{2}$, puis $y = 3$.

Conclusion. $\Delta : x - 2y + 6 = 0$ coupe (PS) au point $T(0, 3)$. Comme $\overrightarrow{PT} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{PS}$, le point T est le milieu du segment $[PS]$.

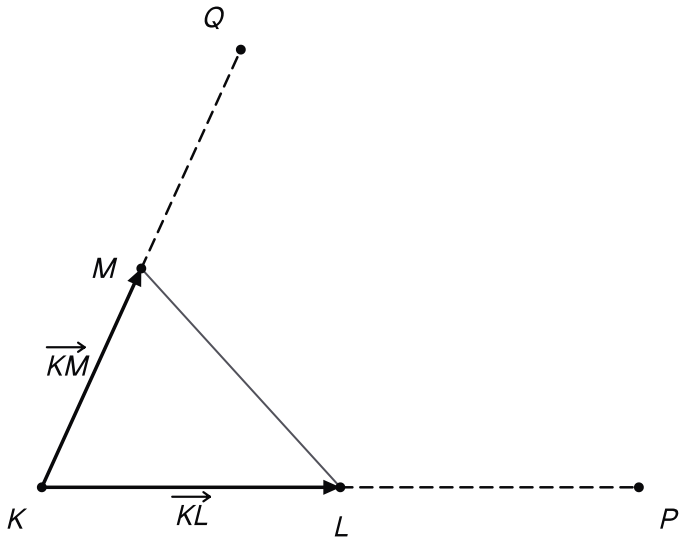
Exercice 2 5 pts

Un trapèze dans un repère qui n'est pas orthonormé

KLM est un triangle. On munit le plan du repère $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$, qui n'est pas orthonormé en général. On place les points P et Q tels que

$$\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL},$$
$$\overrightarrow{KQ} = 2\,\overrightarrow{KM}.$$

Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle KLM, le repère d'origine K formé par les vecteurs KL et KM, et les points P et Q tels que KP vaut deux fois KL et KQ deux fois KM.

1. 0,75 pts

Justifier que $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$ est un repère. Donner les coordonnées des points K, L, M, P et Q.

INDICE

Outil : la définition d'un repère. **Ensuite :** les coordonnées d'un point X sont les coefficients de $\overrightarrow{KX}$ selon $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$.

CORRIGÉ

Repère. Les points K, L et M ne sont pas alignés, puisque KLM est un triangle : les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ ne sont pas colinéaires. D'après la définition d'un repère, $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$ est un repère.

Coordonnées. D'après la définition des coordonnées d'un point, on lit les coefficients de $\overrightarrow{KL}$ et de $\overrightarrow{KM}$:

- $\overrightarrow{KK} = \vec{0}$, donc $K(0, 0)$;
- $\overrightarrow{KL} = 1\,\overrightarrow{KL} + 0\,\overrightarrow{KM}$, donc $L(1, 0)$;
- $\overrightarrow{KM} = 0\,\overrightarrow{KL} + 1\,\overrightarrow{KM}$, donc $M(0, 1)$;
- $\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL} + 0\,\overrightarrow{KM}$, donc $P(2, 0)$;
- $\overrightarrow{KQ} = 0\,\overrightarrow{KL} + 2\,\overrightarrow{KM}$, donc $Q(0, 2)$.

Conclusion. $(K, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM})$ est un repère, dans lequel $K(0, 0)$, $L(1, 0)$, $M(0, 1)$, $P(2, 0)$ et $Q(0, 2)$.

2. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{LM}$ et de $\overrightarrow{PQ}$. En déduire que les droites (LM) et (PQ) sont parallèles, puis que $LPQM$ est un trapèze.

INDICE

Outil : le déterminant des deux vecteurs. **Ensuite :** un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

CORRIGÉ

Vecteurs. D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{LM}$ a pour coordonnées $(0-1, 1-0) = (-1, 1)$ et $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(0-2, 2-0) = (-2, 2)$.

Parallélisme.

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{PQ})\\&= (-1) \times 2 - (-2) \times 1\\&= 0\end{aligned}$$

D'après la condition analytique de colinéarité, ces vecteurs sont colinéaires ; en effet, $\overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{LM}$. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites (LM) et (PQ) sont parallèles.

