BURHAN

La droite dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

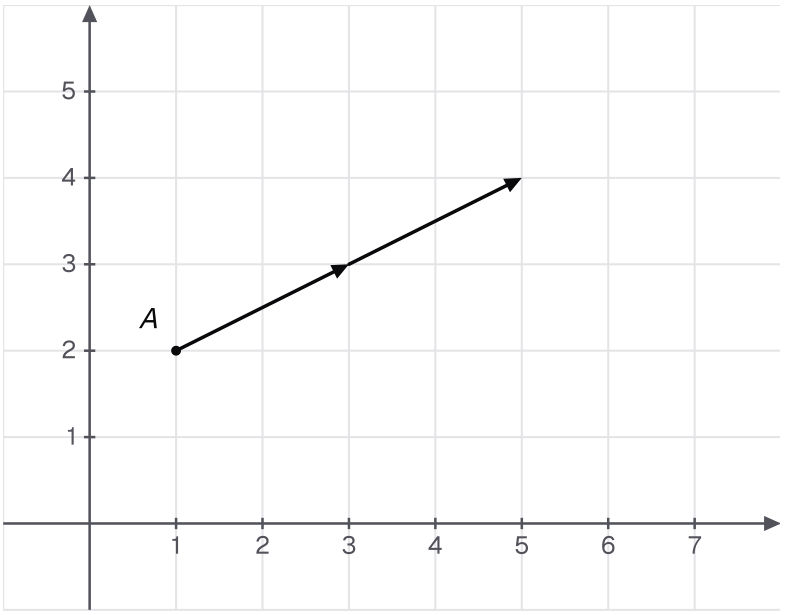
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/la-droite-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
La droite dans le plan	Semestre 1

Décrire un trajet par des nombres

Sur un écran quadrillé, muni d'un repère orthonormé, un petit robot part du point $A(1, 2)$. Chaque seconde, il avance de 2 carreaux vers la droite et de 1 carreau vers le haut, toujours en ligne droite.

Tu voudrais savoir, sans rien dessiner, s'il passera par tel ou tel point de l'écran.



Le robot part du point A ; chaque flèche représente le trajet d'une seconde, deux carreaux vers la droite et un carreau vers le haut.

Devine : Une prédiction

Le robot avance sans jamais s'arrêter. Par lequel de ces points passera-t-il ?

A. Par $(11, 5)$.

Faux.

Pour atteindre l'abscisse 11, il lui faut 5 secondes ; il est alors à l'ordonnée $2 + 5 = 7$, pas 5.

B. Par $(13, 8)$.

Juste.

Juste : en 6 secondes, il avance de 12 carreaux vers la droite et de 6 vers le haut.

C. Par $(7, 4)$.

Faux.

Au bout de 3 secondes, il est bien à l'abscisse 7, mais à l'ordonnée 5.

D. Par $(4, 7)$.

Faux.

Pour atteindre l'abscisse 4, il lui faut une seconde et demie ; il est alors à l'ordonnée $\frac{7}{2}$, pas 7.

Correction

Après t secondes, le robot a avancé de $2t$ carreaux vers la droite et de t carreaux vers le haut. Il est donc au point $(1 + 2t, 2 + t)$.

Pour atteindre l'abscisse 13, il faut $1 + 2t = 13$, soit $t = 6$. L'ordonnée vaut alors $2 + 6 = 8$: le robot passe bien par $(13, 8)$.

Pour répondre, tu as décrit la position du robot par deux nombres qui dépendent du temps.

Dans ce chapitre, tu apprends d'abord à repérer points et vecteurs par leurs **coordonnées**, puis à tester un alignement avec un **déterminant**. Tu décris ensuite une droite par une **représentation paramétrique** ou par une **équation cartésienne**. Tu sauras enfin dire si deux droites se coupent, et en quel point.

Repère et coordonnées

Deux directions pour se repérer

Rappel du collège. Sur un quadrillage, on choisit une origine O et deux axes perpendiculaires, gradués avec la même unité : c'est un **repère orthonormé**. Le point $(3, -2)$ s'atteint depuis O en avançant de 3 unités sur l'axe horizontal, puis en descendant de 2 unités.

Et si les deux directions n'étaient pas perpendiculaires ?

Devine : Deux directions seulement

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Tu ne peux te déplacer que dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ ou dans celle de $\overrightarrow{AD}$. Quelle écriture donne $\overrightarrow{AC}$?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Faux.

Ce vecteur vaut $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{DB}$: c'est l'autre diagonale.

B. $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$

Faux.

Ce vecteur garde la direction de $\overrightarrow{AB}$: il ne quitte pas la droite (AB), où C n'est pas.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Juste.

Juste : c'est la règle du parallélogramme.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Faux.

Ce vecteur vaut $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BD}$: c'est l'autre diagonale, de B vers D.

Correction

Pour aller de A à C, tu fais un pas $\overrightarrow{AB}$, puis un pas $\overrightarrow{BC}$. Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, car $ABCD$ est un parallélogramme.

D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

En clair. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires : ils donnent deux directions différentes. Avec des pas dans ces deux directions, on atteint tous les points du plan ; le vecteur $\overrightarrow{AC}$, par exemple, demande un pas de chaque sorte.

Deux directions non colinéaires, même si elles ne sont pas perpendiculaires, suffisent donc pour se repérer : c'est l'idée d'un **repère**.

Repère du plan

Définition : Repère du plan

Soit O un point du plan et $\vec{i}, \vec{j}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle un **repère** du plan ; le point O est son **origine**.

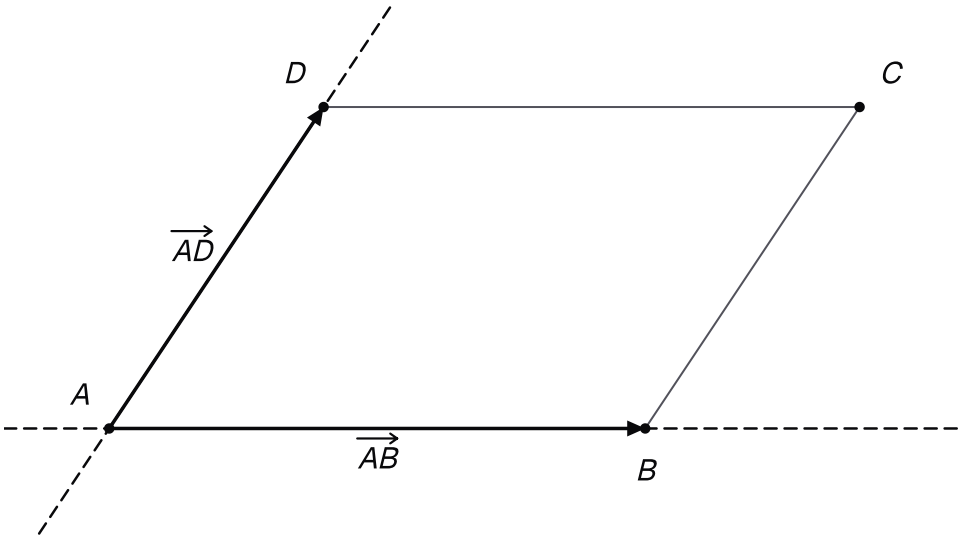
On écrit $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. La droite (OI) est l'**axe des abscisses** et la droite (OJ) l'**axe des ordonnées**.

- Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, le repère est **orthogonal**.
- Si, de plus, $OI = OJ = 1$, le repère est **orthonormé**.

Exemple : Le repère d'un parallélogramme

Dans le parallélogramme $ABCD$, les points A, B et D ne sont pas alignés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont donc pas colinéaires, et $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan, d'origine A.

Son axe des abscisses est la droite (AB), son axe des ordonnées la droite (AD). Ce repère n'est orthogonal que si $ABCD$ est un rectangle. Fais la figure sur ton cahier : un parallélogramme bien penché convient.

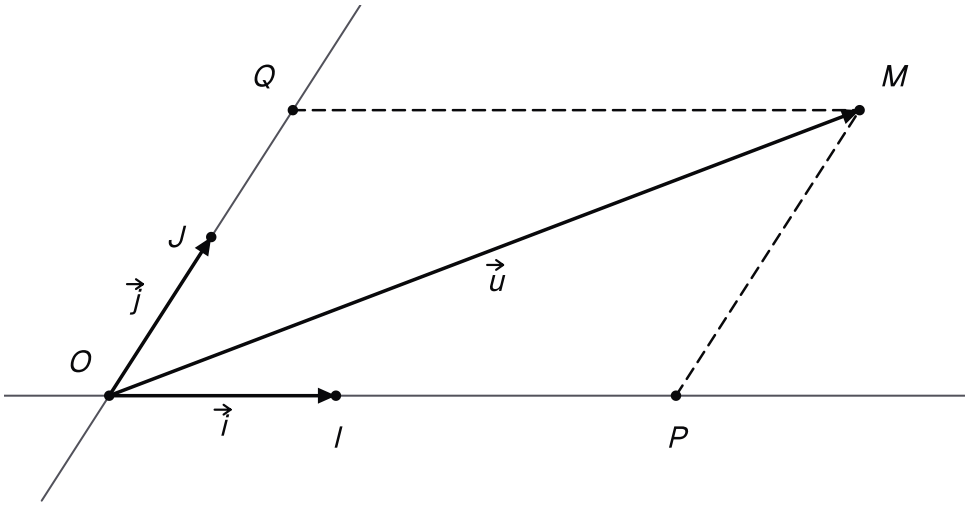


Le parallélogramme ABCD et le repère d'origine A formé par les vecteurs AB et AD, dont les axes sont les droites (AB) et (AD).

Décomposer un vecteur

Peut-on toujours écrire un vecteur avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et d'une seule façon ?

Pourquoi est-ce vrai ? Pour l'existence, on trace deux parallèles aux axes. Pour l'unicité, on montre que deux écritures différentes rendraient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ colinéaires. La preuve ci-dessous en donne l'idée.



La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en P, la parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en Q : le parallélogramme OPMQ décompose le vecteur u selon i et j.

