BURHAN

Résumé : Géométrie dans l'espace

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/resume

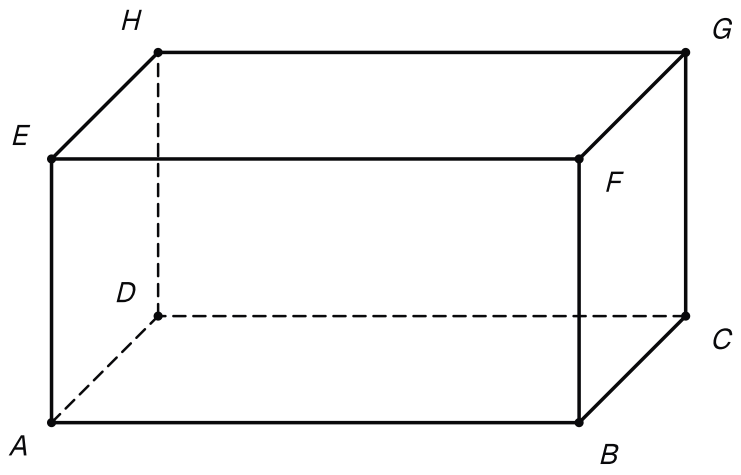
Chapitre	Semestre
Géométrie dans l'espace	Semestre 2

Représenter et mesurer un solide

À retenir : Nommer les sommets d'un pavé

Dans ce Résumé, un pavé droit $ABCDEFGH$ a pour face inférieure $ABCD$ et pour face supérieure $EFGH$. Les sommets E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Ses arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$.

Fais toujours la figure sur ton cahier.



Convention du Résumé : face inférieure ABCD, face supérieure EFGH, E au-dessus de A.

Méthode : dessiner en perspective cavalière

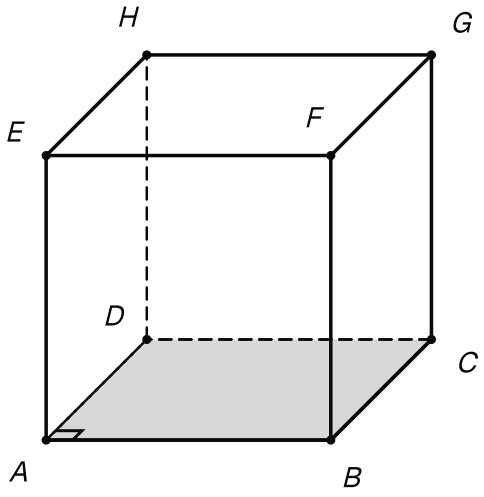
1. **Trace** la face de devant telle qu'elle est, en vraie grandeur.
2. **Trace** les arêtes fuyantes : parallèles entre elles, inclinées du même angle, raccourcies dans le même rapport, par exemple de moitié.
3. **Dessine** en traits pleins les arêtes vues, en pointillés les arêtes cachées.

4. **Contrôle** : deux arêtes parallèles du solide restent parallèles, et le milieu d'une arête reste son milieu.

Attention : Un dessin peut tromper

Sur un dessin en perspective, une face carrée peut devenir un parallélogramme. N'y mesure donc ni un angle ni une longueur fuyante.

Deux droites qui se croisent sur le dessin ne sont pas forcément sécantes dans l'espace. Pour conclure, appuie-toi sur un énoncé, jamais sur l'aspect du dessin.



La face du bas d'un cube : un carré, dessiné en parallélogramme, dont l'angle droit en A paraît aigu.

Cube d'arête a

$$V = a^3$$

Pavé droit de longueur L, de largeur l et de hauteur h

$$V = L \times l \times h$$

Prisme droit ou cylindre de hauteur h

$$V = \text{aire de la base} \times h$$

Pyramide ou cône de hauteur h

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$$

Remarque : Des formules admises

Rappel du collège : ces formules de volume sont admises.

La hauteur d'une pyramide est la distance de son sommet au plan de sa base, mesurée sur la perpendiculaire à ce plan menée par le sommet. Celle d'un prisme droit est la longueur d'une arête latérale.

