BURHAN

# La droite dans le plan : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

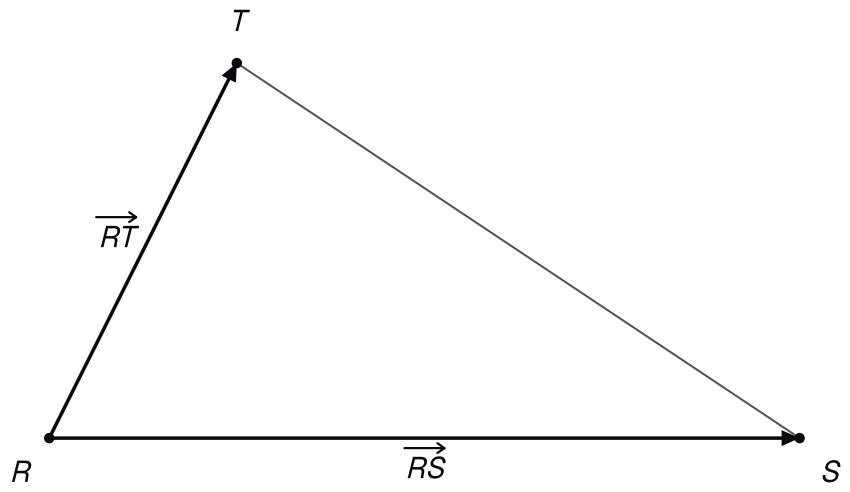
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| La droite dans le plan | Application | 8 |

### Exercice 1

## Un repère formé sur un triangle

$RST$ est un triangle. On munit le plan du repère $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ : en général, ce repère n'est pas orthonormé. Fais la figure sur ton cahier.




**Le triangle RST et le repère d'origine R formé par les vecteurs RS et RT.**

#### 1.

Justifier que $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ est bien un repère, puis donner les coordonnées des points $R$, $S$ et $T$.

INDICE

**Outil :** la définition d'un repère demande deux vecteurs non colinéaires. **Ensuite :** écris $\overrightarrow{RR}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ sous la forme $x\,\overrightarrow{RS} + y\,\overrightarrow{RT}$.

CORRIGÉ

**Repère.** Les points $R$, $S$ et $T$ ne sont pas alignés, puisque $RST$ est un triangle. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont donc pas colinéaires.

D'après la définition d'un repère, $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ est un repère d'origine $R$.

**Coordonnées.** On écrit chaque vecteur issu de $R$ à l'aide de $\overrightarrow{RS}$ et de $\overrightarrow{RT}$ :

$$\overrightarrow{RR} = 0\,\overrightarrow{RS} + 0\,\overrightarrow{RT}$$
$$\overrightarrow{RS} = 1\,\overrightarrow{RS} + 0\,\overrightarrow{RT}$$
$$\overrightarrow{RT} = 0\,\overrightarrow{RS} + 1\,\overrightarrow{RT}$$

**Conclusion.** $(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ est bien un repère, dans lequel $R(0,0)$, $S(1,0)$ et $T(0,1)$.

## 2.

Le point $K$ vérifie $\overrightarrow{RK} = 2\,\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$ et le point $L$ vérifie $\overrightarrow{RL} = -\overrightarrow{RS} + 3\,\overrightarrow{RT}$. Donner les coordonnées de $K$ et de $L$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées d'un point sont celles du vecteur qui part de l'origine du repère, ici $R$.