Ces droites sont distinctes. En effet, $\overrightarrow{PL}(-1, 0)$ et :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PQ})\\&= (-1) \times 2 - (-2) \times 0\\&= -2\end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas nul : d'après la condition analytique d'alignement, P, L et Q ne sont pas alignés, donc L n'est pas sur (PQ).

Conclusion. Les droites (LM) et (PQ) sont parallèles. Le quadrilatère $LPQM$ a donc deux côtés opposés, $[LM]$ et $[PQ]$, parallèles : c'est un trapèze.

3. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la diagonale (LQ) et une représentation paramétrique de la diagonale (MP).

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{LQ}$, puis écris $\det(\overrightarrow{LX}, \overrightarrow{LQ}) = 0$ pour un point $X(x, y)$. **Ensuite :** pour (MP), le point M et le vecteur $\overrightarrow{MP}$.

CORRIGÉ

Diagonale (LQ)**.** $\overrightarrow{LQ}(0-1, 2-0)$, soit $\overrightarrow{LQ}(-1, 2)$. Pour un point $X(x, y)$, $\overrightarrow{LX}(x-1, y)$. D'après la condition analytique de colinéarité, X appartient à (LQ) si et seulement si $\det(\overrightarrow{LX}, \overrightarrow{LQ}) = 0$, avec :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{LX}, \overrightarrow{LQ}) \\ &= 2(x-1) - (-1) \times y \\ &= 2x + y - 2 \end{aligned}$$

D'où l'équation $2x + y - 2 = 0$. Contrôle avec $Q(0, 2)$: $0 + 2 - 2 = 0$.

Diagonale (MP)**.** $\overrightarrow{MP}(2-0, 0-1)$, soit $\overrightarrow{MP}(2, -1)$. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec le point $M(0, 1)$:

$$(MP) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Conclusion. (LQ) a pour équation cartésienne $2x + y - 2 = 0$, et (MP) admet la représentation paramétrique ci-dessus.

4. 1,25 pts

Justifier que les diagonales (LQ) et (MP) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection N.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{LQ}$ et $\overrightarrow{MP}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (MP) dans l'équation de (LQ) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

CORRIGÉ

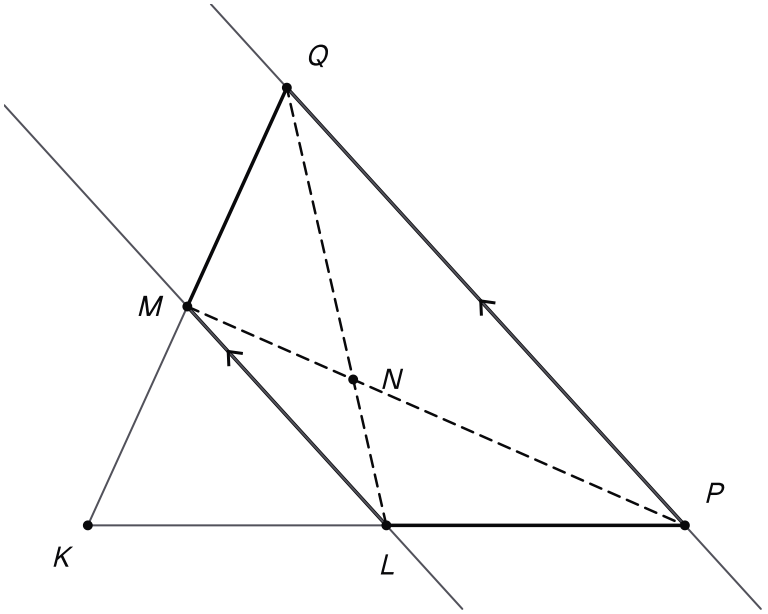
Sécantes.

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{LQ}, \overrightarrow{MP})\\&= (-1) \times (-1) - 2 \times 2\\&= -3\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul : d'après les positions relatives de deux droites, les diagonales (LQ) et (MP) sont sécantes.

Report. On remplace x par $2t$ et y par $1 - t$ dans l'équation de (LQ) : $2 \times 2t + (1 - t) - 2 = 0$, soit $3t - 1 = 0$, donc $t = \dfrac{1}{3}$. Pour cette valeur, $x = \dfrac{2}{3}$ et $y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. Contrôle : $2 \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} - 2 = 0$.

Conclusion. Les diagonales (LQ) et (MP) se coupent au point $N\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.