Propriété : Décomposition d'un vecteur selon deux vecteurs non colinéaires

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un **unique** couple (x, y) de réels tel que

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Démonstration

Idée de la preuve. **Existence.** Pour un point O, on place les points I, J et M tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en P, et la parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en Q : ces droites se coupent, car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Si M n'est sur aucun des axes, $OPMQ$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$; on ne détaille pas les autres cas. Comme P est sur (OI), il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i}$; de même, $\overrightarrow{OQ} = y\,\vec{j}$.

Unicité. Si $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$ avec $x \neq x'$, alors $\vec{i} = \dfrac{y' - y}{x - x'}\,\vec{j}$: impossible, car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. Donc $x = x'$, puis $(y' - y)\,\vec{j} = \vec{0}$; or $\vec{j} \neq \vec{0}$, sinon $\vec{j} = 0\,\vec{i}$ serait colinéaire à $\vec{i}$. Donc $y = y'$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'**existence** vient d'une construction : deux parallèles aux axes forment un parallélogramme $OPMQ$. L'**unicité** vient d'un raisonnement : si deux couples différents donnaient le même vecteur, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient colinéaires.

Retiens ce réflexe : pour comparer deux écritures d'un même vecteur, on regroupe tout d'un côté.

Vérifie : L'argument de l'unicité

Dans la preuve de l'unicité, on suppose $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$. Pourquoi a-t-on forcément $x = x'$?

A. Sinon, $\vec{i}$ serait colinéaire à $\vec{j}$.

Juste.

Juste : avec $x \neq x'$, on écrirait $\vec{i}$ comme un multiple de $\vec{j}$, ce que l'hypothèse interdit.

B. Sinon, $\vec{j}$ serait le vecteur nul.

Faux.

Le vecteur nul n'intervient qu'à la fin, pour obtenir $y = y'$ une fois $x = x'$ établi.

C. Deux vecteurs égaux ont la même longueur.

Faux.

Une égalité de longueurs ne donne aucune égalité entre les réels x et x'.

D. On simplifie par $\vec{i}$ des deux côtés.

Faux.

On ne divise jamais par un vecteur : cette opération n'existe pas.

Correction

Supposons $x \neq x'$. On regroupe tout d'un côté :

$$(x - x')\,\vec{i} = (y' - y)\,\vec{j}.$$

Le réel $x - x'$ n'est pas nul : on peut diviser par lui.

$$\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\,\vec{j}.$$

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient alors colinéaires, contrairement à l'hypothèse. Donc $x = x'$.

Exemple : Quand les deux vecteurs sont colinéaires

Supposons $\vec{j} = 2\,\vec{i}$: les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont alors colinéaires.

- **L'unicité est perdue.** Le vecteur $3\,\vec{i}$ s'écrit $3\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$, mais aussi $1\,\vec{i} + 1\,\vec{j}$: deux couples différents, $(3, 0)$ et $(1, 1)$.
- **L'existence aussi.** Pour tous réels x et y, on a $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (x + 2y)\,\vec{i}$: ce vecteur est colinéaire à $\vec{i}$. Un vecteur non colinéaire à $\vec{i}$ ne s'écrit donc d'aucune façon.

L'hypothèse « non colinéaires » sert ainsi à l'existence comme à l'unicité.

Coordonnées d'un vecteur et d'un point

Définition : Coordonnées d'un vecteur et d'un point

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

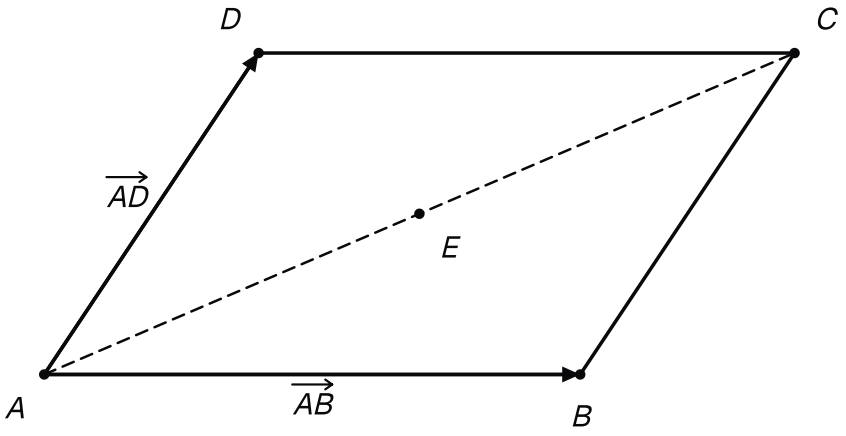
- Le couple (x, y) tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ s'appelle le couple des **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u}(x, y)$.
- Les coordonnées d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$: $M(x, y)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Le réel x est l'**abscisse** de M et le réel y son **ordonnée**.

En particulier, $O(0, 0)$, $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$ et $\vec{0}(0, 0)$.

Exemple : Coordonnées dans le repère du parallélogramme

On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- Comme $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD}$, on a $B(1, 0)$; de même, $D(0, 1)$ et $A(0, 0)$.
- D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $C(1, 1)$.
- Le centre E du parallélogramme est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ (chapitre « Calcul vectoriel dans le plan »). Ainsi $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$ et $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



Dans le repère formé par A et les vecteurs AB et AD, on lit B(1, 0), D(0, 1), C(1, 1), et le centre E a pour abscisse et pour ordonnée un demi.

À toi : Lire des coordonnées sans graduation

Toujours dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, soit F le milieu de $[CD]$. Détermine les coordonnées de F, puis celles du vecteur $\overrightarrow{BD}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\overrightarrow{AF}$, puis $\overrightarrow{BD}$, à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$ seulement, grâce à la relation de Chasles.

Indice 2

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$, et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Indice 3

Point délicat : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, car $ABCD$ est un parallélogramme ; et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Réponse

Coordonnées de F. D'après la relation de Chasles, puis l'égalité $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ du parallélogramme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Coordonnées de $\overrightarrow{BD}$. De même, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a $F\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $\overrightarrow{BD}(-1, 1)$.

Calculer avec les coordonnées de vecteurs

Coordonnée par coordonnée

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3)$. Cela signifie $\vec{u} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 3\,\vec{j}$. On regroupe les $\vec{i}$, puis les $\vec{j}$:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (2 + 1)\,\vec{i} + (-1 + 3)\,\vec{j} \\ &= 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(3, 2)$: on calcule **coordonnée par coordonnée**.

Pourquoi est-ce vrai ? Parce que l'écriture avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est unique : le couple $(3, 2)$ est le seul possible.

Devine : Un calcul à prévoir

Avec les mêmes vecteurs $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1, 3)$, quelles sont les coordonnées de $2\,\vec{u} - \vec{v}$?

A. $(1, -4)$
Faux.
Ce sont les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$: le facteur 2 a été oublié.

B. $(5, 1)$
Faux.
Ce sont les coordonnées de $2\,\vec{u} + \vec{v}$: le signe moins a été perdu.

C. $(3, -4)$
Faux.
L'abscisse est juste, mais l'ordonnée de $2\,\vec{u}$ vaut $2 \times (-1) = -2$, pas -1.

D. $(3, -5)$
Juste.
Juste : $2 \times 2 - 1 = 3$ et $2 \times (-1) - 3 = -5$.

Correction
D'après les règles de calcul sur les vecteurs :

$$\begin{aligned}2\,\vec{u} - \vec{v} &= 2\,(2\,\vec{i} - \vec{j}) \\ &\quad - (\vec{i} + 3\,\vec{j}) \\ &= 3\,\vec{i} - 5\,\vec{j}.\end{aligned}$$

Les coordonnées de $2\,\vec{u} - \vec{v}$ sont donc $(3, -5)$.

Somme, produit par un réel, égalité

Propriété : Calculs sur les coordonnées de vecteurs

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs et k un réel.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x', y+y')$.
- Le vecteur $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Démonstration

Étape 1. D'après les règles de calcul sur la somme et sur le produit par un réel :

$$\vec{u}+\vec{v} = (x\,\vec{i}+y\,\vec{j})+(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}) = (x+x')\,\vec{i}+(y+y')\,\vec{j}.$$

Par l'unicité de la décomposition, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(x+x', y+y')$.

Étape 2. De même, $k\,\vec{u} = k\,(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}) = (kx)\,\vec{i}+(ky)\,\vec{j}$, donc $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Étape 3. Si $\vec{u}=\vec{v}$, ce vecteur s'écrit de deux façons $x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ et $x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}$; par l'unicité de la décomposition, $x=x'$ et $y=y'$. Réciproquement, si $x=x'$ et $y=y'$, alors $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}=\vec{v}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit toujours le même chemin : **écrire** chaque vecteur avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, **regrouper** les termes en $\vec{i}$ et en $\vec{j}$, puis **lire** les coordonnées.

Cette lecture est permise par l'unicité de la décomposition. Sans elle, un vecteur pourrait avoir deux couples de coordonnées.

Vérifie : L'étape 3 de la preuve

Dans l'étape 3, quelle propriété permet de conclure que $x=x'$ et $y=y'$ lorsque $\vec{u}=\vec{v}$?

A. La relation de Chasles.

Faux.
La relation de Chasles décompose un vecteur en passant par un point ; elle ne sert pas dans cette preuve.

B. L'unicité de la décomposition selon $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Juste.
Juste : le même vecteur ne s'écrit que d'une façon, donc les deux couples sont égaux.

C. La règle de calcul sur la somme de deux vecteurs.

Faux.
Elle sert à l'étape 1, pour les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$.

D. La caractérisation vectorielle du milieu.

Faux.
Aucun milieu n'intervient dans cette preuve.

Correction

Si $\vec{u} = \vec{v}$, ce vecteur s'écrit $x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, et aussi $x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$. D'après l'unicité de la décomposition, les deux couples sont les mêmes : $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple : Deux vecteurs égaux

Soit r et s deux réels, $\vec{w}(2r-1, 4)$ et $\vec{w}'(5, s-2)$.