Exemple

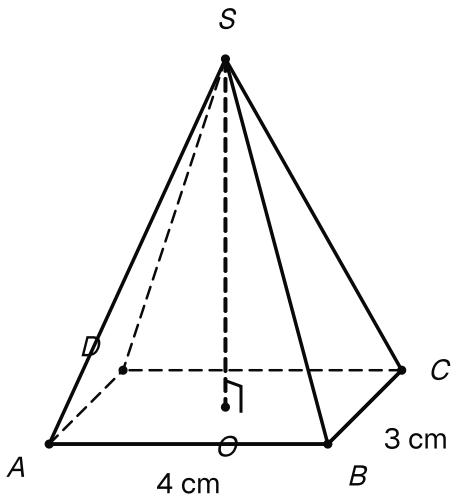
Énoncé. Une pyramide a pour base un rectangle de 4 cm sur 3 cm et pour hauteur 5 cm. Calcule son volume.

Calcul. L'aire de la base vaut $4 \times 3 = 12$ cm². D'après la formule des pyramides :

$$V = \frac{1}{3} \times 12 \times 5 = 20$$

Le volume de la pyramide vaut 20 cm³.

Contrôle. Le pavé droit de même base et de même hauteur a pour volume 60 cm³ : la pyramide en occupe le tiers.



Une pyramide à base rectangulaire de 4 cm sur 3 cm et de hauteur 5 cm.

Axiomes d'incidence et plans

Propriété : Axiomes d'incidence

On admet les propriétés suivantes, appelées **axiomes d'incidence**.

1. Par deux points distincts A et B de l'espace passe une **seule** droite, notée (AB).
2. Par trois points A, B et C non alignés passe un **seul** plan, noté (ABC).
3. Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan (P), alors la droite (AB) est incluse dans (P) : $(AB) \subset (P)$.
4. Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite qui passe par ce point.

Dans chaque plan de l'espace, tous les résultats de la géométrie plane restent vrais.

Propriété : Détermination d'un plan

Chacune des données suivantes détermine un **unique** plan :

1. trois points non alignés ;
2. une droite (D) et un point A qui n'appartient pas à (D) ;
3. deux droites distinctes qui ont un point commun.

À retenir : Une droite dans un plan

Pour prouver qu'une droite est incluse dans un plan, trouve deux de ses points dans ce plan : le troisième axiome d'incidence conclut.

Rappel des notations :

- $A \in (P)$ se lit « A appartient à (P) » ;
- $(D) \subset (P)$ se lit « (D) est incluse dans (P) » ;
- $\cap$ désigne l'intersection.

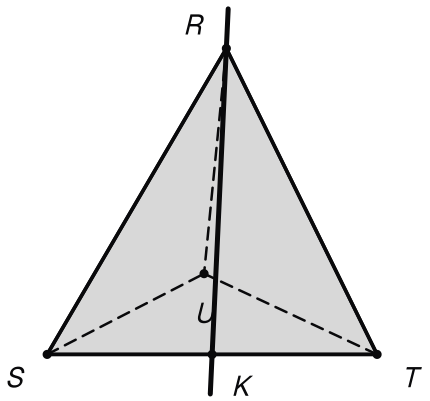
Exemple

Énoncé. $RSTU$ est un tétraèdre et K est le milieu de $[ST]$. La droite (RK) est-elle incluse dans le plan (RST) ?

Un premier point. R est un point du plan (RST).

Un second point. S et T sont dans (RST) : par le troisième axiome d'incidence, $(ST) \subset (RST)$, donc $K \in (RST)$.

Conclusion. R et K sont distincts et dans (RST) : par le même axiome, $(RK) \subset (RST)$.

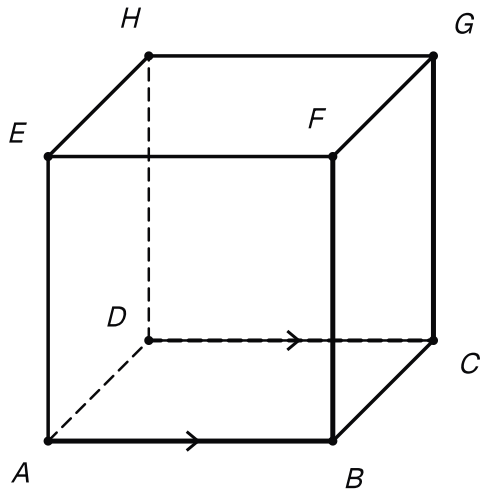


La droite (RK), avec K milieu de [ST], est dans le plan de la face RST.

Deux droites de l'espace

Définition : Positions relatives de deux droites

- Deux droites de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un plan qui les contient toutes les deux.
- Deux droites sont **sécantes** si elles ont un seul point commun.
- Deux droites (D) et (D') sont **parallèles** si elles sont coplanaires et si elles sont confondues ou n'ont aucun point commun ; dans ce dernier cas, elles sont **strictement parallèles**. On note $(D) \parallel (D')$.