CORRIGÉ

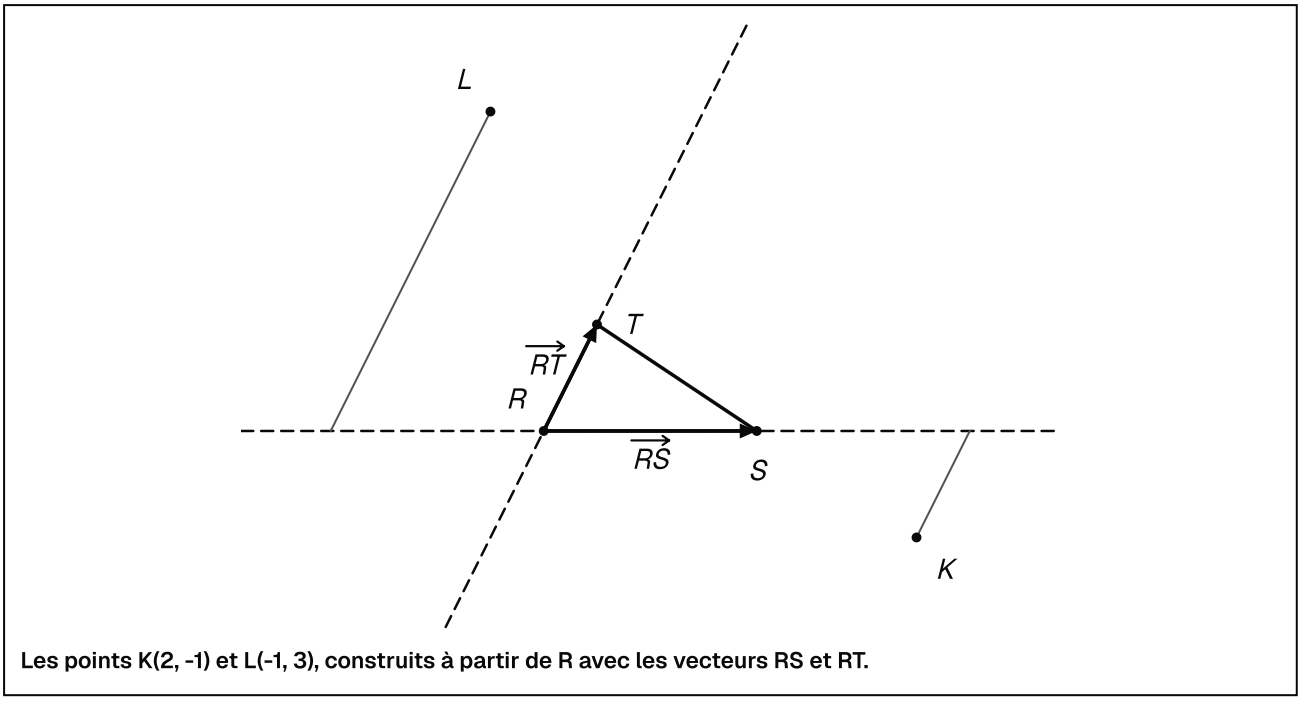
D'après la définition des coordonnées d'un point, les coordonnées de $K$ sont les coefficients de $\overrightarrow{RS}$ et de $\overrightarrow{RT}$ dans l'écriture de $\overrightarrow{RK}$ :

$$\overrightarrow{RK} = 2\,\overrightarrow{RS} + (-1)\,\overrightarrow{RT}.$$

De même pour le point $L$ :

$$\overrightarrow{RL} = (-1)\,\overrightarrow{RS} + 3\,\overrightarrow{RT}.$$

**Conclusion.** Dans ce repère, $K(2, -1)$ et $L(-1, 3)$.




**Les points K(2, -1) et L(-1, 3), construits à partir de R avec les vecteurs RS et RT.**

### 3.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{ST}$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées d'un vecteur défini par deux points restent valables dans un repère quelconque. **Point délicat :** l'extrémité moins l'origine.

CORRIGÉ

D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, valables dans tout repère, on calcule l'extrémité moins l'origine :

- pour $\overrightarrow{KL}$ : $x_L - x_K = -1 - 2 = -3$ et $y_L - y_K = 3 - (-1) = 4$ ;
- pour $\overrightarrow{ST}$ : $x_T - x_S = 0 - 1 = -1$ et $y_T - y_S = 1 - 0 = 1$.

**Contrôle.** D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} \\ &= -\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}\end{aligned}$$

On retrouve bien les coefficients $-1$ et $1$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{KL}(-3, 4)$ et $\overrightarrow{ST}(-1, 1)$.

### Exercice 2

## Vecteurs, milieu et relation de Chasles

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $U(-3, 5)$, $V(1, -2)$ et $W(4, 6)$.

**1.**

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{VW}$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées d'un vecteur défini par deux points. **Début :** pour $\overrightarrow{UV}$, commence par $x_V - x_U$.

CORRIGÉ

D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, on soustrait les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité :

- pour $\overrightarrow{UV}$ : $x_V - x_U = 1 - (-3) = 4$ et $y_V - y_U = -2 - 5 = -7$ ;
- pour $\overrightarrow{VW}$ : $x_W - x_V = 4 - 1 = 3$ et $y_W - y_V = 6 - (-2) = 8$.

