BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

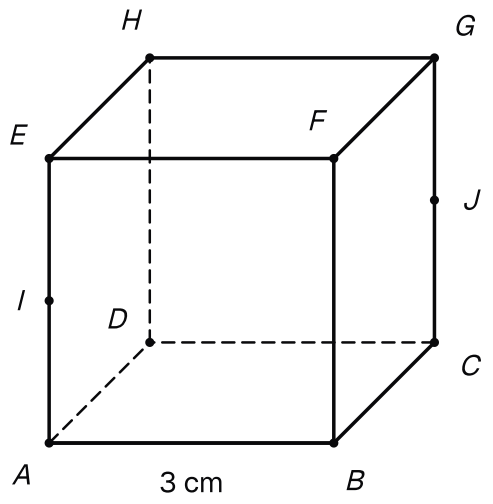
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Un losange caché dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 cm : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On note I le milieu de l'arête $[AE]$ et J le milieu de l'arête $[CG]$. Fais la figure sur ton cahier en perspective cavalière.



Le cube d'arête 3 cm avec I milieu de l'arête [AE] et J milieu de l'arête [CG].

1. — 1 pts

a) Justifier que $ACJI$ est un parallélogramme.

b) En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

INDICE

Début : $[AI]$ et $[CJ]$ sont portés par deux arêtes verticales. **Ensuite :** cherche une droite de (ABC) parallèle à (IJ).

2. — 1 pts

a) Justifier que les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants.

b) En déduire leur intersection.

INDICE

Début : quel point est commun aux deux plans ? **Ensuite :** le théorème du toit, avec (IJ) et (AC).

3. 1,25 pts

On note O le centre du cube : c'est le milieu commun des diagonales $[AG]$ et $[BH]$ du rectangle $ABGH$.

a) Justifier que $AIGJ$ est un parallélogramme. En déduire que O est le milieu de $[IJ]$.

b) En déduire que H appartient au plan (BIJ), puis que $BIHJ$ est un parallélogramme.

INDICE

Début : compare $[AI]$ et $[JG]$, portés par deux arêtes verticales. **Ensuite :** les droites (BH) et (IJ) se coupent en O ; quel plan déterminent-elles ?

4. 1,25 pts

a) Calculer BI et BJ. En déduire la nature du quadrilatère $BIHJ$.

b) Calculer les longueurs de ses diagonales IJ et BH.

INDICE

Début : le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et BCJ, rectangles en A et en C. **Ensuite :** $IJ = AC$; pour BH, passe par BD dans le triangle BDH.

5. 0,5 pts

Le losange $BIHJ$ est-il un carré ? Calculer son aire, en valeur exacte puis arrondie au centième.

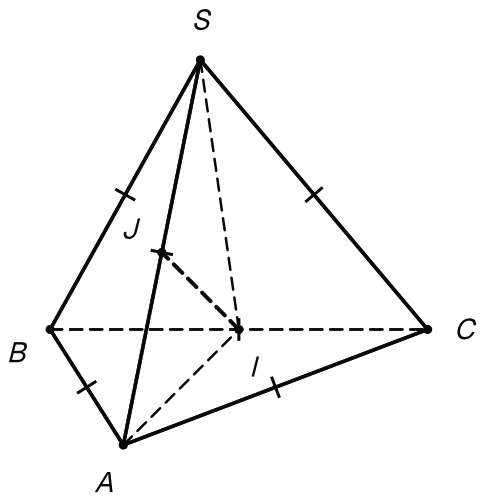
INDICE

Outil : un losange est un carré lorsque ses diagonales ont la même longueur ; son aire est le demi-produit de ses diagonales.

Exercice 2 — 5 pts

Les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 4 cm : ses six arêtes mesurent 4 cm et ses quatre faces sont des triangles équilatéraux. On note I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[SA]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le tétraèdre régulier SABC d'arête 4 cm, avec I milieu de [BC], J milieu de [SA] et les segments [AI], [SI], [IJ].

1. — 0,75 pts

a) Justifier que $(BC) \perp (AI)$ et que $(BC) \perp (SI)$.

b) Calculer AI et SI.

