BURHAN

La droite dans le plan : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

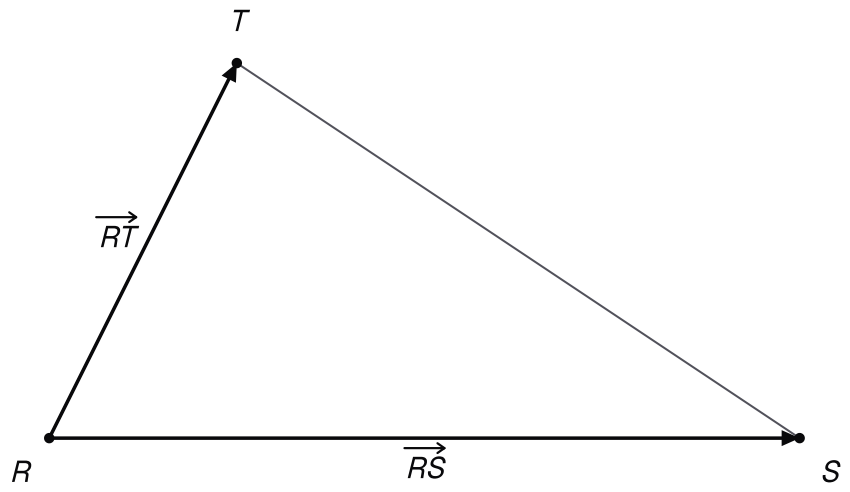
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La droite dans le plan	Application	8

Exercice 1

Un repère formé sur un triangle

RST est un triangle. On munit le plan du repère $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$: en général, ce repère n'est pas orthonormé. Fais la figure sur ton cahier.



Le triangle RST et le repère d'origine R formé par les vecteurs RS et RT.

1.

Justifier que $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ est bien un repère, puis donner les coordonnées des points R, S et T.

INDICE

Outil : la définition d'un repère demande deux vecteurs non colinéaires. **Ensuite :** écris $\overrightarrow{RR}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sous la forme $x\,\overrightarrow{RS} + y\,\overrightarrow{RT}$.

2.

Le point K vérifie $\overrightarrow{RK} = 2\,\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$ et le point L vérifie $\overrightarrow{RL} = -\overrightarrow{RS} + 3\,\overrightarrow{RT}$. Donner les coordonnées de K et de L.

INDICE

Outil : les coordonnées d'un point sont celles du vecteur qui part de l'origine du repère, ici R.

3.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{ST}$.

INDICE

Outil : les coordonnées d'un vecteur défini par deux points restent valables dans un repère quelconque. **Point délicat :** l'extrémité moins l'origine.

Exercice 2

Vecteurs, milieu et relation de Chasles

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $U(-3, 5)$, $V(1, -2)$ et $W(4, 6)$.

1.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VW}$.

INDICE

Outil : les coordonnées d'un vecteur défini par deux points. **Début :** pour $\overrightarrow{UV}$, commence par $x_V - x_U$.

2.

Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[UW]$.

INDICE

Outil : les coordonnées du milieu : la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées.

3.

Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{s} = \overrightarrow{UV} + 2\,\overrightarrow{VW}$. Calculer ensuite $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ et comparer avec les coordonnées de $\overrightarrow{UW}$.

INDICE

Outil : les calculs sur les coordonnées, abscisse par abscisse et ordonnée par ordonnée. **Ensuite :** pense à la relation de Chasles.

Exercice 3

Colinéaires ou non ?

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{u}(4, -6)$, $\vec{v}(-6, 9)$, $\vec{w}(5, 2)$ et $\vec{z}(3, 1)$.

1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, trouver le réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

INDICE

Outil : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$, puis la condition analytique de colinéarité. **Ensuite :** compare les abscisses pour trouver k.

2.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Outil : le même calcul de déterminant. **Point délicat :** les coordonnées se ressemblent, mais seul le calcul décide.

3.

Trouver le réel m tel que les vecteurs $\vec{p}(m, 3)$ et $\vec{q}(2, -6)$ soient colinéaires.

INDICE

Début : écris $\det(\vec{p}, \vec{q})$ en fonction de m. **Ensuite :** les vecteurs sont colinéaires si et seulement si ce déterminant est nul.

Exercice 4

Des arrêts de bus alignés ?