Sur un cube : deux droites sécantes, deux droites strictement parallèles, deux droites non coplanaires.

Propriété : Plan défini par deux droites strictement parallèles

Deux droites strictement parallèles déterminent un **unique** plan.

Propriété : Droites parallèles dans l'espace

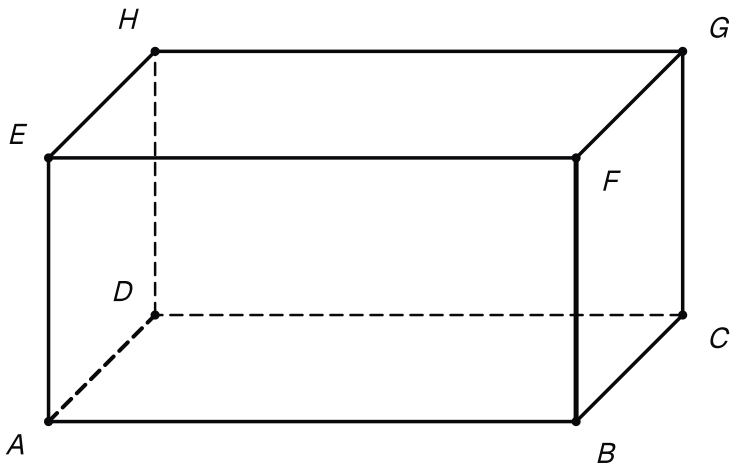
1. Par un point A de l'espace passe une **seule** droite parallèle à une droite (D) donnée.
2. Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple

Énoncé. Dans un pavé droit $ABCDEFGH$ (face inférieure $ABCD$, F au-dessus de B), quelle est la position des droites (AD) et (BF) ?

Raisonnement. Supposons qu'un plan contienne les deux droites. Il contient A, D et B, trois points non alignés : c'est le plan (ABD) de la base. Or F n'appartient pas à ce plan.

Conclusion. Aucun plan ne contient ces deux droites : elles sont non coplanaires, donc ni sécantes ni parallèles.



Les arêtes [AD] et [BF] du pavé droit : aucun plan ne les contient toutes les deux.

Attention : Disjointes ne veut pas dire parallèles

Dans un plan, deux droites disjointes sont parallèles. Dans l'espace, il faut en plus un plan qui les contient toutes les deux.

Les droites (AD) et (BF) de l'exemple précédent n'ont aucun point commun, et pourtant elles ne sont pas parallèles.

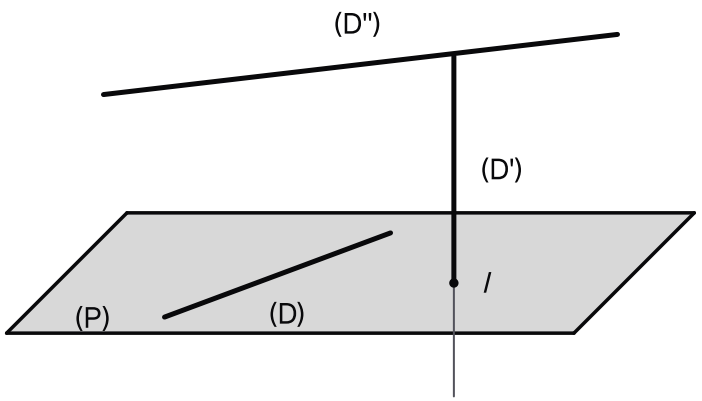
Une droite et un plan

Propriété : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (D) une droite et (P) un plan. Une et une seule des trois situations suivantes se produit :

- (D) est **incluse** dans (P) ;
- (D) et (P) sont **sécants** : ils ont un seul point commun ;
- (D) et (P) n'ont aucun point commun.

On dit que (D) est **parallèle** à (P), et on note $(D) \parallel (P)$, lorsque $(D) \subset (P)$ ou $(D) \cap (P) = \emptyset$; dans le second cas, (D) est **strictement parallèle** à (P).



Une droite et un plan : (D) incluse dans (P), (D') sécante à (P) en I, (D'') strictement parallèle à (P).

Propriété : Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan

Si une droite (D) est parallèle à une droite (Δ) incluse dans un plan (P), alors (D) est parallèle à (P).