**Conclusion.** $\overrightarrow{UV}(4, -7)$ et $\overrightarrow{VW}(3, 8)$.

**2.**

Calculer les coordonnées du milieu $I$ du segment $[UW]$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées du milieu : la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées.

CORRIGÉ

D'après les coordonnées du milieu d'un segment, on fait la moyenne des abscisses de $U$ et $W$, puis celle de leurs ordonnées :

$$x_I = \frac{-3 + 4}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_I = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2}.$$

**Conclusion.** Le milieu du segment $[UW]$ est le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

### 3.

Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{s} = \overrightarrow{UV} + 2\,\overrightarrow{VW}$. Calculer ensuite $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ et comparer avec les coordonnées de $\overrightarrow{UW}$.

INDICE

**Outil :** les calculs sur les coordonnées, abscisse par abscisse et ordonnée par ordonnée. **Ensuite :** pense à la relation de Chasles.

CORRIGÉ

**Combinaison.** D'après les calculs sur les coordonnées, $2\,\overrightarrow{VW}$ a pour coordonnées $(2 \times 3, 2 \times 8)$, soit $(6, 16)$. On ajoute ensuite les coordonnées de $\overrightarrow{UV}$ :

$$\vec{s}(4 + 6, -7 + 16),$$

soit $\vec{s}(10, 9)$.

**Somme.** De même, $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ a pour coordonnées $(4 + 3, -7 + 8) = (7, 1)$.

**Comparaison.** D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{UW}(4 - (-3), 6 - 5)$, soit $\overrightarrow{UW}(7, 1)$.

**Conclusion.** $\vec{s}(10, 9)$, et $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ a les mêmes coordonnées que $\overrightarrow{UW}$, comme l'annonce la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{UW}.$$

### Exercice 3

## Colinéaires ou non ?

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{u}(4, -6)$, $\vec{v}(-6, 9)$, $\vec{w}(5, 2)$ et $\vec{z}(3, 1)$.

### 1.

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Si oui, trouver le réel $k$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

INDICE

**Outil :** $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$, puis la condition analytique de colinéarité. **Ensuite :** compare les abscisses pour trouver $k$.

CORRIGÉ

**Déterminant.** Avec $\vec{u}(4, -6)$ et $\vec{v}(-6, 9)$, la formule $xy' - x'y$ donne :

$$\begin{aligned}&\det(\vec{u}, \vec{v})\\&= 4 \times 9 - (-6) \times (-6)\\&= 36 - 36 = 0\end{aligned}$$

**Colinéarité.** Le déterminant est nul : d'après la condition analytique de colinéarité, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Coefficient.** On cherche le réel $k$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$. Les abscisses imposent $-6 = 4k$, donc $k = -\dfrac{3}{2}$. Contrôle sur les ordonnées : $-\dfrac{3}{2} \times (-6) = 9$.

**Conclusion.** $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et $\vec{v} = -\dfrac{3}{2}\,\vec{u}$.

### 2.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

**Outil :** le même calcul de déterminant. **Point délicat :** les coordonnées se ressemblent, mais seul le calcul décide.

CORRIGÉ

Avec $\vec{w}(5, 2)$ et $\vec{z}(3, 1)$ :

$$\begin{aligned}&\det(\vec{w}, \vec{z})\\&= 5 \times 1 - 3 \times 2\\&= 5 - 6 = -1\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul.

**Conclusion.** D'après la condition analytique de colinéarité, les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

### 3.

Trouver le réel $m$ tel que les vecteurs $\vec{p}(m, 3)$ et $\vec{q}(2, -6)$ soient colinéaires.

INDICE

**Début :** écris $\det(\vec{p}, \vec{q})$ en fonction de $m$. **Ensuite :** les vecteurs sont colinéaires si et seulement si ce déterminant est nul.

CORRIGÉ

**Déterminant.** Avec $\vec{p}(m, 3)$ et $\vec{q}(2, -6)$ :

$$\begin{aligned}&\det(\vec{p}, \vec{q})\\&= m \times (-6) - 2 \times 3\\&= -6m - 6\end{aligned}$$

**Équation.** D'après la condition analytique de colinéarité, $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont colinéaires si et seulement si ce déterminant est nul, c'est-à-dire $-6m - 6 = 0$. Cette équation équivaut à $-6m = 6$, soit $m = -1$.