Dans le trapèze LPQM, les côtés [LM] et [PQ] sont parallèles, et les diagonales (LQ) et (MP) se coupent en N.

5. 1,25 pts

On note J le milieu du segment $[PQ]$. Calculer les coordonnées de J. En déduire que les points K, N et J sont alignés, et exprimer $\overrightarrow{KN}$ en fonction de $\overrightarrow{KJ}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du milieu restent valables dans ce repère. **Ensuite :** la condition analytique d'alignement avec $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KJ}$.

CORRIGÉ

Milieu. D'après les coordonnées du milieu, valables dans ce repère, J a pour coordonnées $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1)$.

Alignement. Comme K est l'origine du repère, $\overrightarrow{KN}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{KJ}(1, 1)$. Alors :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{KN}, \overrightarrow{KJ}) \\ &= \frac{2}{3} \times 1 - 1 \times \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

D'après la condition analytique d'alignement, K, N et J sont alignés. De plus, chaque coordonnée de $\overrightarrow{KN}$ vaut $\frac{2}{3}$ fois la coordonnée correspondante de $\overrightarrow{KJ}$.

Conclusion. $J(1, 1)$; les points K, N et J sont alignés, et $\overrightarrow{KN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KJ}$.

Exercice 3 5 pts

Le triangle formé par trois droites

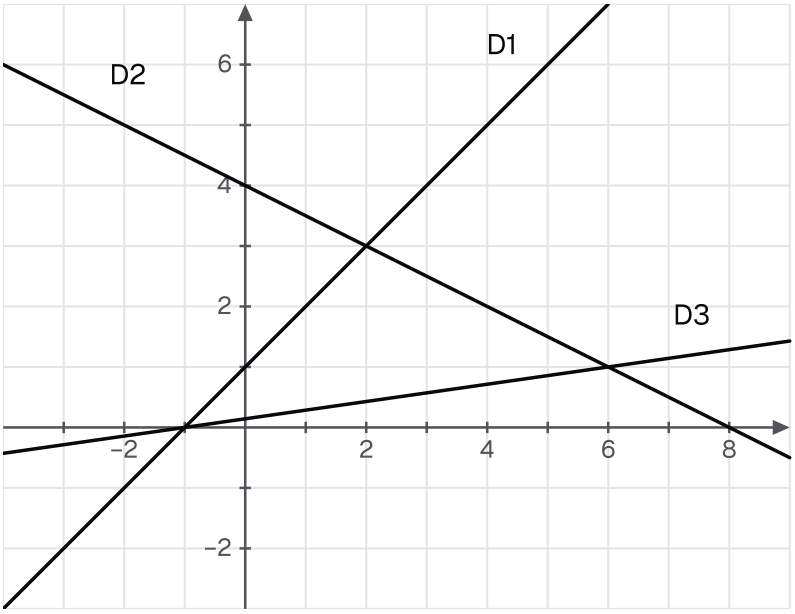
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites

$$D_1 : x - y + 1 = 0,$$
$$D_2 : x + 2y - 8 = 0,$$

et la droite D_3 de représentation paramétrique

$$D_3 : \begin{cases} x = -1 + 7t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On note X le point commun à D_1 et D_2, Y le point commun à D_1 et D_3, et Z le point commun à D_2 et D_3.



Les trois droites D1, D2 et D3 de l'énoncé, tracées dans le repère.

1. 1 pts

Donner un vecteur directeur de chacune des trois droites. Justifier qu'elles sont sécantes deux à deux.

INDICE

Outil : $(-b, a)$ pour une équation cartésienne ; les coefficients de t pour la représentation paramétrique. **Ensuite :** trois déterminants à calculer.

CORRIGÉ

Vecteurs. D'après l'équation cartésienne d'une droite, le vecteur $(-b, a)$ dirige la droite d'équation $ax + by + c = 0$: $\vec{u}_1(1, 1)$ dirige D_1 et $\vec{u}_2(-2, 1)$ dirige D_2. Dans la représentation de D_3, les coefficients de t donnent $\vec{u}_3(7, 1)$, qui dirige D_3.

Déterminants.

- $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 1 \times 1 - (-2) \times 1 = 3$;
- $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = 1 \times 1 - 7 \times 1 = -6$;
- $\det(\vec{u}_2, \vec{u}_3) = (-2) \times 1 - 7 \times 1 = -9$.