Sur le plan d'une ville, muni d'un repère orthonormé dont l'unité vaut 100 m, quatre arrêts de bus sont placés en $P(-4,-1)$, $Q(2,3)$, $S(8,7)$ et $T(5,6)$. Une ligne de bus suit une rue rectiligne.

1.

Les arrêts P, Q et S sont-ils alignés ?

INDICE

Outil : la condition analytique d'alignement, avec les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$.

2.

L'arrêt T est-il aligné avec P et Q ?

INDICE

Outil : le même calcul, avec $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PT}$.

3.

On veut placer un nouvel arrêt $N(0,y)$ sur l'axe des ordonnées. Il est aligné avec P et Q lorsque $\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN})=0$. Calculer y.

INDICE

Début : calcule les coordonnées de $\overrightarrow{PN}$ en fonction de y. **Ensuite :** écris le déterminant, puis résous l'équation obtenue.

Exercice 5

Le trajet d'un rayon lumineux

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de la source $H(-2, 3)$ et se propage dans la direction du vecteur $\vec{u}(4, -1)$. On note D la droite qui porte ce rayon.

1.

Écrire une représentation paramétrique de la droite D.

INDICE

Outil : la représentation paramétrique d'une droite, avec le point H et le vecteur directeur $\vec{u}$.

2.

Calculer les coordonnées des points de D obtenus pour $t = 2$, puis pour $t = -\frac{1}{2}$.

INDICE

Outil : remplace t par sa valeur dans chacune des deux lignes.

3.

Le rayon atteint-il le point $K(10, 0)$? Passe-t-il par le point $L(2, 1)$?

INDICE

Début : cherche t avec l'équation des abscisses. **Point délicat :** la même valeur de t doit convenir pour l'ordonnée.

Exercice 6

Une équation à partir d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La droite D passe par $J(3, -2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, 4)$. La droite D' passe par l'origine O et a pour vecteur directeur $\vec{v}(-3, 2)$.

1.

Déterminer une équation cartésienne de D, puis la contrôler.

INDICE

Outil : $M(x, y)$ est sur D si et seulement si $\det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0$. **Ensuite :** développe, puis teste le point J .

2.

Déterminer de même une équation cartésienne de D'.

INDICE

Outil : la même méthode, avec le point $O(0, 0)$ et le vecteur $\vec{v}$.

3.

Le point $N(5, 6)$ appartient-il à D ? à D' ?

INDICE

Outil : un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 7

Lire un vecteur directeur et une équation réduite

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites

$$D_1 : 3x - 2y + 4 = 0,$$
$$D_2 : -x + 4y - 8 = 0,$$
$$D_3 : 5x - 10 = 0.$$

1.

Donner un vecteur directeur de chacune des trois droites.

INDICE

Outil : la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $(-b, a)$. **Point délicat :** pour D_3, le coefficient b est nul.

2.

Écrire l'équation réduite de D_1 et celle de D_2, et donner leurs coefficients directeurs. Que dire de D_3 ?

INDICE

Outil : l'équation réduite d'une droite. **Début :** isole y dans chaque équation lorsque le coefficient de y n'est pas nul.

3.

Calculer l'ordonnée du point de D_1 d'abscisse 2. En déduire un point commun à D_1 et D_3.

INDICE

Outil : l'équation réduite de D_1. **Ensuite :** quelle est l'abscisse de tous les points de D_3 ?

Exercice 8

Deux droites parallèles ou non ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour chaque couple de droites, dis si elles sont parallèles.

1.

(a) $D : 2x + 5y - 3 = 0$ et $D' : 4x + 10y + 7 = 0$.

(b) $\Delta : x - y + 2 = 0$ et $\Delta' : 3x + y - 1 = 0$.

INDICE

Outil : les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

2.

D_1 a pour équation réduite $y = 3x - 1$ et D_2 a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ces droites sont-elles parallèles ?

INDICE

Début : lis un vecteur directeur de chaque droite, sous la forme $(1, m)$ pour D_1. **Ensuite :** calcule leur déterminant.

3.

Trouver le réel a tel que la droite d'équation $ax + 2y - 1 = 0$ soit parallèle à la droite d'équation $3x - y + 4 = 0$.

INDICE

Outil : la condition $ab' - a'b = 0$, avec $b = 2$, $a' = 3$ et $b' = -1$.