D'après les calculs sur les coordonnées, $\vec{w} = \vec{w}'$ si et seulement si $2r - 1 = 5$ et $4 = s - 2$, c'est-à-dire $r = 3$ et $s = 6$.

Contrôle. Pour $r = 3$, on obtient $\vec{w}(5, 4)$; pour $s = 6$, on obtient $\vec{w}'(5, 4)$.

Vecteur défini par deux points, milieu

Tu connais les coordonnées de deux points A et B. Comment obtenir celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$, sans figure ?

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles fait passer par l'origine : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Il reste à soustraire, coordonnée par coordonnée.

Rappel du collège. Dans un repère orthonormé, les coordonnées du milieu sont les moyennes de celles des extrémités. Ici, on le démontre dans n'importe quel repère.

Propriété : Coordonnées d'un vecteur défini par deux points et d'un milieu

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ ont pour coordonnées (x_B, y_B) et (x_A, y_A). D'après les calculs sur les coordonnées, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Étape 2. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Étape 3. En passant aux coordonnées, l'abscisse de I est $x_A + \dfrac{1}{2}(x_B - x_A) = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, et son ordonnée est, de même, $\dfrac{y_A + y_B}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour passer des points aux vecteurs, on **passe par l'origine** O avec la relation de Chasles : les coordonnées d'un point sont celles d'un vecteur d'origine O. Pour le milieu I, on part de A et l'on avance de la moitié de $\overrightarrow{AB}$.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans l'étape 1, quelle égalité permet de calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Juste.

Juste : c'est la relation de Chasles, en passant par O.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vaut $2\,\overrightarrow{OI}$, où I est le milieu de $[AB]$: ce n'est pas $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ est $\overrightarrow{BA}$: l'origine et l'extrémité sont échangées.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}$

Faux.

Le signe est faux : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

Correction

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ et de $\overrightarrow{OA}$ sont celles de B et de A : on les soustrait, coordonnée par coordonnée.

Méthode et exemple

Méthode : calculer des coordonnées

1. **Noter** les coordonnées des points de l'énoncé.
2. **Vecteur défini par deux points** : extrémité moins origine, soit $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ pour $\overrightarrow{AB}$.
3. **Milieu** : moyenne des abscisses, puis moyenne des ordonnées.
4. **Point inconnu** donné par une égalité de vecteurs : poser ses coordonnées (x, y), égaler les coordonnées des deux membres, puis résoudre chaque équation du premier degré.

Exemple : Quatrième sommet d'un parallélogramme

Dans un repère orthonormé, $A(-1,2)$, $B(3,1)$ et $C(4,4)$. On cherche $D(x,y)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Coordonnées des vecteurs. On soustrait l'origine à l'extrémité : $\overrightarrow{BC}(1,3)$ et $\overrightarrow{AD}(x+1, y-2)$.

Point D. D'après les calculs sur les coordonnées, $x+1=1$ et $y-2=3$, donc $D(0,5)$.

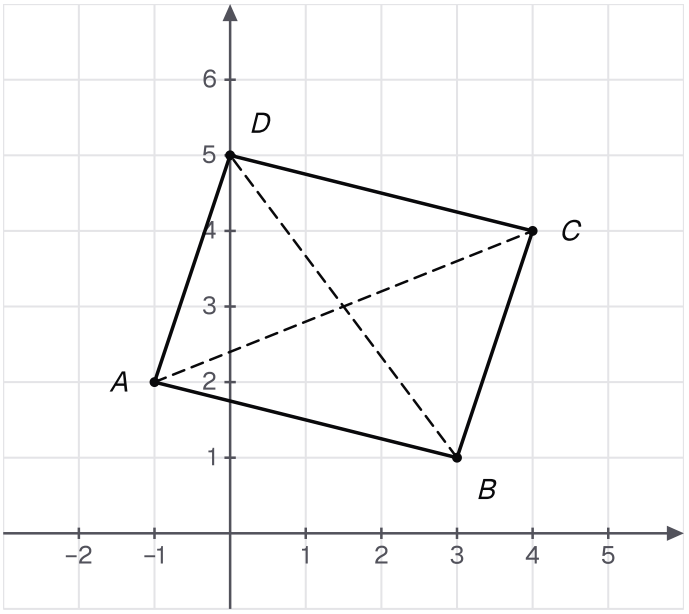
Contrôle. Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3\right),$$

et celui de $[BD]$

$$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

Les diagonales ont le même milieu.



Le point D(0, 5) trouvé par le calcul complète le parallélogramme ABCD, dont les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu commun.

Attention : Extrémité moins origine

✗ Avec $A(5,-2)$ et $B(1,3)$, écrire $\overrightarrow{AB}(5-1, -2-3)$, soit $(4,-5)$.

✓ On soustrait les coordonnées de l'**origine** A à celles de l'**extrémité** B : $\overrightarrow{AB}(1-5, 3-(-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-4,5)$. Le couple $(4,-5)$ est celui de $\overrightarrow{BA}$.

À toi, puis en devoir

À toi : Un milieu et un point à placer

Dans un repère, $E(2,-3)$ et $F(-4,1)$. Calcule les coordonnées du milieu K de $[EF]$, puis celles du point G tel que $\overrightarrow{EG} = 2\,\overrightarrow{EF}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour le milieu, fais la moyenne des abscisses, puis celle des ordonnées.
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{EF}$, puis $2\,\overrightarrow{EF}$; pose $G(x,y)$ et écris les coordonnées de $\overrightarrow{EG}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{EG}(x-2, y+3)$, car on soustrait -3 ; contrôle ensuite que F est le milieu de $[EG]$.

Réponse
Milieu K. D'après les coordonnées d'un milieu :

$$K\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right),$$

soit $K(-1,-1)$.

Point G. D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{EF}(-6,4)$, donc $2\,\overrightarrow{EF}(-12,8)$. Avec $G(x,y)$, on a $\overrightarrow{EG}(x-2, y+3)$.

L'égalité des coordonnées donne $x-2=-12$ et $y+3=8$, donc $G(-10,5)$.

Contrôle. Le milieu de $[EG]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{2-10}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (-4,1).$$

C'est bien le point F.

Conclusion. Le milieu de $[EF]$ est $K(-1,-1)$, et le point cherché est $G(-10,5)$.

Remarque : Coin devoir : rédiger un calcul de coordonnées

En devoir, chaque coordonnée calculée s'accompagne de la propriété employée. Écris par exemple : « D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{BC}(1,3)$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $x+1=1$ et $y-2=3$, d'où $D(0,5)$. » Termine par un contrôle : les deux diagonales ont le même milieu.

Déterminant et colinéarité

Des coordonnées proportionnelles

Les vecteurs $\vec{u}(2,-3)$ et $\vec{v}(-4,6)$ sont colinéaires, car $\vec{v} = -2\,\vec{u}$. Leurs coordonnées forment un **tableau de proportionnalité** : $-4 = -2\times 2$ et $6 = -2\times(-3)$.

Rappel du collège. Dans un tableau de proportionnalité, les **produits en croix** sont égaux. Ici, $2 \times 6 = 12$ et $(-4) \times (-3) = 12$.

Devine : Colinéaires ou non ?

Parmi ces couples, lequel est celui d'un vecteur colinéaire à $\vec{w}(3, -5)$?

A. $(-5, 3)$
Faux.
Les coordonnées ont été échangées : $3 \times 3 = 9$ et $(-5) \times (-5) = 25$, les produits en croix diffèrent.

B. $(5, -3)$
Faux.
Les produits en croix valent $3 \times (-3) = -9$ et $5 \times (-5) = -25$: ils diffèrent.

C. $(-6, 10)$
Juste.
Juste : chaque coordonnée de $\vec{w}$ est multipliée par -2.

D. $(6, -8)$
Faux.
L'abscisse a doublé, mais pas l'ordonnée : $2 \times (-5) = -10$, pas -8.

Correction
Le vecteur $\vec{z}(-6, 10)$ vérifie $-2 \times 3 = -6$ et $-2 \times (-5) = 10$. D'après les calculs sur les coordonnées, $\vec{z} = -2\,\vec{w}$: il est colinéaire à $\vec{w}$.

Contrôle par les produits en croix : $3 \times 10 = 30$ et $(-6) \times (-5) = 30$.

Le déterminant

Définition : Déterminant de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs. Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, est le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Exemple : Calculer un déterminant

Avec $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}(5, 4)$:

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 4 - 5\times(-2) \\ &= 12 + 10 = 22.\end{aligned}$$

Les coordonnées de chaque vecteur s'écrivent **en colonne**, et l'on calcule « diagonale descendante moins diagonale montante ».

Dans l'autre ordre, le signe change :

$$\begin{aligned}\det(\vec{v},\vec{u}) &= 5\times(-2) - 3\times 4 \\ &= -22.\end{aligned}$$

Condition analytique de colinéarité

Pour $\vec{u}(2,-3)$ et $\vec{v}(-4,6)$, le déterminant vaut $2\times 6-(-4)\times(-3)=0$. Est-ce un hasard ?

Pourquoi est-ce vrai ? Si $\vec{v}=k\,\vec{u}$, les deux produits du déterminant valent kxy. Réciproquement, un déterminant nul permet de fabriquer le coefficient k.

Théorème : Condition analytique de colinéarité

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u},\vec{v})=0.$$

Démonstration

On note $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$.

Étape 1. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Si $\vec{v}=k\,\vec{u}$, alors $\vec{v}(kx,ky)$ d'après les calculs sur les coordonnées, et $\det(\vec{u},\vec{v}) = x\times ky - kx\times y = 0$. Si $\vec{u}=k\,\vec{v}$, le calcul est le même en échangeant les rôles : $kx'\times y' - x'\times ky' = 0$.

Étape 2. Réciproquement, supposons $xy'-x'y=0$. Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $\vec{u}=0\,\vec{v}$: les vecteurs sont colinéaires. Sinon, on distingue deux cas.