Conclusion. Aucun de ces déterminants n'est nul : d'après les positions relatives de deux droites, les trois droites sont sécantes deux à deux.

2. 1 pts

Écrire une représentation paramétrique de D_1. En déduire les coordonnées de X.

INDICE

Début : donne à x la valeur 0 pour trouver un point de D_1, et utilise $\vec{u}_1$. **Ensuite :** reporte cette représentation dans l'équation de D_2 : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

CORRIGÉ

Représentation. Pour $x = 0$, l'équation de D_1 donne $-y + 1 = 0$, soit $y = 1$: le point $(0, 1)$ est sur D_1. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec ce point et $\vec{u}_1(1, 1)$:

$$D_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Report. On remplace x par t et y par $1 + t$ dans l'équation de D_2 : $t + 2(1 + t) - 8 = 0$, soit $3t - 6 = 0$, donc $t = 2$. Le point correspondant a pour coordonnées $x = 2$ et $y = 1 + 2 = 3$. Contrôle : $2 - 3 + 1 = 0$ et $2 + 2 \times 3 - 8 = 0$.

Conclusion. D_1 admet la représentation paramétrique ci-dessus, et le point commun à D_1 et D_2 est $X(2, 3)$.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées de Y, puis celles de Z. Vérifier que les points X, Y et Z forment un triangle.

INDICE

Outil : reporte la représentation de D_3 dans l'équation de D_1, puis dans celle de D_2 ; la valeur $t = 0$ est une solution comme une autre. **Ensuite :** pour le triangle, calcule le déterminant de $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{XZ}$.

CORRIGÉ

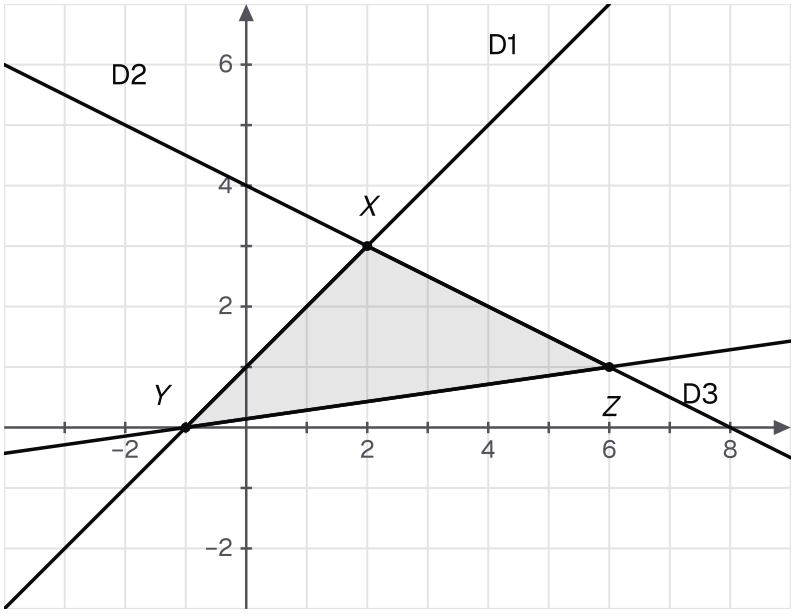
Points Y et Z. Le point de D_3 de paramètre t a pour coordonnées $(-1+7t, t)$.

- Dans l'équation de D_1 : $(-1+7t) - t + 1 = 0$, soit $6t = 0$, donc $t = 0$ et $Y(-1, 0)$. Contrôle : $-1 - 0 + 1 = 0$.
- Dans l'équation de D_2 : $(-1+7t) + 2t - 8 = 0$, soit $9t - 9 = 0$, donc $t = 1$ et $Z(6, 1)$. Contrôle : $6 + 2 \times 1 - 8 = 0$.

Triangle. $\overrightarrow{XY}(-1-2, 0-3)$ et $\overrightarrow{XZ}(6-2, 1-3)$, soit $\overrightarrow{XY}(-3, -3)$ et $\overrightarrow{XZ}(4, -2)$. Alors :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}) \\ &= (-3) \times (-2) - 4 \times (-3) \\ &= 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

Conclusion. $Y(-1, 0)$ et $Z(6, 1)$. Le déterminant n'est pas nul : d'après la condition analytique d'alignement, X, Y et Z ne sont pas alignés, et ils forment un triangle.