Méthode : prouver qu'une droite est parallèle à un plan

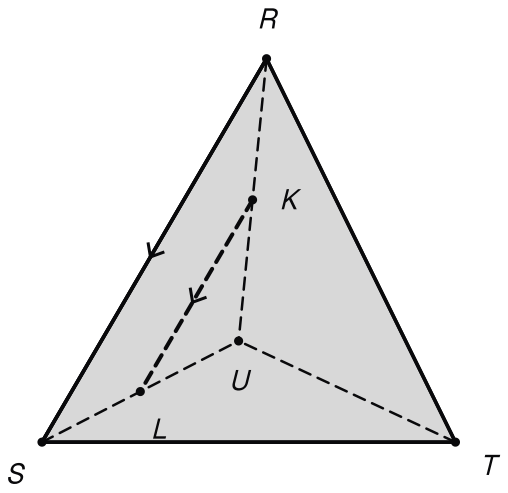
1. **Cherche** dans le plan une droite parallèle à ta droite : droite des milieux d'un triangle, côtés opposés d'un rectangle, arêtes parallèles du solide.
2. **Prouve** ce parallélisme avec la géométrie du collège, dans un plan qui contient les deux droites.
3. **Conclus** : si $(D) \parallel (\Delta)$ et $(\Delta) \subset (P)$, alors $(D) \parallel (P)$ (critère de parallélisme d'une droite et d'un plan).

Exemple

Énoncé. $RSTU$ est un tétraèdre ; K et L sont les milieux de $[UR]$ et de $[US]$. Prouve que $(KL) \parallel (RST)$.

Dans le plan (URS). Rappel du collège : dans le triangle URS, la droite qui joint les milieux K et L est parallèle à (RS).

Conclusion. On a $(KL) \parallel (RS)$ et $(RS) \subset (RST)$. On en déduit $(KL) \parallel (RST)$ (critère de parallélisme d'une droite et d'un plan).



Les milieux K et L de [UR] et [US] donnent (KL) parallèle à (RS), donc au plan (RST).

Attention : Parallèles à un même plan, pas forcément entre elles

Les droites (RS) et (RT) sont incluses dans le plan (RST), donc parallèles à ce plan. Pourtant, elles sont sécantes en R.

Ce qui se transmet, c'est le parallélisme à une même **droite** : deux droites parallèles à une même droite sont parallèles.

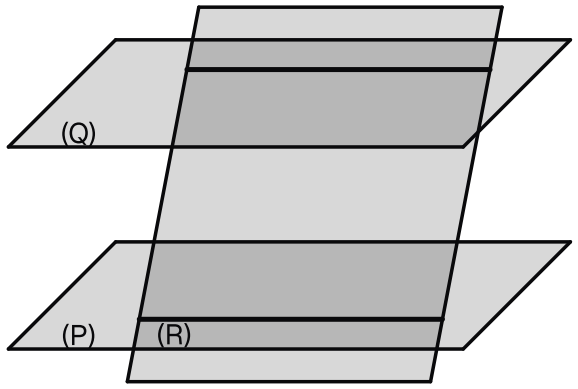
Deux plans

Propriété : Positions relatives de deux plans

Soit (P) et (Q) deux plans. Une et une seule des trois situations suivantes se produit :

- (P) et (Q) sont **confondus** ;
- (P) et (Q) sont **sécants** : leur intersection est une droite ;
- (P) et (Q) n'ont aucun point commun.

On dit que (P) et (Q) sont **parallèles**, et on note $(P) \parallel (Q)$, lorsqu'ils sont confondus ou n'ont aucun point commun ; dans le second cas, ils sont **strictement parallèles**.



Deux plans : (P) et (Q) strictement parallèles ; (R) sécant à chacun selon une droite.

Propriété : Critère de parallélisme de deux plans

1. Si un plan (P) contient deux droites **sécantes** qui sont toutes deux parallèles à un plan (Q), alors les plans (P) et (Q) sont parallèles.
2. Par un point A de l'espace passe un **seul** plan parallèle à un plan (Q) donné.

Propriété : Plan coupant deux plans parallèles

Soit (P) et (Q) deux plans strictement parallèles, et (R) un plan qui coupe (P) selon une droite (D) et (Q) selon une droite (D'). Alors les droites (D) et (D') sont parallèles.