**Contrôle.** Pour $m = -1$, on a $\vec{p}(-1, 3)$. Or $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$ et $-\frac{1}{2} \times (-6) = 3$, donc $\vec{p} = -\frac{1}{2}\,\vec{q}$.

**Conclusion.** Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont colinéaires pour $m = -1$, et pour cette seule valeur.

**Exercice 4**

## Des arrêts de bus alignés ?

Sur le plan d'une ville, muni d'un repère orthonormé dont l'unité vaut $100$ m, quatre arrêts de bus sont placés en $P(-4,-1)$, $Q(2,3)$, $S(8,7)$ et $T(5,6)$. Une ligne de bus suit une rue rectiligne.

**1.**

Les arrêts $P$, $Q$ et $S$ sont-ils alignés ?

INDICE

**Outil :** la condition analytique d'alignement, avec les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$.

CORRIGÉ

**Vecteurs.** D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{PQ}(2-(-4),3-(-1))$ et $\overrightarrow{PS}(8-(-4),7-(-1))$, soit $\overrightarrow{PQ}(6,4)$ et $\overrightarrow{PS}(12,8)$.

**Déterminant.**

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PS})\\&=6\times 8-12\times 4\\&=48-48=0\end{aligned}$$

**Conclusion.** D'après la condition analytique d'alignement, les arrêts $P$, $Q$ et $S$ sont alignés : une même rue rectiligne peut les desservir.

### 2.

L'arrêt $T$ est-il aligné avec $P$ et $Q$ ?

INDICE

**Outil :** le même calcul, avec $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PT}$.

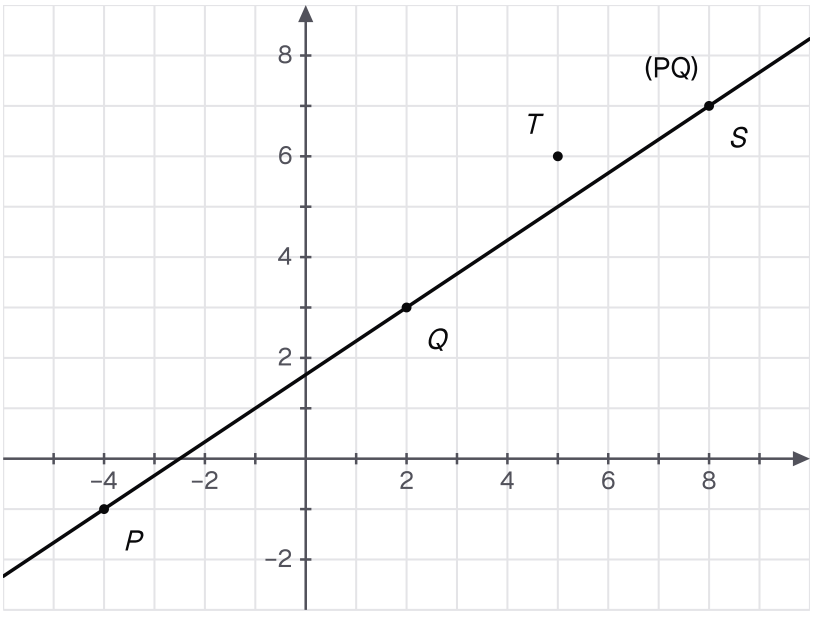
CORRIGÉ

**Vecteur.** $\overrightarrow{PT}(5-(-4), 6-(-1))$, soit $\overrightarrow{PT}(9, 7)$.

**Déterminant.**

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PT})\\&= 6 \times 7 - 9 \times 4\\&= 42 - 36 = 6\end{aligned}$$

**Conclusion.** Ce déterminant n'est pas nul : d'après la condition analytique d'alignement, l'arrêt $T$ n'est pas aligné avec $P$ et $Q$.




**Les arrêts P, Q et S sont sur une même droite, l'arrêt T n'y est pas.**

### 3.

On veut placer un nouvel arrêt $N(0, y)$ sur l'axe des ordonnées. Il est aligné avec $P$ et $Q$ lorsque $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN}) = 0$. Calculer $y$.