- Si $x\neq 0$, on pose $k=\dfrac{x'}{x}$: alors $x'=kx$ et $y'=\dfrac{x'y}{x}=ky$.
- Si $x=0$, alors $y\neq 0$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$, et $x'y=0$, donc $x'=0=kx$ avec $k=\dfrac{y'}{y}$, et $y'=ky$.

Dans les deux cas, $\vec{v}$ et $k\,\vec{u}$ ont les mêmes coordonnées : d'après les calculs sur les coordonnées, $\vec{v}=k\,\vec{u}$, et les vecteurs sont colinéaires.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans le sens direct, on **remplace** les coordonnées de $\vec{v}$ par (kx,ky) : le déterminant se simplifie en 0. Dans la réciproque, on **fabrique** le coefficient k par un quotient.

On ne divise jamais par un nombre qui peut être nul : c'est pourquoi la preuve sépare deux cas, $x \neq 0$ et $x = 0$.

Vérifie : Les deux cas de la réciproque

Dans la réciproque, pourquoi la preuve distingue-t-elle le cas $x \neq 0$ et le cas $x = 0$?

A. Parce que le vecteur $\vec{u}$ est nul lorsque $x = 0$.

Faux.

Le vecteur $\vec{u}(0, 2)$ n'est pas nul. Si $x = 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, c'est y qui n'est pas nul.

B. Pour pouvoir diviser par x en posant $k = \dfrac{x'}{x}$.

Juste.

Juste : le quotient $\dfrac{x'}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$; sinon, on divise par y.

C. Parce que le déterminant change de signe selon x.

Faux.

Le déterminant est nul par hypothèse : son signe ne joue aucun rôle.

D. Pour démontrer d'abord le sens direct.

Faux.

Le sens direct est l'étape 1 ; les deux cas portent sur la réciproque.

Correction

Pour obtenir $\vec{v} = k\,\vec{u}$, il faut fabriquer k.

- Si $x \neq 0$, on pose $k = \dfrac{x'}{x}$.
- Si $x = 0$, ce quotient n'existe pas ; mais alors $y \neq 0$, car $\vec{u} \neq \vec{0}$, et l'on pose $k = \dfrac{y'}{y}$.

Ainsi, on ne divise jamais par zéro.

Exemple : Quand les quotients ne marchent plus

Les vecteurs $\vec{u}(0, 2)$ et $\vec{v}(0, -5)$ sont colinéaires, car $\vec{v} = -\dfrac{5}{2}\,\vec{u}$. Pourtant, le quotient des abscisses $\dfrac{0}{0}$ n'a pas de sens : la comparaison des quotients échoue. Le déterminant, lui, fonctionne toujours : $0 \times (-5) - 0 \times 2 = 0$.

À l'inverse, les coordonnées de $\vec{u}'(2, 3)$ et de $\vec{v}'(4, 5)$ augmentent toutes les deux. Pourtant :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}', \vec{v}') &= 2 \times 5 - 4 \times 3 \\ &= -2 \neq 0. \end{aligned}$$

D'après la condition analytique de colinéarité, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Alignement de trois points

Si $A \neq B$, trois points A, B, C sont alignés exactement quand $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : c'est la propriété d'alignement du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan ».

Pourquoi est-ce vrai ? Il suffit de traduire cette colinéarité par le déterminant, sans oublier le cas $A = B$.

Propriété : Alignement de trois points : condition analytique

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Si $A = B$, les trois points sont alignés et $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; le déterminant vaut $0 \times y' - x' \times 0 = 0$, en notant (x', y') les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$. L'équivalence est vraie.

Étape 2. Si $A \neq B$, d'après la propriété d'alignement de trois points, A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire, d'après la condition analytique de colinéarité, si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne calcule rien de nouveau : elle **enchaîne** deux équivalences connues, alignement et colinéarité, puis colinéarité et déterminant. Le cas $A = B$ est traité à part, car la propriété d'alignement suppose $A \neq B$.

Vérifie : Le cas à part

Pourquoi la preuve traite-t-elle à part le cas $A = B$?

A. Parce que le déterminant n'existe pas si $A = B$.
Faux.
Il existe : avec $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, il vaut 0.

B. Parce que trois points avec $A = B$ ne sont jamais alignés.
Faux.
C'est l'inverse : deux points confondus et un troisième point sont toujours alignés.

C. Parce que l'ordre des points change le déterminant.
Faux.
Changer l'ordre des points peut changer le signe du déterminant, jamais sa nullité : ce n'est pas la raison du cas à part.

D. La propriété d'alignement de trois points suppose $A \neq B$.

Juste.

Juste : sans $A \neq B$, on ne peut pas employer cette propriété ; le cas $A = B$ se règle directement.

Correction

La propriété d'alignement dit : si $A \neq B$, les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Elle ne s'applique pas pour $A = B$.

Dans ce cas, les points sont alignés et le déterminant vaut 0 : l'équivalence est vraie directement.

Méthode et exemple

Méthode : colinéarité, alignement, parallélisme

1. **Calculer** les coordonnées des vecteurs en jeu : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour un alignement, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour un parallélisme.
2. **Choisir** un outil : le déterminant, toujours utilisable ; ou un réel k tel qu'un vecteur soit k fois l'autre ; ou les quotients des coordonnées, si aucune n'est nulle.
3. **Conclure** en nommant la propriété : condition analytique de colinéarité, condition analytique d'alignement, ou colinéarité et parallélisme.

Le déterminant est l'outil conseillé : il ne demande aucune précaution.

Exemple : Un alignement par deux méthodes

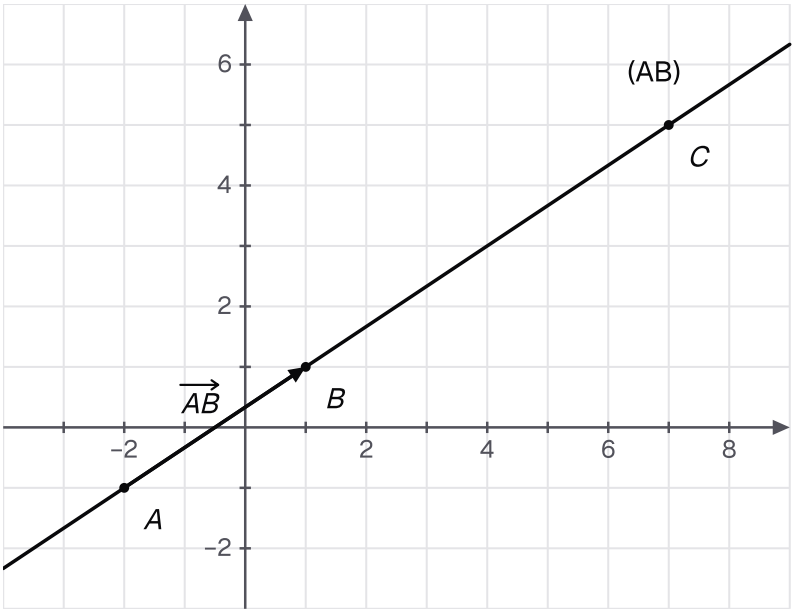
Dans un repère, $A(-2, -1)$, $B(1, 1)$ et $C(7, 5)$. D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{AB}(3, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(9, 6)$.

Par le déterminant. On calcule :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 3 \times 6 - 9 \times 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après la condition analytique d'alignement, A, B, C sont alignés.

Par un coefficient. $9 = 3 \times 3$ et $6 = 3 \times 2$, donc $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$. D'après la propriété d'alignement de trois points, A, B, C sont alignés.



Les points A(-2, -1), B(1, 1) et C(7, 5) sont sur une même droite : de A à C, on avance de trois fois le vecteur AB.

À toi : Trouver le point qui aligne

Détermine le réel x tel que les points $P(1, 4)$, $Q(3, -2)$ et $R(x, 7)$ soient alignés. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Traduis l'alignement par un déterminant nul : il faut les coordonnées de $\overrightarrow{PQ}$ et de $\overrightarrow{PR}$.
Indice 2
$\overrightarrow{PQ}(2, -6)$ et $\overrightarrow{PR}(x - 1, 3)$; écris le déterminant, puis développe.
Indice 3
Point délicat : le second produit est $(x - 1) \times (-6)$; soustraire un nombre négatif revient à ajouter.

Réponse
D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{PQ}(2, -6)$ et $\overrightarrow{PR}(x - 1, 3)$.

D'après la condition analytique d'alignement, les points sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &2 \times 3 - (x - 1) \times (-6) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En développant, $6 + 6x - 6 = 0$, soit $6x = 0$, donc $x = 0$.

Contrôle. Avec $R(0, 7)$, on a $\overrightarrow{PR}(-1, 3)$ et $\overrightarrow{PQ} = -2\,\overrightarrow{PR}$.

Conclusion. Les points P, Q et R sont alignés pour $x = 0$, et seulement pour cette valeur.

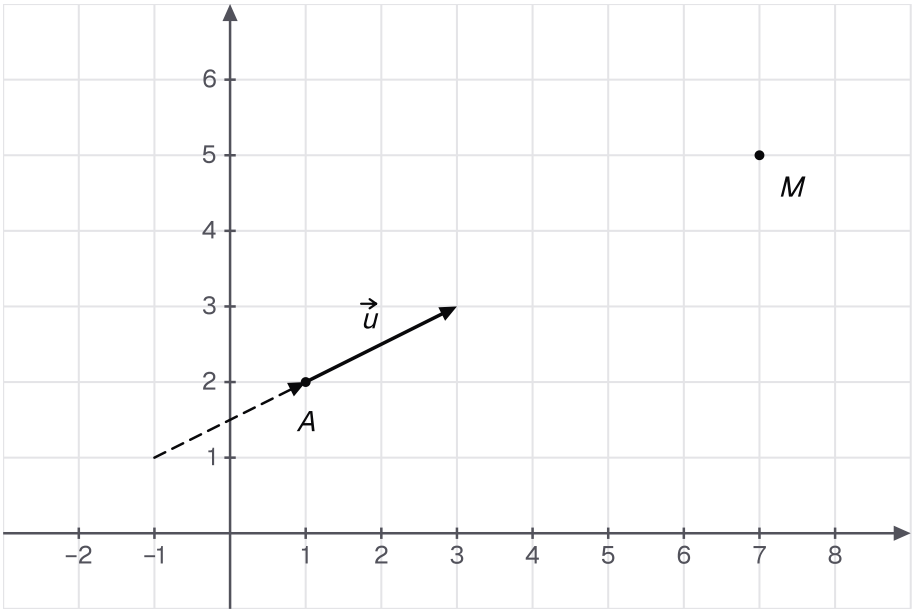
Droite et représentation paramétrique

Le robot, à chaque instant

Reprends le robot de l'entrée : il part de $A(1, 2)$ et avance chaque seconde selon le vecteur $\vec{u}(2, 1)$. Au temps t, il est au point M tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

Pour $t = 3$, $M(7, 5)$. On peut aussi regarder le passé : pour $t = -1$, le robot était en $(-1, 1)$.