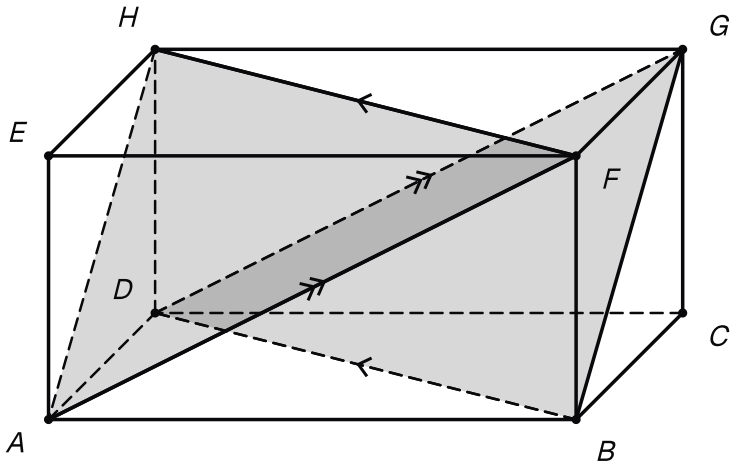
Exemple

Énoncé. $ABCDEFGH$ est un pavé droit (E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D). Prouve que $(AFH) \parallel (BDG)$.

Deux parallélismes. $BDHF$ est un parallélogramme, car $[BF]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur : $(FH) \parallel (BD)$. De même, $ADGF$ est un parallélogramme : $(AF) \parallel (DG)$.

Deux droites parallèles au plan (BDG). Ce plan contient (BD) et (DG). Par le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, (FH) et (AF) sont donc parallèles au plan (BDG).

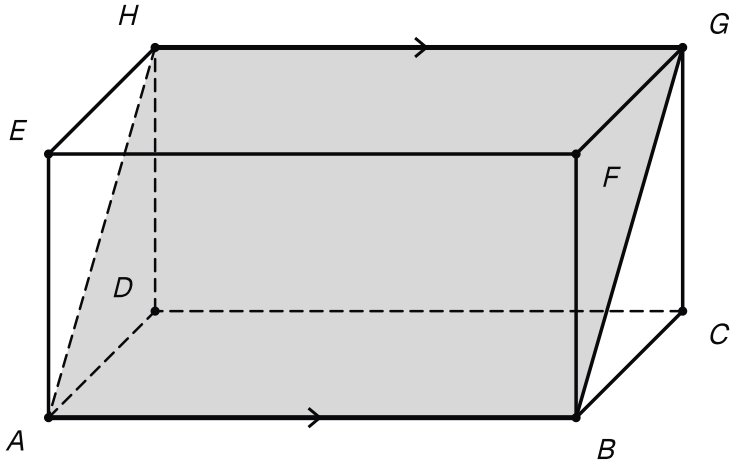
Conclusion. Les droites (FH) et (AF) du plan (AFH) sont sécantes en F : par le critère de parallélisme de deux plans, $(AFH) \parallel (BDG)$.



Les plans (AFH) et (BDG) du pavé : (FH) parallèle à (BD), (AF) parallèle à (DG).

À retenir : Deux faces opposées, deux traces parallèles

Un plan qui coupe deux faces opposées d'un pavé droit y trace deux segments parallèles. C'est le plan coupant deux plans parallèles, appliqué aux plans de ces faces. Ce réflexe guide la construction des sections planes.

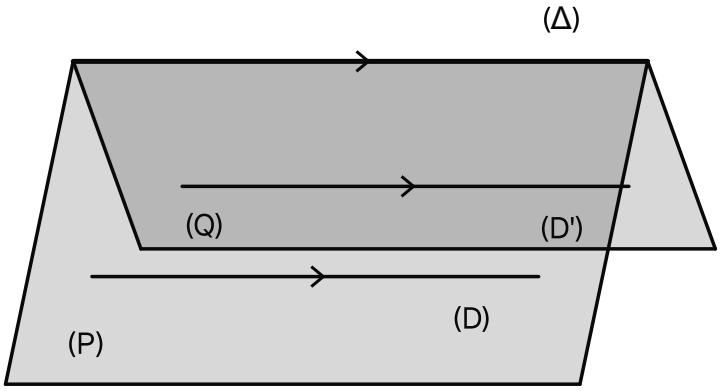


Le plan (ABG) coupe les faces du bas et du haut du pavé selon [AB] et [HG], parallèles.

Intersections de plans et sections planes

Théorème : Théorème du toit

Soit (P) et (Q) deux plans sécants selon une droite (Δ). Si une droite (D) incluse dans (P) et une droite (D') incluse dans (Q) sont parallèles, alors (Δ) est parallèle à (D) et à (D').