INDICE

**Début :** calcule les coordonnées de $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $y$. **Ensuite :** écris le déterminant, puis résous l'équation obtenue.

CORRIGÉ

**Vecteur.** Avec $N(0, y)$, on obtient $\overrightarrow{PN}(0 - (-4), y - (-1))$, soit $\overrightarrow{PN}(4, y + 1)$.

**Équation.** Le déterminant s'exprime en fonction de $y$ :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PN}) \\ &= 6(y + 1) - 4 \times 4 \\ &= 6y - 10 \end{aligned}$$

D'après la condition analytique d'alignement, $P$, $Q$ et $N$ sont alignés si et seulement si $6y - 10 = 0$, c'est-à-dire $y = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

**Conclusion.** $y = \dfrac{5}{3}$ : le nouvel arrêt est placé en $N\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$.

### Exercice 5

## Le trajet d'un rayon lumineux

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de la source $H(-2, 3)$ et se propage dans la direction du vecteur $\vec{u}(4, -1)$. On note $D$ la droite qui porte ce rayon.

**1.**

Écrire une représentation paramétrique de la droite $D$.

INDICE

**Outil :** la représentation paramétrique d'une droite, avec le point $H$ et le vecteur directeur $\vec{u}$.

CORRIGÉ

La droite $D$ passe par $H(-2, 3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(4, -1)$. D'après la représentation paramétrique d'une droite, le point $M(x, y)$ appartient à $D$ si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que :

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

**Conclusion.** Ces deux égalités, où $t$ décrit $\mathbb{R}$, forment une représentation paramétrique de la droite $D$.

**2.**

Calculer les coordonnées des points de $D$ obtenus pour $t = 2$, puis pour $t = -\dfrac{1}{2}$.

INDICE

**Outil :** remplace $t$ par sa valeur dans chacune des deux lignes.

CORRIGÉ

On remplace $t$ par sa valeur dans chacune des deux lignes de la représentation.

- Pour $t = 2$ : $x = -2 + 4 \times 2 = 6$ et $y = 3 - 2 = 1$.
- Pour $t = -\dfrac{1}{2}$ : $x = -2 + 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$ et $y = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.

**Conclusion.** Les points de $D$ obtenus pour $t = 2$ et pour $t = -\dfrac{1}{2}$ sont $(6, 1)$ et $\left(-4, \dfrac{7}{2}\right)$.

### 3.

Le rayon atteint-il le point $K(10, 0)$ ? Passe-t-il par le point $L(2, 1)$ ?

INDICE

**Début :** cherche $t$ avec l'équation des abscisses. **Point délicat :** la même valeur de $t$ doit convenir pour l'ordonnée.

CORRIGÉ

**Point $K$.** On cherche $t$ tel que $-2 + 4t = 10$, soit $4t = 12$ : on trouve $t = 3$. Pour cette valeur, $y = 3 - 3 = 0$, qui est bien l'ordonnée de $K$. Donc $K$ appartient à $D$. Comme $t = 3$ est positif, $K$ est du côté où le rayon se propage.

**Point $L$.** L'égalité $-2 + 4t = 2$ donne $4t = 4$, soit $t = 1$. Pour cette valeur, $y = 3 - 1 = 2$, alors que l'ordonnée de $L$ vaut $1$. La seule valeur de $t$ qui convient pour l'abscisse ne convient pas pour l'ordonnée : $L$ n'appartient pas à $D$.

**Conclusion.** Le rayon atteint le point $K(10, 0)$, mais il ne passe pas par le point $L(2, 1)$.

### Exercice 6

## Une équation à partir d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La droite $D$ passe par $J(3, -2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, 4)$. La droite $D'$ passe par l'origine $O$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(-3, 2)$.

**1.**

Déterminer une équation cartésienne de $D$, puis la contrôler.

INDICE

**Outil :** $M(x, y)$ est sur $D$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0$. **Ensuite :** développe, puis teste le point $J$ .

CORRIGÉ

**Condition.** Soit $M(x, y)$ un point du plan ; $\overrightarrow{JM}(x - 3, y + 2)$. D'après la condition analytique de colinéarité, $M$ appartient à $D$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) = 0$.

**Développement.**

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{JM}, \vec{u}) \\ &= 4(x - 3) - 1 \times (y + 2) \\ &= 4x - 12 - y - 2 \\ &= 4x - y - 14 \end{aligned}$$

Donc $M$ appartient à $D$ si et seulement si $4x - y - 14 = 0$.