Toutes ces positions vérifient une même condition : $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.



Le robot part de A en suivant le vecteur u ; au temps 3 il est en M(7, 5), et une seconde avant le départ il était au point (-1, 1).

Devine : La trace du robot

Imagine que le robot roule depuis toujours, et pour toujours, avec le même mouvement. Quel ensemble forment les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ?

A. Un segment d'extrémité A.

Faux.

Le réel t n'est pas borné : le robot va aussi loin qu'on veut.

B. Une demi-droite d'origine A.

Faux.

Les valeurs négatives de t donnent aussi des points, de l'autre côté de A.

C. Une droite passant par A.

Juste.

Juste : toutes les valeurs de t, positives ou négatives, donnent une droite entière.

D. Deux droites passant par A.

Faux.

Une seule direction intervient, celle de $\vec{u}$: on obtient une seule droite.

Correction

> Le point M convient lorsqu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. Pour t positif, M est en avant de A ; pour t négatif, en arrière ; pour $t = 0$, $M = A$. On obtient la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Droite définie par un point et un vecteur

Définition : Droite définie par un point et un vecteur directeur

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur **non nul**. La **droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$**, notée $D(A, \vec{u})$, est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle un **vecteur directeur** de cette droite.

Exemple : Un point est-il sur la droite ?

Soit $D = D(A, \vec{u})$ avec $A(1, 2)$ et $\vec{u}(2, 1)$.

Le point $B(5, 4)$. On a $\overrightarrow{AB}(4, 2)$ et

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) &= 4 \times 1 - 2 \times 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après la condition analytique de colinéarité, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : B est sur D.

Le point $N(4, 4)$. On a $\overrightarrow{AN}(3, 2)$ et

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AN}, \vec{u}) &= 3 \times 1 - 2 \times 2 \\ &= -1 \neq 0.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires : N n'est pas sur D.

La droite D a-t-elle d'autres vecteurs directeurs ? Peut-on la décrire à partir de B plutôt que de A ? **Pourquoi est-ce vrai ?** Multiplier $\vec{u}$ par un réel non nul, ou changer de point de départ sur D, ne change pas la nullité du déterminant.

Vecteurs directeurs et points d'une droite

Propriété : Vecteurs directeurs et points d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $D = D(A, \vec{u})$.

- Si B est un point de D distinct de A, alors D est la droite (AB) et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D.
- Tout vecteur **non nul** colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.
- Si C est un point de D, alors $D = D(C, \vec{u})$.

Démonstration

Remarque. Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$. Si $\vec{u} = k'\,\vec{w}$, alors $k' \neq 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\vec{w} = \dfrac{1}{k'}\,\vec{u}$. Dans tous les cas, $\vec{w} = k\,\vec{u}$, avec $k \neq 0$ car $\vec{w} \neq \vec{0}$. D'après les calculs sur les coordonnées, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{w}) = k \times \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ pour tout point M : d'après la condition analytique de colinéarité, $D(A, \vec{w}) = D$.

Étape 1. Si B est sur D et $B \neq A$, la remarque s'applique à $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$: $D = D(A, \overrightarrow{AB})$. D'après la propriété d'alignement de trois points, M est sur D si et seulement si A, B, M sont alignés, c'est-à-dire si et seulement si M est sur (AB).

Étape 2. Si $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$, la remarque donne $D(A, \vec{v}) = D$.

Étape 3. Si C est sur D, on a $\det(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) = 0$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}$, donc $\det(\overrightarrow{CM}, \vec{u}) = \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) - \det(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) = \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$. Ainsi $D(C, \vec{u}) = D$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur une remarque : remplacer $\vec{u}$ par $k\,\vec{u}$, avec $k \neq 0$, **multiplie le déterminant par** k, sans changer sa nullité. Changer de point de départ sur la droite ne le change pas non plus, grâce à la relation de Chasles.

Vérifie : Le rôle du coefficient

Dans la remarque de la preuve, pourquoi faut-il $k \neq 0$ pour que $k\,\vec{u}$ dirige encore D ?

A. Avec $k = 0$, le vecteur $k\,\vec{u}$ est nul ; or un vecteur directeur n'est jamais nul.

Juste.
Juste : de plus, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{0}) = 0$ pour tout point M, ce qui ne décrit plus une droite.

B. Avec k négatif, le vecteur change de sens et ne dirige plus D.

Faux.
Un vecteur de sens contraire dirige la même droite : $-\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

C. Il faut en plus que k soit un entier.

Faux.
Tout réel non nul convient, par exemple $k = \dfrac{1}{2}$.

D. Il faut $k = 1$, sinon le vecteur est trop long.

Faux.
La longueur ne compte pas : seule la direction compte.

Correction

Soit k un réel non nul. Pour tout point M :

$$\det(\overrightarrow{AM}, k\,\vec{u}) = k \times \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}).$$

Les deux déterminants sont nuls pour les mêmes points M, donc $D(A, k\,\vec{u}) = D$.

Si $k = 0$, le vecteur obtenu est nul : d'après la définition d'une droite par un point et un vecteur directeur, il ne peut pas diriger une droite.

Exemple : Plusieurs descriptions d'une même droite

Reprends $D = D(A, \vec{u})$ avec $A(1, 2)$ et $\vec{u}(2, 1)$. D'après la propriété des vecteurs directeurs et points d'une droite :

- le point $B(5, 4)$ est sur D et distinct de A, donc $D = (AB)$, et $\overrightarrow{AB}(4, 2)$ dirige D ;
- le vecteur $\vec{v}(-6, -3)$ vérifie $\vec{v} = -3\,\vec{u}$: non nul et colinéaire à $\vec{u}$, il dirige D ;
- le point $C(-1, 1)$ est sur D, car $\overrightarrow{AC}(-2, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = -\vec{u}$: donc $D = D(C, \vec{u})$.

Représentation paramétrique

Pour le robot, l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ s'écrit avec les coordonnées : $x - 1 = 2t$ et $y - 2 = t$. Au temps t, il est donc en $(1 + 2t, 2 + t)$.

Pourquoi est-ce vrai ? Une égalité de vecteurs équivaut à deux égalités de coordonnées.

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A, y_A)$ un point et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

Ce système, où t décrit $\mathbb{R}$, s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite $D(A, \vec{u})$; le réel t est le **paramètre**.

Démonstration

Étape 1. Le point M appartient à $D(A, \vec{u})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\,\overrightarrow{AM}$. Dans le second cas, $k \neq 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k}\,\vec{u}$. Inversement, une égalité $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ rend les deux vecteurs colinéaires. Donc M est sur $D(A, \vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

Étape 2. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A)$ et le vecteur $t\,\vec{u}$ a pour coordonnées $(t\alpha, t\beta)$. D'après les calculs sur les coordonnées, $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ équivaut à $x - x_A = t\alpha$ et $y - y_A = t\beta$, c'est-à-dire au système annoncé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées suffisent. Comme $\vec{u}$ n'est pas nul, « colinéaire à $\vec{u}$ » s'écrit $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. Puis une égalité de vecteurs se **traduit** par deux égalités de coordonnées.

Chaque valeur de t donne un point de la droite, et chaque point de la droite correspond à une valeur de t.

Vérifie : Un seul t

L'égalité $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ donne deux équations, une pour x et une pour y. Pourquoi le même t figure-t-il dans les deux ?

A. Parce que t multiplie le vecteur $\vec{u}$ tout entier, abscisse et ordonnée ensemble.

Juste.
Juste : un seul facteur agit sur les deux coordonnées de $\vec{u}$.

B. C'est seulement une habitude d'écriture.

Faux.
Non : avec deux réels différents, on obtiendrait en général un point hors de la droite.

C. Parce que x et y sont toujours égaux.

Faux.
Non : pour le robot, $x = 1 + 2t$ et $y = 2 + t$ sont en général différents.

D. Parce que t est le temps, qui ne peut pas être négatif.

Faux.
Le paramètre t décrit tous les réels, valeurs négatives comprises.

Correction
Si $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, chaque coordonnée de $\vec{u}$ est multipliée par le même réel t : $x - x_A = t\alpha$ et $y - y_A = t\beta$.

C'est pourquoi, pour tester un point, une seule valeur de t doit convenir aux deux équations.

Exemple : La droite (AB) en paramètres

Soit $A(-2, 3)$ et $B(1, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(3, -4)$ n'est pas nul et dirige (AB). D'après la représentation paramétrique d'une droite, (AB) admet la représentation

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Quelques valeurs du paramètre :

- pour $t = 0$, on retrouve A ;

- pour $t = 1$, on trouve B ;
- pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, le milieu de $[AB]$.

Méthode et appartenance

Méthode : représentation paramétrique et appartenance

1. **Choisir** un point A de la droite et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ non nul ; pour la droite (AB), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ convient.
2. **Écrire** $x = x_A + t\alpha$ et $y = y_A + t\beta$ dans une accolade, avec t réel.
3. **Tester** un point : résoudre l'équation des abscisses en t (celle des ordonnées si $\alpha = 0$), puis remplacer cette valeur dans l'autre. Le point est sur la droite si et seulement si une même valeur convient aux deux.