INDICE

Début : dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est aussi une hauteur. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle ABI.

2. — 1 pts

a) Justifier que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAI).

b) En déduire que les droites (SA) et (BC), qui portent deux arêtes opposées, sont orthogonales.

INDICE

Début : les deux droites de la question 1 sont-elles sécantes, et dans quel plan ? **Ensuite :** la définition d'une droite orthogonale à un plan.

3. 1 pts

a) Justifier que $(IJ) \perp (SA)$.

b) Calculer IJ, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

Début : d'après la question 1, le triangle SAI est isocèle en I. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle AIJ.

4. 0,75 pts

a) Justifier que $(IJ) \perp (BC)$.

b) En déduire que la droite (IJ) est perpendiculaire à la fois à (SA) et à (BC).

INDICE

Début : la droite (IJ) est incluse dans le plan (SAI) ; utilise la question 2. **Ensuite :** perpendiculaires veut dire orthogonales et sécantes.

5. 1,5 pts

a) Calculer l'aire du triangle SAI.

b) Le tétraèdre $SABC$ est formé des tétraèdres $BSAI$ et $CSAI$, de base commune SAI. La hauteur d'un tétraèdre issue d'un sommet se mesure sur la droite qui passe par ce sommet et qui est orthogonale au plan de la face opposée. Justifier que leurs hauteurs sont BI et CI.

c) En déduire le volume V du tétraèdre $SABC$, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

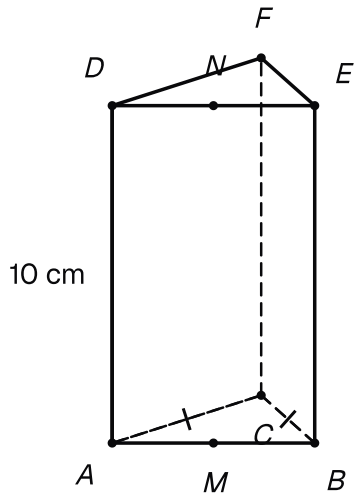
Début : dans le triangle SAI, la hauteur issue de I est $[IJ]$. **Ensuite :** $(BC) \perp (SAI)$; pour une pyramide, $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$ (formule admise).

Exercice 3 — 5 pts

Une pièce de bois en prisme coupée en deux

Une pièce de bois a la forme d'un prisme droit $ABCDEF$. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, avec D au-dessus de A, E au-dessus de B et F au-dessus de C. Ses faces latérales $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des rectangles. Ses arêtes latérales $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont orthogonales au plan (ABC) et mesurent 10 cm.

Le triangle ABC est isocèle en C, avec $CA = CB = 5$ cm et $AB = 6$ cm. On note M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[DE]$.



La pièce de bois : prisme droit ABCDEF de hauteur 10 cm, base ABC isocèle en C, M milieu de [AB], N milieu de [DE].

1. — 1 pts

a) Justifier que $(MN) \parallel (AD)$ et que $MN = 10$ cm.

b) En déduire que la droite (MN) est orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Début : dans le rectangle $ABED$, compare $[AM]$ et $[DN]$. **Ensuite :** un plan orthogonal à l'une de deux droites parallèles est orthogonal à l'autre.

2. — 1 pts

a) Justifier que $(MN) \parallel (CF)$.

b) En déduire que les points C, F, M et N sont coplanaires.

INDICE

Début : (MN) et (CF) sont parallèles à une même droite. **Ensuite :** deux droites strictement parallèles déterminent un plan.

3. 1 pts

a) Justifier que les plans (CMN) et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Déterminer l'intersection des plans (CMN) et (ABE).

INDICE

Début : cherche une droite de (CMN) orthogonale à (ABC). **Ensuite :** cherche deux points communs aux deux plans.

4. 1,5 pts

La section du prisme par le plan (CMN) est le quadrilatère $CMNF$.

a) Justifier que $CMNF$ est un parallélogramme, puis un rectangle.

b) Calculer CM, puis l'aire de cette section.