Théorème du toit : (P) et (Q) sécants selon (Δ), avec (D) dans (P) et (D') dans (Q) parallèles.

Méthode : trouver l'intersection de deux plans

1. **Cherche** deux points communs aux deux plans. Bon candidat : le point où se coupent deux droites coplanaires, prises chacune dans un des plans.
2. **Conclus** : la droite qui joint ces deux points est l'intersection cherchée.
3. **Un seul point commun connu ?** Trouve alors une droite dans chacun des plans, ces deux droites étant parallèles. Le théorème du toit affirme que l'intersection, qui passe par ce point, leur est parallèle.

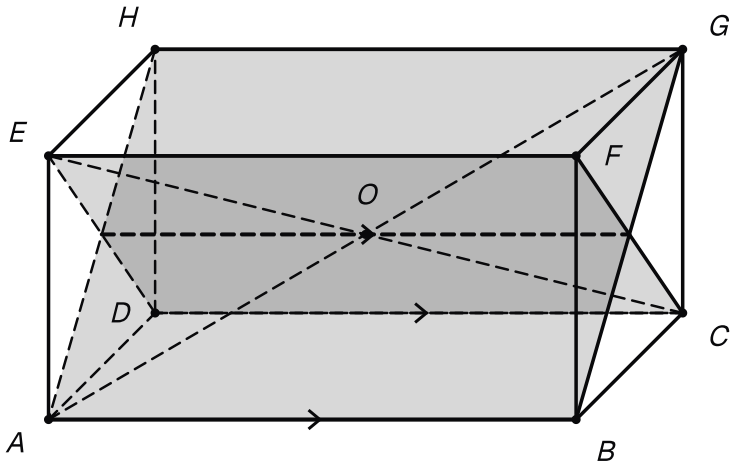
Exemple

Énoncé. $ABCDEFGH$ est un pavé droit (E au-dessus de A, G au-dessus de C). Les diagonales $[AG]$ et $[CE]$ du rectangle $ACGE$ se coupent en leur milieu O. Détermine l'intersection des plans (ABG) et (CDE).

Deux plans sécants. O est sur $[AG]$, dans (ABG), et sur $[CE]$, dans (CDE). Les plans sont distincts, car $C \notin (ABG)$: ils sont sécants selon une droite qui passe par O.

Deux droites parallèles. $(AB) \subset (ABG)$, $(CD) \subset (CDE)$, et $(AB) \parallel (CD)$.

Conclusion. Par le théorème du toit, l'intersection des deux plans est la parallèle à (AB) passant par O.



Les plans (ABG) et (CDE) du pavé se coupent selon la parallèle à (AB) menée par O.

Méthode : construire une section plane

1. **Relie** deux points du plan de coupe placés sur une même face : c'est un côté de la section.
2. **Sur la face opposée**, le côté de la section est parallèle à celui que tu viens de tracer : c'est le plan coupant deux plans parallèles.
3. **Prolonge**, dans une même face, un côté et une arête : leur point commun est un nouveau point du plan de coupe.
4. **Continue** face par face, jusqu'à fermer le polygone.

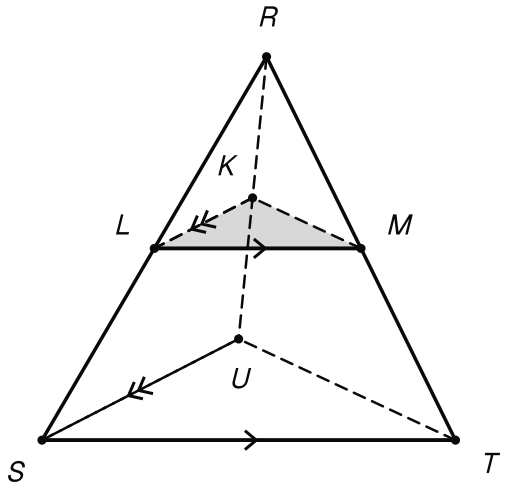
Exemple

Énoncé. $RSTU$ est un tétraèdre et K est le milieu de $[RU]$. Le plan (Q) passe par K et il est parallèle à (STU). Quelle est la section du tétraèdre par (Q) ?

Face RSU. Le plan (RSU) coupe les plans parallèles (STU) et (Q) : ses deux traces sont parallèles. Sa trace sur (Q) est donc la parallèle à (SU) menée par K ; elle coupe $[RS]$ en son milieu L.