Exemple : Tester deux points

Avec la représentation de (AB) ci-dessus :

- **Le point $P(7, -9)$.** L'équation $-2 + 3t = 7$ donne $t = 3$, puis $3 - 4 \times 3 = -9$. La même valeur convient : P est sur (AB).
- **Le point $Q(4, -4)$.** L'équation $-2 + 3t = 4$ donne $t = 2$, puis $3 - 4 \times 2 = -5 \neq -4$. Le point Q n'est pas sur (AB).

Attention : Une seule valeur de t pour un point

✗ Pour $Q(4, -4)$, trouver $t = 2$ avec l'abscisse et $t = \frac{7}{4}$ avec l'ordonnée, puis conclure que Q est sur (AB).

✓ Un point de la droite correspond à **une seule** valeur de t, qui vérifie les deux équations à la fois. Deux valeurs différentes prouvent que Q n'est **pas** sur (AB).

À toi : Le robot passera-t-il par là ?

Le robot de l'entrée suit la droite D de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Passe-t-il par $S(-5, -1)$? Par $T(6, 4)$? Écris enfin une représentation paramétrique de D qui donne S pour $t = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque point, cherche t avec l'abscisse, puis vérifie l'ordonnée.

Indice 2

Pour S, $1+2t=-5$ donne $t=-3$; pour T, $1+2t=6$ donne $t=\dfrac{5}{2}$.

Indice 3

Point délicat : un point de la droite peut servir de point de départ, d'après la propriété des vecteurs directeurs et points d'une droite ; le vecteur directeur reste $\vec{u}(2,1)$.

Réponse

Le point S. L'équation $1+2t=-5$ donne $t=-3$, et $2+(-3)=-1$. La même valeur convient aux deux équations : S est sur D.

Le point T. L'équation $1+2t=6$ donne $t=\dfrac{5}{2}$, mais $2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}\neq 4$. Le point T n'est pas sur D.

Nouvelle représentation. Comme S est sur D, d'après la propriété des vecteurs directeurs et points d'une droite, $D=D(S,\vec{u})$ avec $\vec{u}(2,1)$. Une représentation paramétrique de D qui donne S pour $t=0$ est donc

$$\begin{cases} x=-5+2t \\ y=-1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Équation cartésienne et équation réduite

Une condition sur x et y

Rappel du collège. Le point $M(x,y)$ est sur la droite d'équation $y=2x-1$ lorsque ses coordonnées vérifient l'égalité : $(3,5)$ convient, car $2\times 3-1=5$.

Mais la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par $(2,0)$ n'a pas d'équation de ce type, car tous ses points ont la même abscisse. Il faut une forme plus générale : la suite la construit avec le déterminant.

Devine : Une équation à prévoir

Soit $A(1,-1)$ et $\vec{u}(2,3)$. Le point $M(x,y)$ est sur $D(A,\vec{u})$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$. Quelle équation obtient-on en développant ?

A. $2x+3y+1=0$

Faux.

Cette droite passe bien par A, mais elle est dirigée par $(-3,2)$, qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$: les coordonnées de $\vec{u}$ ont été prises comme coefficients.

B. $3x+2y-1=0$

Faux.

Elle passe par A, mais son vecteur directeur $(-2, 3)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$: un signe a été perdu dans le second produit.

C. $2x - 3y - 5 = 0$

Faux.
Elle passe par A, mais elle est dirigée par $(3, 2)$: les coordonnées ont été placées dans le mauvais ordre.

D. $3x - 2y - 5 = 0$

Juste.
Juste : $3(x-1) - 2(y+1) = 3x - 2y - 5$.

Correction
D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{AM}(x-1, y+1)$. Alors

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) &= (x-1) \times 3 \\ &\quad - 2 \times (y+1) \\ &= 3x - 2y - 5.\end{aligned}$$

Le point M est sur la droite si et seulement si $3x - 2y - 5 = 0$. Les quatre équations proposées passent par A : seule la direction permet de choisir.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour toute droite $D(A, \vec{u})$, la condition $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ se développe de même en une égalité du premier degré en x et y.

Équation cartésienne

Théorème : Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$: un point $M(x, y)$ appartient à D si et seulement si $ax + by + c = 0$. Une telle équation s'appelle une **équation cartésienne** de D.
- Réciproquement, si a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Démonstration

Étape 1. Une droite (AB), avec $A \neq B$, est la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$, d'après la propriété d'alignement de trois points. Soit donc $D = D(A, \vec{u})$ avec $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta) \neq \vec{0}$. D'après la condition analytique de colinéarité, $M(x, y)$ est sur D si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, c'est-à-dire $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$. C'est l'équation $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$, $c = \alpha y_A - \beta x_A$, et $(a, b) \neq (0, 0)$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Étape 2. Réciproquement, on choisit un point A dont les coordonnées vérifient l'équation : $A\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ si $b \neq 0$, ou $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ si $b = 0$, car alors $a \neq 0$. Ainsi $ax_A + by_A + c = 0$. Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ n'est pas nul.

Étape 3. Pour tout point $M(x, y)$, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax + by + c$. D'après la condition analytique de colinéarité, M vérifie l'équation si et seulement si M est sur $D(A, \vec{u})$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve tient dans une égalité : une fois développé, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ **est** l'expression $ax + by + c$.

Dans un sens, on développe. Dans l'autre, on choisit un point A qui vérifie l'équation et le vecteur $(-b, a)$, puis on retrouve la même égalité.

Vérifie : Le vecteur de la réciproque

Dans l'étape 2, pourquoi le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ n'est-il pas nul ?

A. Parce que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Juste.
Juste : si $\vec{u}$ était nul, on aurait $a = 0$ et $b = 0$, ce que l'hypothèse exclut.

B. Parce que le point A vérifie l'équation.

Faux.
Le choix de A ne dit rien sur le vecteur $(-b, a)$.

C. Parce que $c \neq 0$.

Faux.
Le réel c peut être nul : $x - y = 0$ est l'équation d'une droite.

D. Parce que $-b$ et a sont de signes contraires.

Faux.
Rien ne l'impose : avec $a = 1$ et $b = -1$, ces deux nombres valent 1.

Correction
Le vecteur $(-b, a)$ est nul si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. Or l'énoncé suppose $(a, b) \neq (0, 0)$. Donc $\vec{u}(-b, a)$ n'est pas nul : il peut servir de vecteur directeur.

Trouver une équation cartésienne

Méthode : trouver une équation cartésienne

1. **Repérer** un point $A(x_A, y_A)$ de la droite et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

2. **Écrire** la condition $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, avec $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$.
3. **Développer et ordonner** pour obtenir la forme $ax + by + c = 0$.
4. **Contrôler** : A vérifie l'équation, et $(-b, a)$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Exemple : Équation de la droite (AB)

Soit $A(2, 1)$ et $B(-1, 3)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$ dirige (AB). Pour un point $M(x, y)$, on a $\overrightarrow{AM}(x - 2, y - 1)$.

D'après la condition analytique de colinéarité, M est sur (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) &= (x - 2) \times 2 \\ &\quad - (-3) \times (y - 1) \\ &= 2x - 4 + 3y - 3 \\ &= 2x + 3y - 7.\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $2x + 3y - 7 = 0$.

Contrôle. Les points A et B vérifient l'équation : $2 \times 2 + 3 \times 1 - 7 = 0$ et $2 \times (-1) + 3 \times 3 - 7 = 0$. De plus, le vecteur $(-b, a) = (-3, 2)$ est bien $\overrightarrow{AB}$.

Attention : Le vecteur directeur d'une équation cartésienne

✗ Pour la droite $5x - y + 2 = 0$, prendre $(5, -1)$ comme vecteur directeur.

✓ Un vecteur directeur de la droite $ax + by + c = 0$ est $(-b, a)$, ici $(1, 5)$.

Contrôle : $(0, 2)$ est sur la droite, et $(0 + 1, 2 + 5) = (1, 7)$ aussi, car $5 \times 1 - 7 + 2 = 0$. Le point $(5, 1)$, obtenu avec $(5, -1)$, n'y est pas : $25 - 1 + 2 \neq 0$.

Équation réduite

Rappel du collège. La droite d'équation $y = mx + p$ représente la fonction affine $x \mapsto mx + p$; le réel m est son coefficient directeur.

Une équation cartésienne avec $b \neq 0$ se ramène à cette forme. **Pourquoi est-ce vrai ?** On divise par b pour isoler y.

Propriété : Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

- Si $b \neq 0$, la droite D admet une **unique** équation de la forme $y = mx + p$, son **équation réduite**. Le réel m est le **coefficient directeur** de D et le vecteur $\vec{u}(1, m)$ est un vecteur directeur de D.
- Si $b = 0$, la droite D a une équation de la forme $x = k$: elle est parallèle à l'axe des ordonnées, et $\vec{j}$ est un vecteur directeur de D.

Démonstration

Étape 1. Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ équivaut à $y = -\dfrac{a}{b}\,x - \dfrac{c}{b}$, de la forme $y = mx + p$. D'après l'équation cartésienne d'une droite, $(-b, a)$ dirige D. Le vecteur $(1, m)$, non nul, lui est colinéaire, car $(1, m) = -\dfrac{1}{b}\,(-b, a)$: d'après les vecteurs directeurs d'une droite, il dirige D.

Étape 2. Si $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ décrivent la même droite, ses points d'abscisses 0 et 1 donnent $p = p'$, puis $m + p = m' + p'$, donc $m = m'$.

Étape 3. Si $b = 0$, alors $a \neq 0$, et l'équation équivaut à $x = -\dfrac{c}{a}$. Les points $P\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$ et $Q\left(-\dfrac{c}{a}, 1\right)$ sont sur D, et $\overrightarrow{PQ}(0, 1)$, donc $\overrightarrow{PQ} = \vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. D'après les vecteurs directeurs d'une droite, $D = (PQ)$ et $\vec{j}$ dirige D. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », (PQ) est parallèle à (OJ), l'axe des ordonnées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour **isoler** y, on divise par b : c'est possible seulement si $b \neq 0$. L'unicité se lit sur deux points : l'abscisse 0 donne p, puis l'abscisse 1 donne $m + p$. Si $b = 0$, l'équation devient $x = k$: la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Vérifie : Isoler y

Quelle est l'équation réduite de la droite $2x + 4y - 8 = 0$?