INDICE

Début : compare les côtés $[MN]$ et $[CF]$; $(MN) \perp (ABC)$ donne un angle droit en M. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle AMC.

5. 0,5 pts

a) Calculer le volume V de la pièce de bois.

b) Le plan (CMN) partage la pièce en deux prismes droits, de bases AMC et BMC. En déduire le volume de chacun.

On rappelle que la hauteur d'un prisme droit est la longueur de l'une de ses arêtes latérales.

INDICE

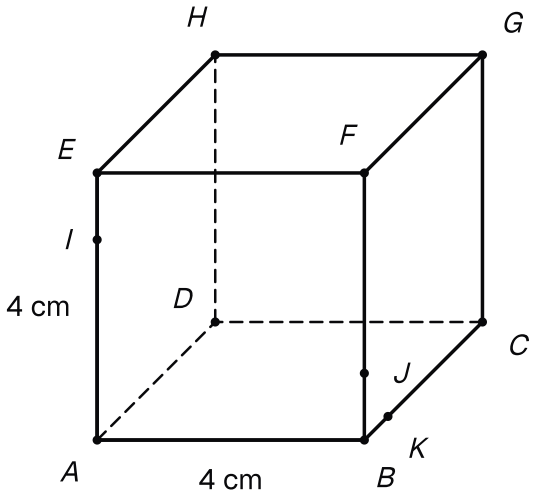
Outil : pour un prisme droit, $V = \text{aire de la base} \times h$ (formule admise).

Exercice 4 5 pts

Un bloc de mousse coupé grâce à un point extérieur

Un bloc de mousse a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On donne $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 4$ cm.

On place le point I sur l'arête $[AE]$, avec $AI = 3$ cm, le point J sur l'arête $[BF]$, avec $BJ = 1$ cm, et le point K sur l'arête $[BC]$, avec $BK = 1$ cm. On découpe le bloc selon le plan (IJK). Dessine le bloc en perspective cavalière, puis complète ce dessin au fil des questions.



Le bloc de mousse ABCDEFGH (AB = 4 cm, AD = 5 cm, AE = 4 cm) avec les points I, J et K.

1. 1 pts

a) Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires, puis qu'elles ne sont pas parallèles. On note L leur point commun.

b) Le point L est sur la droite (AB), du côté de B opposé à A. En déduire LB, puis LA.

INDICE

Début : les points A, B, I, J sont tous dans la face $ABFE$; si $(IJ) \parallel (AB)$, que serait le quadrilatère $ABJI$? **Ensuite :** le théorème de Thalès dans le triangle LAI, avec $(BJ) \parallel (AI)$.

2. 1 pts

a) Justifier que le point L appartient au plan (IJK) et au plan (ABC).

b) En déduire l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

INDICE

Début : L est sur une droite de chacun des deux plans. **Ensuite :** quel autre point est commun aux deux plans ?

3. 1 pts

a) La droite (LK) coupe la droite (AD) en un point M, et K est sur $[LM]$. Calculer AM. Le point M est-il sur l'arête $[AD]$?

b) En déduire la section du bloc par le plan (IJK).

INDICE

Début : dans la face $ABCD$, les côtés $[BC]$ et $[AD]$ sont parallèles ; utilise le théorème de Thalès dans le triangle LAM. **Ensuite :** cherche, face par face, deux points de la section.

4. 1,25 pts

a) Justifier que les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles.

b) En déduire que $(IM) \parallel (JK)$. Calculer IM et JK, puis donner la nature du quadrilatère $IJKM$.

INDICE

Début : les droites (AD) et (AE) sont sécantes en A ; à quelles droites du plan (BCG) sont-elles parallèles ? **Ensuite :** le plan (IJK) coupe deux plans parallèles ; pour les longueurs, les triangles AIM et BJK sont rectangles en A et en B.