Les trois droites se coupent deux à deux en X(2, 3), Y(-1, 0) et Z(6, 1), sommets d'un triangle.

4. 0,75 pts

Déterminer une équation cartésienne de D_3 en éliminant le paramètre. Vérifier que Y et Z la satisfont.

INDICE

Début : la seconde ligne donne directement t en fonction de y.

CORRIGÉ

Élimination. La seconde ligne donne $t = y$. En remplaçant dans la première : $x = -1 + 7y$, soit $x - 7y + 1 = 0$.

Contrôle. Pour $Y(-1, 0)$: $-1 - 7 \times 0 + 1 = 0$; pour $Z(6, 1)$: $6 - 7 \times 1 + 1 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne de D_3 est $x - 7y + 1 = 0$, et les points Y et Z la vérifient.

5. 1 pts

On note I le milieu de $[XZ]$ et J le milieu de $[YZ]$. Déterminer une équation de la droite Δ parallèle à D_1 passant par I. En déduire que J appartient à Δ.

INDICE

Début : calcule I ; Δ est dirigée par $\vec{u}_1$, écris que $\overrightarrow{IM}$ et $\vec{u}_1$ ont un déterminant nul. **Ensuite :** calcule J et teste ses coordonnées.

CORRIGÉ

Milieu I et droite Δ. D'après les coordonnées du milieu, I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = (4, 2)$. La droite Δ est parallèle à D_1 : d'après les positions relatives de deux droites, $\vec{u}_1(1, 1)$ la dirige. Soit $M(x, y)$; $\overrightarrow{IM}(x - 4, y - 2)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M appartient à Δ si et seulement si

$$\begin{aligned}(x - 4) \times 1 \\ - 1 \times (y - 2) = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire $x - 4 - y + 2 = 0$, soit $\Delta : x - y - 2 = 0$.

Point J. D'après les coordonnées du milieu, J a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1+6}{2}, \dfrac{0+1}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Dans l'équation de Δ : $\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2} - 2 = 0$.

Conclusion. Δ a pour équation $x - y - 2 = 0$, et le point J appartient à Δ.

Exercice 4 5 pts

Des droites qui tournent autour d'un point

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D de représentation paramétrique

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour tout réel m, on note D_m la droite d'équation cartésienne $mx - y + 5 - m = 0$.

1. 0,75 pts

Donner un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D. Déterminer une équation cartésienne de D, puis son équation réduite.

INDICE

Début : la valeur $t = 0$ donne un point ; les coefficients de t donnent un vecteur. **Ensuite :** écris $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, puis isole y.

CORRIGÉ

Point et vecteur. Pour $t = 0$, on obtient le point $A(0, 1)$; les coefficients de t donnent le vecteur directeur $\vec{u}(1, 2)$.

Équations. Soit $M(x, y)$; $\overrightarrow{AM}(x, y - 1)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M appartient à D si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, c'est-à-dire :

$$x \times 2 - 1 \times (y - 1) = 0.$$

En développant, $2x - y + 1 = 0$. Contrôle avec A : $2 \times 0 - 1 + 1 = 0$. Cette équation équivaut à $y = 2x + 1$.

Conclusion. $A(0, 1)$ et $\vec{u}(1, 2)$; une équation cartésienne est $D : 2x - y + 1 = 0$, et l'équation réduite est $y = 2x + 1$, de coefficient directeur 2.

2. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel m, le point $\Omega(1,5)$ appartient à la droite D_m. Le point Ω appartient-il à la droite D ?

INDICE

Outil : remplace x par 1 et y par 5 dans l'équation de D_m, en gardant la lettre m. **Ensuite :** fais de même avec l'équation de D trouvée à la question 1.

CORRIGÉ

Point Ω et droites D_m. Soit m un réel. En remplaçant x par 1 et y par 5 dans l'équation de D_m :

$$\begin{aligned} m \times 1 - 5 + 5 - m &= m - m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le résultat est nul quel que soit m : le point Ω appartient à chaque droite D_m.

Point Ω et droite D. $2 \times 1 - 5 + 1 = -2$, qui n'est pas nul : Ω n'appartient pas à D.

Conclusion. Pour tout réel m, le point $\Omega(1,5)$ appartient à D_m ; en revanche, il n'appartient pas à D.