A. $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

Juste.

Juste : $4y = -2x + 8$, puis on divise par $b = 4$.

B. $y = \dfrac{1}{2}x - 2$

Faux.

Les signes n'ont pas changé : en passant $2x$ et -8 de l'autre côté, ils s'inversent.

C. $y = -\dfrac{1}{2}x + 8$

Faux.

Seul le terme en x a été divisé : le terme constant 8 se divise aussi par 4.

D. $y = -2x + 8$

Faux.

C'est l'expression de $4y$: il manque la division de tous les termes par 4.

Correction

L'équation $2x + 4y - 8 = 0$ équivaut à $4y = -2x + 8$. Comme $b = 4 \neq 0$, on divise par 4 : $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Le coefficient directeur est $-\dfrac{1}{2}$.

Exemple : Équation réduite, ou droite parallèle à l'axe des ordonnées

- La droite $4x + 2y - 6 = 0$ a un coefficient $b = 2 \neq 0$. En isolant y, $2y = -4x + 6$, soit $y = -2x + 3$. D'après l'équation réduite d'une droite, son coefficient directeur est -2 et le vecteur $\vec{u}(1, -2)$ la dirige.
- La droite $3x - 12 = 0$ a un coefficient $b = 0$: son équation équivaut à $x = 4$. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées, et $\vec{j}$ la dirige. Tous ses points ont pour abscisse 4, par exemple $(4, -7)$.

D'une forme à l'autre

Méthode : passer d'une forme à l'autre

1. **De l'équation vers les paramètres** : lire le vecteur directeur $(-b, a)$, trouver un point en donnant une valeur à x ou à y, puis écrire l'accolade.
2. **Des paramètres vers l'équation** : lire le point et le vecteur, puis employer la méthode du déterminant ; ou bien isoler t dans une équation et le remplacer dans l'autre.
3. **Vérifier** sur un point connu que la nouvelle forme décrit la même droite.

Exemple : Dans les deux sens

Des paramètres vers l'équation. Soit D la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

La première équation donne $t = \dfrac{x - 1}{2}$. En remplaçant dans la seconde :

$$y = -3 + \frac{5(x - 1)}{2}.$$

En multipliant par 2, on obtient $2y = -6 + 5x - 5$, donc $5x - 2y - 11 = 0$.

Contrôle : $(1, -3)$ vérifie $5 + 6 - 11 = 0$, et $(-b, a) = (2, 5)$ est le vecteur de la représentation.

De l'équation vers les paramètres. La droite $x - 3y + 6 = 0$ est dirigée par $(3, 1)$ et passe par $(0, 2)$. Elle admet donc la représentation

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

À toi, puis en devoir

À toi : Les trois écritures d'une droite

Soit $K(-1, 4)$ et $L(3, 2)$. Écris une représentation paramétrique de la droite (KL), puis une équation cartésienne, enfin son équation réduite et son coefficient directeur. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le vecteur $\overrightarrow{KL}$ dirige la droite ; pour l'équation, traduis $\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KL}) = 0$.
Indice 2
$\overrightarrow{KL}(4, -2)$ et $\overrightarrow{KM}(x + 1, y - 4)$; développe $(x + 1) \times (-2) - 4 \times (y - 4)$.
Indice 3
Point délicat : tu peux diviser toute l'équation par -2 ; pour l'équation réduite, isole y en divisant par le coefficient de y.

Réponse
Représentation paramétrique. D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{KL}(4, -2)$, non nul. Une représentation paramétrique de (KL) est

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Équation cartésienne. Pour $M(x, y)$, on a $\overrightarrow{KM}(x + 1, y - 4)$. D'après la condition analytique de colinéarité, M est sur (KL) si et seulement si $\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KL}) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KL}) \\ &= (x + 1) \times (-2) \\ &\quad - 4 \times (y - 4) \\ &= -2x - 4y + 14. \end{aligned}$$

On obtient l'équation $-2x - 4y + 14 = 0$. En divisant par -2 : $x + 2y - 7 = 0$. Contrôle : $-1 + 8 - 7 = 0$ et $3 + 4 - 7 = 0$.

Équation réduite. Comme $b = 2 \neq 0$, on isole y : $2y = -x + 7$, soit $y = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{7}{2}$.

Conclusion. Le coefficient directeur de (KL) est $-\dfrac{1}{2}$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une équation cartésienne**

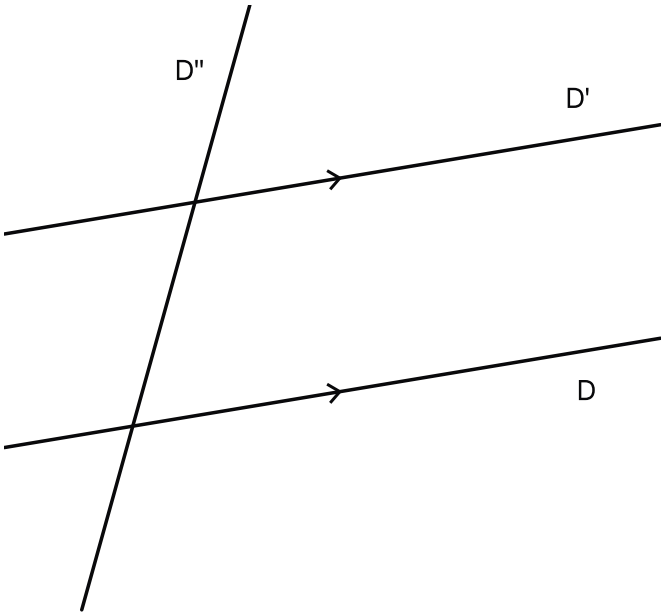
En devoir, la rédaction tient en trois lignes. Écris : « Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$ dirige (AB). D'après la condition analytique de colinéarité, $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $2x + 3y - 7 = 0$. » Ajoute le contrôle : les coordonnées de A et celles de B vérifient l'équation.

Positions relatives de deux droites

Deux trajets se croisent-ils ?

Deux trajets rectilignes se croisent-ils ? Sur ton cahier, deux droites qui ne sont pas parallèles finissent par se couper, parfois loin du dessin.

Rappel du collège. Deux droites du plan non parallèles ont un seul point commun. Il reste à **reconnaître** des droites parallèles par le calcul, puis à **trouver** ce point commun.



Les droites D et D' sont parallèles et n'ont aucun point commun ; la droite D", parallèle à aucune des deux, coupe chacune d'elles en un seul point.

Devine : Parallèles ?

Les droites $D : 2x - 3y + 1 = 0$ et $D' : -4x + 6y + 5 = 0$ sont-elles parallèles ?

A. Non, car leurs équations sont différentes.

Faux.

Deux équations différentes peuvent décrire des droites parallèles, et même une seule droite.

B. Oui, car leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Juste.

Juste : D est dirigée par $(3, 2)$ et D' par $(-6, -4)$, qui vaut -2 fois le premier.

C. Non, car les coefficients de x sont de signes contraires.

Faux.
Le signe d'un coefficient ne dit rien : multiplier une équation par -1 ne change pas la droite.

D. Oui, et elles sont même confondues.
Faux.
Elles sont parallèles, mais le point $(1, 1)$ est sur D et pas sur D' : elles sont strictement parallèles.

Correction
D'après l'équation cartésienne d'une droite, D est dirigée par $\vec{u}(3, 2)$ et D' par $\vec{v}(-6, -4)$. Or $\vec{v} = -2\,\vec{u}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites sont parallèles.

De plus, $(1, 1)$ est sur D, car $2 - 3 + 1 = 0$, mais pas sur D', car $-4 + 6 + 5 = 7$: elles sont strictement parallèles.

Parallèles ou sécantes

Avec des vecteurs directeurs, le parallélisme devient un calcul : c'est une colinéarité, donc un déterminant nul.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux droites sont parallèles exactement quand leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Et deux droites qui ne sont pas parallèles se coupent en un point.

Théorème : Positions relatives de deux droites

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- D et D' sont **parallèles** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Deux droites parallèles sont soit **confondues**, soit **strictement parallèles** (sans point commun).
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les droites D et D' sont **sécantes** : elles ont un seul point commun.

En particulier, les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration
Étape 1. Soit A un point de D, C un point de D', et B, E les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CE} = \vec{v}$. D'après les vecteurs directeurs d'une droite, $D = (AB)$ et $D' = (CE)$. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », puis la condition analytique de colinéarité, D et D' sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Si, de plus, elles ont un point commun P, les vecteurs directeurs d'une droite donnent $D = D(P, \vec{u}) = D(P, \vec{v}) = D'$: elles sont confondues.

Étape 2. Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles ; or deux droites du plan qui ne sont pas parallèles se coupent en un seul point.

Étape 3. D'après l'équation cartésienne d'une droite, $(-b, a)$ et $(-b', a')$ dirigent les deux droites, et $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + b'a = ab' - a'b$. On conclut par l'étape 1.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **enchaîne** deux équivalences : parallélisme et colinéarité des vecteurs directeurs, puis colinéarité et déterminant nul. Si deux droites parallèles ont un point commun P, chacune est la droite passant par P et dirigée par $\vec{u}$: elles sont confondues.

Pour deux équations cartésiennes, on prend les vecteurs $(-b, a)$ et $(-b', a')$: leur déterminant vaut $ab' - a'b$.

Vérifie : Avant de calculer

Soit D : $x + 2y - 3 = 0$ et D' : $2x - y + 4 = 0$. Que peut-on affirmer sans chercher de point commun ?

A. Elles sont parallèles, car les deux équations ont un terme constant non nul.

Faux.
Le terme constant ne dit rien de la direction : on compare les vecteurs directeurs.

B. Elles sont sécantes, car les équations sont différentes.

Faux.
Des équations différentes ne suffisent pas : elles peuvent décrire deux droites parallèles, ou une seule droite. Seul le déterminant des vecteurs directeurs décide.