5. 0,75 pts

a) Calculer LI et LM.

b) En déduire IJ et KM, puis le périmètre de la section, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

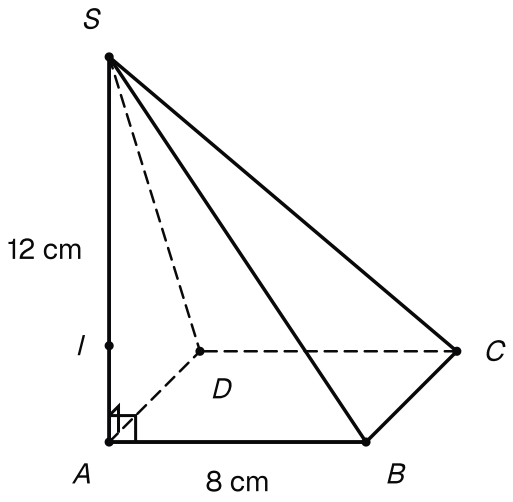
Début : les triangles LAI et LAM sont rectangles en A. **Ensuite :** les rapports de Thalès des questions 1 et 3 donnent LJ et LK.

Exercice 5 — 5 pts

Une pyramide coupée par un plan orthogonal à une arête

$SABCD$ est une pyramide de sommet S. Sa base $ABCD$ est un carré de côté 8 cm. L'arête $[SA]$ est orthogonale au plan (ABC) de la base, et $SA = 12$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

On place le point I sur l'arête $[SA]$, avec $SI = 9$ cm. On note (P) le plan qui passe par I et qui est orthogonal à la droite (SA).



La pyramide SABCD : base carrée de côté 8 cm, arête [SA] orthogonale à la base, SA = 12 cm, et le point I de [SA].

1. — 0,75 pts

a) Justifier que les plans (P) et (ABC) sont parallèles.

b) En déduire qu'ils sont strictement parallèles.

INDICE

Début : les deux plans sont orthogonaux à une même droite. **Ensuite :** cherche un point de (P) qui n'est pas dans (ABC).

2. — 1 pts

a) Justifier que les plans (P) et (SAB) sont sécants selon une droite (Δ) qui passe par I, et que $(\Delta) \parallel (AB)$.

b) La droite (Δ) coupe $[SB]$ en un point J. En déduire $\dfrac{SJ}{SB}$, puis IJ.

INDICE

Début : le point I est commun aux deux plans ; le plan (SAB) coupe aussi le plan (ABC). **Ensuite :** le théorème de Thalès dans le triangle SAB.

3. 1,25 pts

a) Le plan (P) coupe l'arête $[SC]$ en un point K. Justifier que $(JK) \parallel (BC)$, puis calculer JK.

On admet que, de même, (P) coupe l'arête $[SD]$ en un point L, avec $(KL) \parallel (CD)$, $(LI) \parallel (DA)$ et $KL = LI = 6$ cm.

b) Justifier que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires. En déduire la nature de la section $IJKL$ de la pyramide par (P), puis son aire.

INDICE

Début : le plan (SBC) coupe les deux plans parallèles ; le rapport $\dfrac{SJ}{SB}$ est connu. **Ensuite :** les parallèles à (IJ) et à (JK) menées par B sont (AB) et (BC).

4. 1 pts

a) Justifier que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAB). En déduire que la droite (JK) est orthogonale au plan (SAB).

b) En déduire que le triangle SJK est rectangle en J. Calculer SB, puis SJ, puis SK.

INDICE

Début : (BC) est orthogonale à (AB) et à (SA) ; ces deux droites sont-elles sécantes ? **Ensuite :** $(SJ) \subset (SAB)$; le triangle SAB est rectangle en A, et le rapport $\dfrac{SJ}{SB}$ est connu.

5. 1 pts

a) Calculer le volume V de la pyramide $SABCD$.

b) Le plan (P) partage la pyramide en une petite pyramide $SIJKL$ et une partie basse. Justifier que la hauteur de $SIJKL$ issue de S est SI, puis calculer son volume V'.

c) En déduire le volume de la partie basse, puis la fraction $\dfrac{V'}{V}$. Comparer avec $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

INDICE

Outil : pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$ (formule admise). La hauteur se mesure sur la perpendiculaire au plan de la base menée par le sommet ; relis la définition de (P).