Face RTU. De même, la parallèle à (TU) menée par K coupe $[RT]$ en son milieu M.

Conclusion. La section est le triangle KLM, aux côtés parallèles à ceux de STU et deux fois plus courts.



La section du tétraèdre RSTU par le plan (Q) parallèle à (STU) passant par K : le triangle KLM.

Droites orthogonales

Définition : Droites orthogonales

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont **orthogonales** si les parallèles à (D) et à (D') menées par un même point sont perpendiculaires (on admet que cela ne dépend pas du point choisi). On note $(D) \perp (D')$.

Deux droites orthogonales et sécantes sont dites **perpendiculaires**.

Exemple

Énoncé. Dans un pavé droit $ABCDEFGH$ (E au-dessus de A), les droites (AE) et (BC) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

Parallèles menées par A. La parallèle à (BC) menée par A est (AD), car $ABCD$ est un rectangle. Or $(AE) \perp (AD)$, car $ADHE$ est un rectangle.

Conclusion. Par définition, les droites (AE) et (BC) sont orthogonales. Elles n'ont aucun point commun : elles ne sont pas perpendiculaires.

Attention : Orthogonales ou perpendiculaires ?

Le mot « perpendiculaires » exige deux conditions : un angle droit **et** un point commun. Deux droites orthogonales peuvent être disjointes, comme (AE) et (BC) ci-dessus.

Sur un dessin en perspective, un angle droit de l'espace peut même paraître aigu ou obtus.

Droite orthogonale à un plan

Définition : Droite orthogonale à un plan

Une droite (D) est **orthogonale** à un plan (P) si elle est orthogonale à **toutes** les droites incluses dans (P). On note $(D) \perp (P)$.

Théorème : Critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Si une droite (D) est orthogonale à **deux droites sécantes** incluses dans un plan (P), alors (D) est orthogonale à (P).

Méthode : prouver qu'une droite est orthogonale à un plan

1. **Choisis** dans le plan deux droites **sécantes**.
2. **Prouve** que ta droite est orthogonale à chacune : angle droit d'une face, hauteur d'un triangle isocèle, diagonales d'un carré.
3. **Conclus** : $(D) \perp (P)$ (critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan).

Méthode : prouver que deux droites sont orthogonales

1. **Prends** l'une des deux droites, puis un plan qui la contient.
2. **Prouve** que l'autre droite est orthogonale à ce plan, par la méthode précédente.
3. **Conclus** par la définition : une droite orthogonale à un plan l'est à toutes les droites du plan.

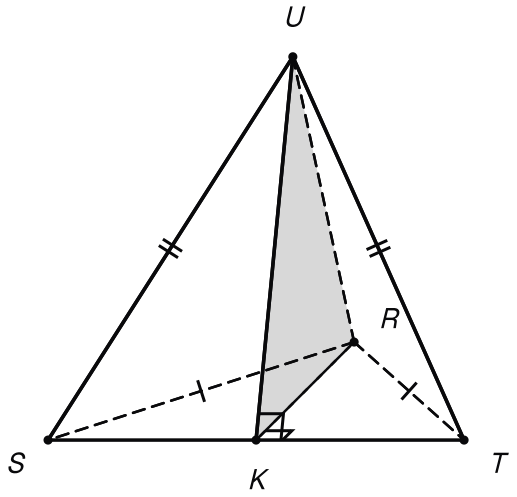
Exemple

Énoncé. Dans le tétraèdre $RSTU$, on a $RS = RT$ et $US = UT$. Le point K est le milieu de $[ST]$. Prouve que $(ST) \perp (RU)$.

Deux droites sécantes. Le triangle RST est isocèle en R : sa médiane (RK) est aussi une hauteur, donc $(ST) \perp (RK)$. De même, dans le triangle isocèle UST, $(ST) \perp (UK)$. Les droites (RK) et (UK) sont sécantes en K.

Le plan (RUK). On obtient $(ST) \perp (RUK)$ (critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan).

Conclusion. Comme $(RU) \subset (RUK)$, la définition d'une droite orthogonale à un plan donne $(ST) \perp (RU)$.



Dans le tétraèdre RSTU, (ST) est orthogonale à (RK) et à (UK), donc au plan (RUK).