**Contrôle.** $4 \times 3 - (-2) - 14 = 0$ : le point $J$ vérifie l'équation. Le vecteur $(-b, a) = (1, 4)$ est bien $\vec{u}$.

**Conclusion.** Une équation cartésienne de $D$ est $4x - y - 14 = 0$.

**2.**

Déterminer de même une équation cartésienne de $D'$.

INDICE

**Outil :** la même méthode, avec le point $O(0, 0)$ et le vecteur $\vec{v}$.

CORRIGÉ

Soit $M(x, y)$ un point du plan ; $\overrightarrow{OM}(x, y)$. D'après la condition analytique de colinéarité, $M$ appartient à $D'$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{OM}, \vec{v}) = 0$ :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{OM}, \vec{v}) \\ &= x \times 2 - (-3) \times y \\ &= 2x + 3y \end{aligned}$$

**Contrôle.** Le point $O$ vérifie l'équation, et le vecteur $(-b, a) = (-3, 2)$ est bien $\vec{v}$.

**Conclusion.** Une équation cartésienne de $D'$ est $2x + 3y = 0$.

### 3.

Le point $N(5, 6)$ appartient-il à $D$ ? à $D'$ ?

INDICE

**Outil :** un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de cette droite.

CORRIGÉ

D'après l'équation cartésienne d'une droite, un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de cette droite. On remplace donc $x$ par $5$ et $y$ par $6$.

- Dans l'équation de $D$ : $4 \times 5 - 6 - 14 = 0$.
- Dans l'équation de $D'$ : $2 \times 5 + 3 \times 6 = 28$, qui n'est pas nul.

**Conclusion.** Le point $N(5, 6)$ appartient à $D$, mais il n'appartient pas à $D'$.

### Exercice 7

## Lire un vecteur directeur et une équation réduite

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites

$$D_1 : 3x - 2y + 4 = 0,$$
$$D_2 : -x + 4y - 8 = 0,$$
$$D_3 : 5x - 10 = 0.$$

### 1.

Donner un vecteur directeur de chacune des trois droites.

INDICE

**Outil :** la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $(-b, a)$. **Point délicat :** pour $D_3$, le coefficient $b$ est nul.

CORRIGÉ

D'après l'équation cartésienne d'une droite, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $(-b, a)$.

- $D_1$ : $a = 3$ et $b = -2$, d'où le vecteur directeur $(2, 3)$ ;
- $D_2$ : $a = -1$ et $b = 4$, d'où le vecteur directeur $(-4, -1)$ ; le vecteur $(4, 1)$, qui lui est colinéaire, convient aussi ;
- $D_3$ : $a = 5$ et $b = 0$, d'où le vecteur directeur $(0, 5)$, colinéaire à $\vec{j}$.

**Conclusion.** Les vecteurs $(2, 3)$, $(-4, -1)$ et $(0, 5)$ dirigent respectivement $D_1$, $D_2$ et $D_3$.

### 2.

Écrire l'équation réduite de $D_1$ et celle de $D_2$, et donner leurs coefficients directeurs. Que dire de $D_3$ ?

INDICE

**Outil :** l'équation réduite d'une droite. **Début :** isole $y$ dans chaque équation lorsque le coefficient de $y$ n'est pas nul.

CORRIGÉ

**$D_1$.** Le coefficient de $y$ n'est pas nul : on isole $y$. L'équation $3x - 2y + 4 = 0$ équivaut à $2y = 3x + 4$, puis à $y = \frac{3}{2}x + 2$. D'après l'équation réduite d'une droite, le coefficient directeur de $D_1$ est $\frac{3}{2}$.

**$D_2$.** De même, $-x + 4y - 8 = 0$ équivaut à $4y = x + 8$, puis à $y = \frac{1}{4}x + 2$. Le coefficient directeur de $D_2$ est $\frac{1}{4}$.

**$D_3$.** Ici $b = 0$ : l'équation $5x - 10 = 0$ équivaut à $x = 2$. Dirigée par $\vec{j}$, la droite $D_3$ est parallèle à l'axe des ordonnées ; d'après l'équation réduite d'une droite, elle n'a pas d'équation de la forme $y = mx + p$, donc pas de coefficient directeur.