3. 1,25 pts

Donner un vecteur directeur $\vec{v}_m$ de la droite D_m. Déterminer le réel m pour lequel les droites D_m et D sont parallèles. En déduire que, pour cette valeur, elles sont strictement parallèles.

INDICE

Outil : pour l'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $(-b, a)$. **Ensuite :** calcule $\det(\vec{u}, \vec{v}_m)$ en fonction de m, puis utilise la question 2.

CORRIGÉ

Vecteur directeur. Ici $a = m$ et $b = -1$: d'après l'équation cartésienne d'une droite, le vecteur $\vec{v}_m(1, m)$ dirige D_m.

Parallélisme.

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}, \vec{v}_m) \\ &= 1 \times m - 1 \times 2 \\ &= m - 2 \end{aligned}$$

D'après les positions relatives de deux droites, D_m et D sont parallèles si et seulement si $m - 2 = 0$, c'est-à-dire $m = 2$.

Conclusion. Pour $m = 2$, la droite $D_2 : 2x - y + 3 = 0$ est parallèle à D. D'après la question 2, Ω appartient à D_2 mais pas à D : ces deux droites parallèles ne sont pas confondues, elles sont strictement parallèles.

4. 1 pts

Dans cette question, $m = 0$. Écrire l'équation de D_0 et donner un vecteur directeur de cette droite. Prouver que les droites D_0 et D se coupent en un point E, et trouver ce point par report.

INDICE

Début : remplace m par 0 ; la droite obtenue est parallèle à un axe. **Ensuite :** reporte la représentation paramétrique de D dans l'équation de D_0 : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

CORRIGÉ

Droite D_0. Pour $m = 0$, l'équation devient $-y + 5 = 0$, soit $y = 5$. Le vecteur $\vec{v}_0(1, 0)$, c'est-à-dire $\vec{i}$, dirige D_0 : elle est parallèle à l'axe des abscisses.

Sécantes. $\det(\vec{u}, \vec{v}_0) = 1 \times 0 - 1 \times 2 = -2$, qui n'est pas nul : d'après les positions relatives de deux droites, D_0 et D sont sécantes.

Le point de D de paramètre t a pour coordonnées $(t, 1 + 2t)$. Il est sur D_0 si et seulement si $1 + 2t = 5$, soit $2t = 4$, donc $t = 2$: on obtient le point $(2, 5)$. Contrôle dans l'équation de D : $2 \times 2 - 5 + 1 = 0$.

Conclusion. D_0 a pour équation $y = 5$ et pour vecteur directeur $\vec{v}_0(1, 0)$; elle coupe D au point $E(2, 5)$.

5. 1,25 pts

Déterminer le réel m pour lequel la droite D_m passe par le point A de la question 1. En déduire, sans nouveau report, le point commun à D et à cette droite, puis une représentation paramétrique de cette droite.

INDICE

Début : remplace x et y par les coordonnées de $A(0,1)$ dans l'équation de D_m et résous en m. **Ensuite :** la question 3 dit si les deux droites sont sécantes ; deux droites sécantes ont un seul point commun.

CORRIGÉ

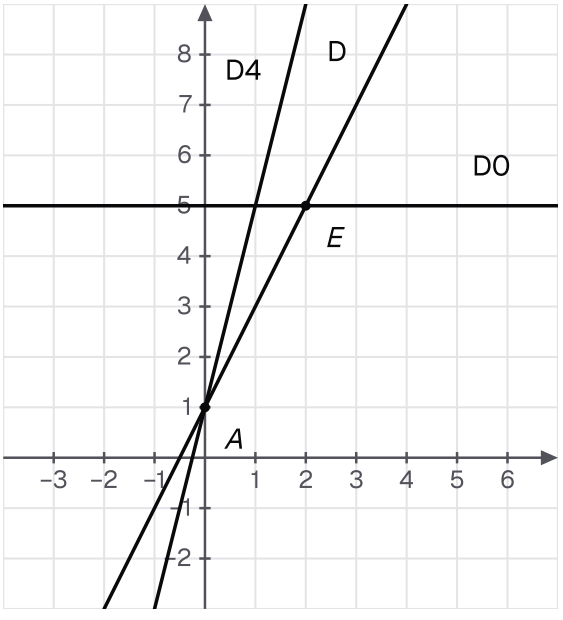
Valeur de m. Le point $A(0,1)$ appartient à D_m si et seulement si $m \times 0 - 1 + 5 - m = 0$, c'est-à-dire $4 - m = 0$, soit $m = 4$. On obtient D_4 : $4x - y + 1 = 0$.