C. Elles sont sécantes, car les vecteurs directeurs $(-2, 1)$ et $(1, 2)$ ont un déterminant non nul.

Juste.
Juste : $(-2) \times 2 - 1 \times 1 = -5 \neq 0$.

D. On ne peut pas conclure sans tracer les droites.

Faux.
Un seul déterminant suffit : le calcul remplace la figure.

Correction
D'après l'équation cartésienne d'une droite, D est dirigée par $(-2, 1)$ et D' par $(1, 2)$. Leur déterminant vaut $(-2) \times 2 - 1 \times 1 = -5$, non nul : d'après les positions relatives de deux droites, D et D' sont sécantes.

On retrouve le même nombre avec $ab' - a'b = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5$.

Méthode et droites parallèles

Méthode : position relative et point commun

1. **Lire** un vecteur directeur de chaque droite, puis **calculer** leur déterminant.
2. **Déterminant nul** : les droites sont parallèles. On teste un point de l'une dans l'équation de l'autre : s'il convient, elles sont confondues ; sinon, strictement parallèles.
3. **Déterminant non nul** : les droites sont sécantes. Lorsque chaque droite est donnée par une équation cartésienne, on écrit d'abord une représentation paramétrique de l'une d'elles (méthode « d'une forme à l'autre »). On **reporte** ensuite : dans l'équation cartésienne de l'autre, on remplace x et y par leurs expressions en t. On résout l'équation d'inconnue t, puis on calcule les coordonnées du point commun.

Exemple : Confondues ou strictement parallèles

Les droites D_1 et D_2. Soit $D_1 : x - 2y + 3 = 0$ et $D_2 : -3x + 6y - 9 = 0$. Ici :

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= 1 \times 6 - (-3) \times (-2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après les positions relatives de deux droites, elles sont parallèles. Le point $(-3, 0)$ de D_1 vérifie $9 + 0 - 9 = 0$: il est sur D_2, donc les droites sont confondues.

Les droites D_1 et D_3. Soit $D_3 : 2x - 4y + 1 = 0$. On a $1 \times (-4) - 2 \times (-2) = 0$: D_1 et D_3 sont parallèles. Le point $(-3, 0)$ donne $-6 + 1 = -5 \neq 0$: il n'est pas sur D_3, donc les droites sont strictement parallèles.

Attention : Parallèles ne veut pas dire sans point commun

✗ « Le déterminant est nul, donc les droites n'ont aucun point commun. »

✓ Un déterminant nul prouve que les droites sont **parallèles**, rien de plus. Elles peuvent être **confondues**, comme D_1 et D_2 ci-dessus. Teste encore un point de l'une dans l'équation de l'autre.

Le point d'intersection

Exemple : Calculer le point d'intersection

Soit $D : 2x + y - 5 = 0$ et D' la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Position relative. Un vecteur directeur de D est $(-1, 2)$, et D' est dirigée par $(1, 2)$. Leur déterminant vaut $(-1) \times 2 - 1 \times 2 = -4 \neq 0$: d'après les positions relatives de deux droites, D et D' sont sécantes.

Point commun. On remplace x et y dans l'équation de D :

$$2(-1 + t) + (3 + 2t) - 5 = 0,$$

soit $4t - 4 = 0$, donc $t = 1$. Le point commun est $(-1 + 1, 3 + 2)$, soit $(0, 5)$. Contrôle : $2 \times 0 + 5 - 5 = 0$.

Attention : Deux équations pour une seule droite

✗ « Les équations $x - 2y + 3 = 0$ et $-3x + 6y - 9 = 0$ sont différentes, donc les droites sont différentes. »

✓ Multiplier une équation cartésienne par un réel non nul donne une autre équation de la **même** droite : ici, la seconde équation est la première multipliée par -3. Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes, et une infinité de représentations paramétriques.

Les médianes d'un triangle

Exemple : Les médianes d'un triangle, dans un repère

Soit ABC un triangle, et le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$. Les milieux de $[BC]$ et de $[AC]$ sont $A'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $B'\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Fais la figure sur ton cahier.

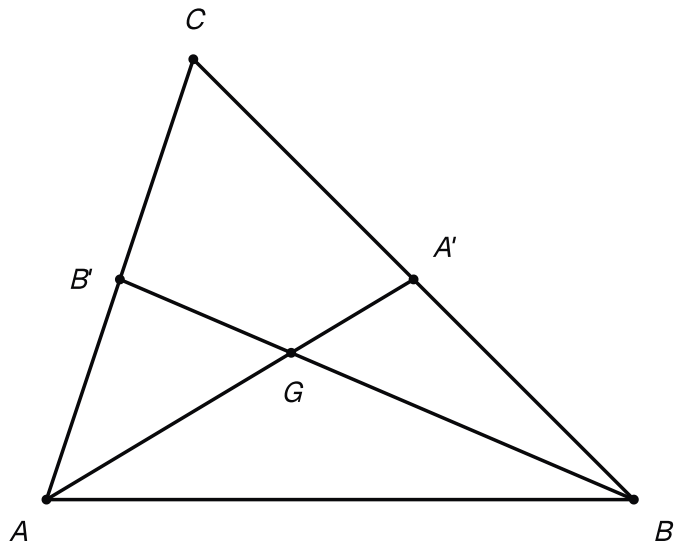
La médiane (AA'). Le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ dirige (AA'), donc $\vec{u}(1, 1)$ aussi : une équation est $x - y = 0$.

La médiane (BB'). Le vecteur $\overrightarrow{BB'}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ dirige (BB'), donc $\vec{v}(-2, 1)$ aussi : une représentation est $x = 1 - 2t$, $y = t$, avec t réel.

Le point commun. On calcule :

$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= 1 \times 1 - (-2) \times 1 \\ &= 3 \neq 0.\end{aligned}$$

D'après les positions relatives de deux droites, ces médianes sont sécantes. En remplaçant, $(1 - 2t) - t = 0$, donc $t = \frac{1}{3}$: elles se coupent en $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



Les médianes (AA') et (BB') du triangle ABC se coupent au point G, d'abscisse et d'ordonnée un tiers dans ce repère.

Vérifie : La troisième médiane

Le milieu de $[AB]$ est $C'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Le point $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est-il sur la médiane (CC') ?

A. On ne peut pas savoir, car le repère n'est pas orthonormé.

Faux.

Le déterminant et la condition analytique d'alignement valent dans tout repère, orthonormé ou non.

B. Non, car $\det(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CC'}) = -\frac{2}{3}$.

Faux.

Ce nombre vient d'une erreur de signe : le second produit, $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)$, se **soustrait**.

C. Non, car deux droites sécantes n'ont qu'un point commun.

Faux.

C'est vrai pour deux droites, mais rien n'empêche une troisième droite de passer par ce point.

D. Oui, car $\det(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CC'}) = 0$.

Juste.

Juste : les trois médianes passent par G.

Correction

D'après les coordonnées d'un vecteur défini par deux points, $\overrightarrow{CG}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{CC'}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CC'}) &= \frac{1}{3}\times(-1)\\ &\quad -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après la condition analytique d'alignement, C, G et C' sont alignés : G est sur (CC'). Les trois médianes passent par G : elles sont **concourantes**.

À toi, puis en devoir

À toi : Position relative et point commun

Soit D : $3x-y-2=0$ et D' la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases}x = 1+t\\ y = 4+2t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R}).$$

Étudie la position relative de D et D'. Si elles sont sécantes, calcule leur point commun. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis un vecteur directeur de chaque droite, puis calcule leur déterminant.
Indice 2
Pour D, le vecteur $(-b,a)$ est $(1,3)$; pour D', c'est $(1,2)$. Remplace ensuite x et y par $1+t$ et $4+2t$ dans l'équation de D.
Indice 3
Point délicat : $-(4+2t)=-4-2t$; contrôle enfin que le point trouvé vérifie l'équation de D.

Réponse
Position relative. D'après l'équation cartésienne d'une droite, D est dirigée par $\vec{u}(1,3)$; d'après sa représentation paramétrique, D' est dirigée par $\vec{v}(1,2)$. Or :

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= 1\times 2-1\times 3\\ &= -1\neq 0.\end{aligned}$$

D'après les positions relatives de deux droites, D et D' sont sécantes.

Point commun. Le point de D' de paramètre t est sur D si et seulement si

$$\begin{aligned}&3(1+t)-(4+2t)-2\\ &=0,\end{aligned}$$

soit $t-3=0$, donc $t=3$. Le point commun est $(1+3,4+2\times 3)$, soit $(4,10)$. Contrôle : $3\times 4-10-2=0$.

Conclusion. Les droites D et D' sont sécantes, et leur point commun est $(4,10)$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une intersection

En devoir, annonce d'abord la position relative, puis calcule. Écris : « Les vecteurs directeurs $(-1, 2)$ et $(1, 2)$ ont un déterminant égal à -4, non nul : d'après les positions relatives de deux droites, D et D' sont sécantes. Le point de D' de paramètre t est sur D si et seulement si $4t - 4 = 0$, soit $t = 1$. » Conclus par le point commun, $(0, 5)$, et son contrôle dans l'équation de D.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Coordonnées** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$: extrémité moins origine ; d'un milieu : les moyennes.
- **Colinéarité, alignement, parallélisme** : un déterminant nul.
- **Appartenance** à une droite donnée en paramètres : une même valeur de t pour les deux équations.
- **Équation cartésienne** : développer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$; vecteur directeur $(-b, a)$.
- **Équation réduite** : isoler y si $b \neq 0$; sinon, $x = k$.
- **Position relative** : déterminant des vecteurs directeurs, puis un point testé, ou le point commun calculé en remplaçant x et y.

Le mot du prof. Tu sais maintenant traduire une question de géométrie en calcul : un alignement, un parallélisme ou un point commun se ramènent à quelques coordonnées. Avant chaque calcul, nomme la propriété que tu emploies. Ces outils te serviront dans le chapitre « Équations, inéquations et systèmes », puis tout au long du lycée.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La droite dans le plan » (tc · sciences · mathematiques)