**Conclusion.** $D_1$ a pour équation réduite $y = \frac{3}{2}x + 2$, de coefficient directeur $\frac{3}{2}$ ; $D_2$ a pour équation réduite $y = \frac{1}{4}x + 2$, de coefficient directeur $\frac{1}{4}$ ; $D_3$ a pour équation $x = 2$ et n'a pas de coefficient directeur.

### 3.

Calculer l'ordonnée du point de $D_1$ d'abscisse $2$. En déduire un point commun à $D_1$ et $D_3$.

INDICE

**Outil :** l'équation réduite de $D_1$. **Ensuite :** quelle est l'abscisse de tous les points de $D_3$ ?

CORRIGÉ

**Point de $D_1$.** D'après l'équation réduite de $D_1$, pour $x = 2$ :

$$y = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5.$$

Le point $(2, 5)$ est donc sur $D_1$. Contrôle dans l'équation cartésienne : $3 \times 2 - 2 \times 5 + 4 = 0$.

**Point commun.** Tous les points de $D_3$ ont pour abscisse $2$. Le point $(2, 5)$ vérifie $x = 2$ : il appartient aussi à $D_3$.

**Conclusion.** Le point de $D_1$ d'abscisse $2$ a pour ordonnée $5$, et le point $(2, 5)$ est commun à $D_1$ et à $D_3$ .

### Exercice 8

## Deux droites parallèles ou non ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour chaque couple de droites, dis si elles sont parallèles.

**1.**

(a) $D : 2x + 5y - 3 = 0$ et $D' : 4x + 10y + 7 = 0$.

(b) $\Delta : x - y + 2 = 0$ et $\Delta' : 3x + y - 1 = 0$.

INDICE

**Outil :** les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

CORRIGÉ

D'après les positions relatives de deux droites, les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

**Couple (a).** Ici $a = 2, b = 5, a' = 4$ et $b' = 10$ :

$$\begin{aligned} & ab' - a'b \\ &= 2 \times 10 - 4 \times 5 \\ &= 20 - 20 = 0 \end{aligned}$$

**Couple (b).** Ici $a = 1, b = -1, a' = 3$ et $b' = 1$ :

$$\begin{aligned} & ab' - a'b \\ &= 1 \times 1 - 3 \times (-1) \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas nul.

**Conclusion.** $D$ et $D'$ sont parallèles ; $\Delta$ et $\Delta'$ ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

### 2.

$D_1$ a pour équation réduite $y = 3x - 1$ et $D_2$ a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ces droites sont-elles parallèles ?

INDICE

**Début :** lis un vecteur directeur de chaque droite, sous la forme $(1, m)$ pour $D_1$. **Ensuite :** calcule leur déterminant.

CORRIGÉ

**Vecteurs.** D'après l'équation réduite d'une droite, la droite d'équation $y = mx + p$ est dirigée par le vecteur $(1, m)$ : ici, $(1, 3)$ dirige $D_1$. Dans la représentation paramétrique de $D_2$, les coefficients de $t$ donnent le vecteur directeur $(2, 6)$.

**Déterminant.** Le déterminant de ces deux vecteurs vaut $1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$.

**Conclusion.** D'après les positions relatives de deux droites, $D_1$ et $D_2$ sont parallèles.

### 3.

Trouver le réel $a$ tel que la droite d'équation $ax + 2y - 1 = 0$ soit parallèle à la droite d'équation $3x - y + 4 = 0$.

INDICE

**Outil :** la condition $ab' - a'b = 0$, avec $b = 2$, $a' = 3$ et $b' = -1$.

CORRIGÉ

**Condition.** Ici $b = 2$, $a' = 3$ et $b' = -1$. D'après les positions relatives de deux droites, les deux droites sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$, c'est-à-dire $a \times (-1) - 3 \times 2 = 0$, soit $-a - 6 = 0$. Cette équation équivaut à $a = -6$.

**Contrôle.** Pour $a = -6$, la droite d'équation $-6x + 2y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $(-2, -6)$. Ce vecteur vaut $-2$ fois le vecteur $(1, 3)$, qui dirige la droite d'équation $3x - y + 4 = 0$.

**Conclusion.** Les deux droites sont parallèles pour $a = -6$, et pour cette seule valeur.