Point commun. Comme $4 \neq 2$, la question 3 montre que D_4 et D ne sont pas parallèles ; d'ailleurs $\det(\vec{u}, \vec{v}_4) = 1 \times 4 - 1 \times 2 = 2$. Elles sont donc sécantes et ont un seul point commun. Or A appartient à D et à D_4 : ce point commun est $A(0,1)$.

Représentation. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec le point A et le vecteur $\vec{v}_4(1,4)$:

$$D_4 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Contrôle : pour $t = 1$, on retrouve le point $\Omega(1,5)$ de la question 2.



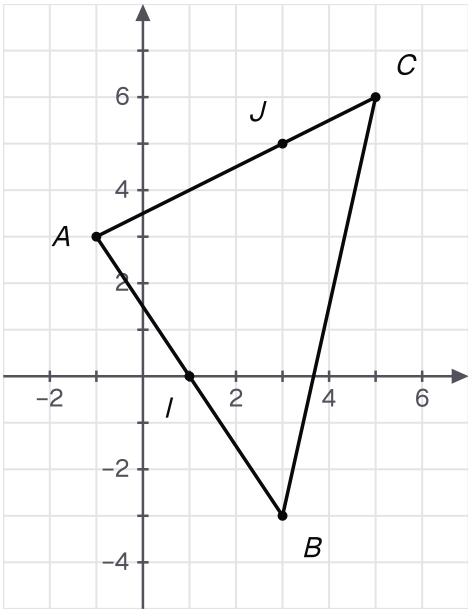
La droite D4 de la famille coupe D au point A(0, 1) ; comme D0, elle passe par le point (1, 5), commun à toutes les droites de la famille.

Exercice 5 5 pts

Une droite qui traverse un triangle

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le triangle ABC avec $A(-1, 3)$, $B(3, -3)$ et $C(5, 6)$. Fais la figure sur ton cahier.

- I est le milieu du côté $[AB]$;
- J est le point du côté $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Le triangle ABC de l'énoncé, avec I milieu de [AB] et J sur [AC], aux deux tiers de A vers C.

1. 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point I, puis celles du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et du point J.

INDICE

Début : pour I, la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées de A et B. **Ensuite :** pour J, calcule $\overrightarrow{AJ}$, puis écris l'égalité des abscisses et celle des ordonnées.

CORRIGÉ

Point I. D'après les coordonnées du milieu, I a pour coordonnées $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = (1, 0)$.

Point J. $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(5-(-1), 6-3) = (6, 3)$. D'après les calculs sur les coordonnées, $\overrightarrow{AJ}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} \times 6, \frac{2}{3} \times 3\right) = (4, 2)$. Avec $J(x_J, y_J)$, on a aussi $\overrightarrow{AJ}(x_J + 1, y_J - 3)$, donc $x_J + 1 = 4$ et $y_J - 3 = 2$.

Conclusion. $I(1, 0)$, $\overrightarrow{AC}(6, 3)$ et $J(3, 5)$.

2. 1 pts

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ), puis une équation cartésienne de la droite (BC).

INDICE

Début : pour (IJ), le point I et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$. **Ensuite :** pour (BC), calcule $\overrightarrow{BC}$, puis écris $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

CORRIGÉ

Droite (IJ). $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(3-1, 5-0) = (2, 5)$. D'après la représentation paramétrique d'une droite, avec le point $I(1, 0)$:

$$(IJ) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Droite (BC). $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(5-3, 6-(-3)) = (2, 9)$. Soit $M(x, y)$; $\overrightarrow{BM}(x-3, y+3)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M appartient à (BC) si et seulement si

$$\begin{aligned} &(x-3) \times 9 \\ &\quad - 2 \times (y+3) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $9x - 27 - 2y - 6 = 0$, soit $9x - 2y - 33 = 0$. Contrôle avec C : $9 \times 5 - 2 \times 6 - 33 = 0$.

Conclusion. (IJ) admet la représentation paramétrique ci-dessus, et (BC) a pour équation cartésienne $9x - 2y - 33 = 0$.

3. 1,25 pts

Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point commun K.

INDICE

Outil : le déterminant de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$. **Ensuite :** reporte la représentation de (IJ) dans l'équation de (BC) : c'est-à-dire remplace x et y par les expressions en t.