Attention : Deux droites, et sécantes

Une droite orthogonale à une seule droite d'un plan n'est pas forcément orthogonale à ce plan. Deux droites parallèles du plan ne suffisent pas non plus : elles donnent une seule direction. Vérifie toujours que tes deux droites sont **sécantes**.

Parallélisme, orthogonalité et plans perpendiculaires

Propriété : Parallélisme et orthogonalité

1. Par un point donné passe un **seul** plan orthogonal à une droite donnée, et une **seule** droite orthogonale à un plan donné.
2. Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
4. Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
5. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Exemple

Énoncé. Dans un pavé droit $ABCDEFGH$ (E au-dessus de A, G au-dessus de C), les arêtes (AE) et (CG) sont orthogonales au plan (ABC) de la base. Que peux-tu en conclure ?

Réponse. Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles : $(AE) \parallel (CG)$. Toutes les arêtes verticales d'un pavé sont ainsi parallèles entre elles.

Définition : Plans perpendiculaires

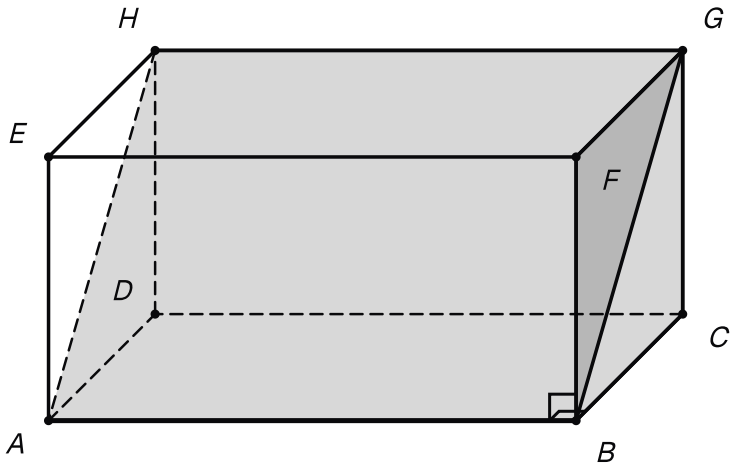
Un plan (P) est **perpendiculaire** à un plan (Q) si (P) contient une droite orthogonale à (Q). On admet qu'alors (Q) est aussi perpendiculaire à (P) : on dit que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires, et on note $(P) \perp (Q)$.

Exemple

Énoncé. Dans un pavé droit $ABCDEFGH$ (F au-dessus de B), prouve que les plans (ABG) et (BCF) sont perpendiculaires.

Une droite orthogonale. Les faces $ABCD$ et $ABFE$ sont des rectangles : $(AB) \perp (BC)$ et $(AB) \perp (BF)$. Ces deux droites sont sécantes en B : par le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(AB) \perp (BCF)$.

Conclusion. Le plan (ABG) contient (AB) : par définition, il est perpendiculaire au plan (BCF).



Les plans (ABG) et (BCF) du pavé : (AB) est orthogonale à (BC) et à (BF), donc au plan (BCF).

Attention : Deux plans perpendiculaires à un même plan

Deux plans perpendiculaires à un même troisième ne sont pas forcément parallèles.

Pense à un livre ouvert, posé debout sur un bureau. Ses deux couvertures sont perpendiculaires au bureau, et elles se coupent le long du dos.

Quel énoncé pour quelle question ?

Méthode : Quel énoncé pour quelle question ?

- **Droite dans un plan** : deux de ses points, puis le troisième axiome d'incidence.
- **Plan déterminé** : trois points non alignés, une droite et un point extérieur, deux sécantes, deux parallèles distinctes.
- **Droite parallèle à un plan** : une parallèle dans le plan, puis le critère.
- **Plans parallèles** : deux sécantes de l'un, parallèles à l'autre.
- **Intersection** : deux points communs, ou le théorème du toit.
- **Section** : face par face ; faces parallèles, traces parallèles.
- **Droite orthogonale à un plan** : deux sécantes du plan, puis le critère.
- **Droites orthogonales** : l'une orthogonale à un plan contenant l'autre.
- **Plans perpendiculaires** : une droite de l'un orthogonale à l'autre.
- **Longueur, volume** : Pythagore dans un plan ; formules admises.

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme toujours l'énoncé employé, et vérifie ses hypothèses : droites **sécantes**, parallélisme **strict**, droite **incluse** dans le plan.

Pour une longueur, choisis un plan qui contient le triangle utile, puis applique Pythagore. Ta figure guide le raisonnement, mais elle ne prouve rien.