CORRIGÉ

Sécantes.

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{BC})\\&=2\times 9-2\times 5\\&=18-10=8\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul : d'après les positions relatives de deux droites, (IJ) et (BC) sont sécantes.

Report. On remplace x par $1+2t$ et y par $5t$ dans le premier membre de l'équation de (BC) :

$$\begin{aligned}&9(1+2t)-2\times 5t-33\\&=9+18t-10t-33\\&=8t-24\end{aligned}$$

L'équation $8t-24=0$ donne $t=3$, puis $x=1+2\times 3=7$ et $y=5\times 3=15$. Contrôle :

$$\begin{aligned}&9\times 7-2\times 15-33\\&=63-30-33=0\end{aligned}$$

Conclusion. Les droites (IJ) et (BC) sont sécantes au point $K(7,15)$.

4. 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ) en éliminant le paramètre. Vérifier que le point K la satisfait, puis que le point C est le milieu du segment $[BK]$.

INDICE

Début : tire t de la seconde équation ($t = \dfrac{y}{5}$) et reporte-le dans la première. **Ensuite :** calcule les coordonnées du milieu de $[BK]$ et compare-les à celles de C.

CORRIGÉ

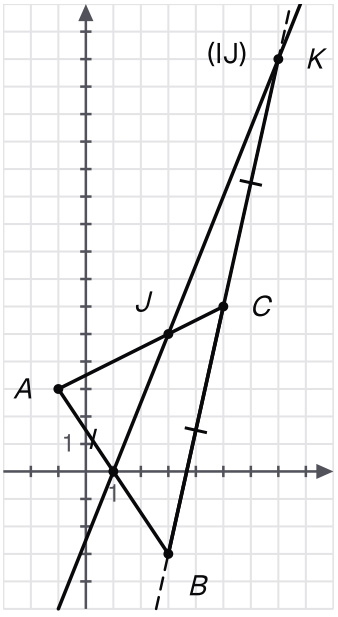
Équation de (IJ). La seconde ligne donne $t = \dfrac{y}{5}$. En reportant dans la première : $x = 1 + \dfrac{2y}{5}$, soit $5x = 5 + 2y$, d'où $(IJ) : 5x - 2y - 5 = 0$. Contrôle : le vecteur $(-b, a) = (2, 5)$ est $\overrightarrow{IJ}$.

Point K et milieu. Pour $K(7, 15)$:

$$\begin{aligned} &5 \times 7 - 2 \times 15 - 5 \\ &= 35 - 30 - 5 = 0 \end{aligned}$$

D'après les coordonnées du milieu, le milieu de $[BK]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3+7}{2}, \dfrac{-3+15}{2}\right) = (5, 6)$.

Conclusion. (IJ) a pour équation $5x - 2y - 5 = 0$ et le point K la vérifie ; le milieu de $[BK]$ est le point $(5, 6)$, c'est-à-dire C.



La droite (IJ) coupe la droite (BC) en K(7, 15), et C est le milieu du segment [BK].

5. 1 pts

On note G le point du côté $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculer les coordonnées de G. En déduire que la droite (JG) est parallèle à la droite (AB).

INDICE

Début : procède comme pour J à la question 1, avec $\overrightarrow{BC}(2, 9)$. **Ensuite :** calcule $\det(\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{AB})$.

CORRIGÉ

Point G. $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} \times 2, \frac{2}{3} \times 9\right) = \left(\frac{4}{3}, 6\right)$. Avec $G(x_G, y_G)$: $x_G - 3 = \frac{4}{3}$ et $y_G + 3 = 6$, donc $G\left(\frac{13}{3}, 3\right)$.

Colinéarité. $\overrightarrow{JG}$ a pour coordonnées $\left(\frac{13}{3} - 3, 3 - 5\right) = \left(\frac{4}{3}, -2\right)$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3 - (-1), -3 - 3) = (4, -6)$. Alors :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{JG}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{4}{3} \times (-6) - 4 \times (-2) \\ &= -8 + 8 = 0 \end{aligned}$$

D'après la condition analytique de colinéarité, ces vecteurs sont colinéaires ; en effet, $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{JG}$.

Conclusion. $G\left(\frac{13}{3}, 3\right)$; d'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites (JG) et (AB) sont parallèles.