BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

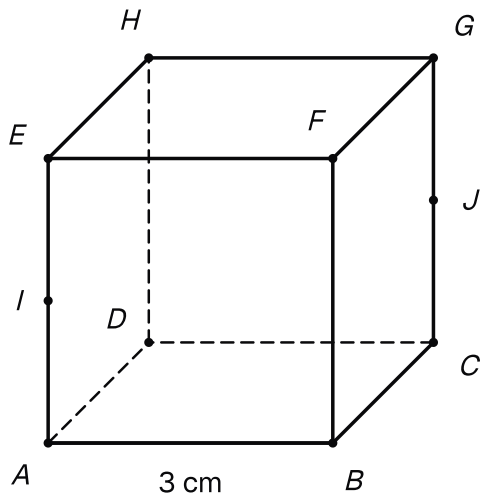
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un losange caché dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 3 cm : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On note I le milieu de l'arête $[AE]$ et J le milieu de l'arête $[CG]$. Fais la figure sur ton cahier en perspective cavalière.



Le cube d'arête 3 cm avec I milieu de l'arête [AE] et J milieu de l'arête [CG].

1. 1 pts

a) Justifier que $ACJI$ est un parallélogramme.

b) En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

INDICE

Début : $[AI]$ et $[CJ]$ sont portés par deux arêtes verticales. **Ensuite :** cherche une droite de (ABC) parallèle à (IJ).

CORRIGÉ

a) Les faces $ABFE$ et $BCGF$ sont des carrés : $(AE) \parallel (BF)$ et $(BF) \parallel (CG)$, donc $(AE) \parallel (CG)$ (droites parallèles dans l'espace). Les segments $[AI]$ et $[CJ]$, portés par ces droites, sont donc parallèles, et $AI = CJ = \frac{3}{2}$ cm.

Le quadrilatère $ACJI$ a deux côtés opposés $[AI]$ et $[CJ]$ parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.

b) Ses deux autres côtés opposés sont donc parallèles et de même longueur : $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = AC$. La droite (AC) est incluse dans (ABC) ; avec le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, on obtient

$$(IJ) \parallel (ABC)$$

Conclusion. $ACJI$ est un parallélogramme, et la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

2. 1 pts

a) Justifier que les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants.

b) En déduire leur intersection.

INDICE

Début : quel point est commun aux deux plans ? **Ensuite :** le théorème du toit, avec (IJ) et (AC).

CORRIGÉ

a) Le point B appartient aux deux plans. Ils sont distincts, car $I \in (BIJ)$ et $I \notin (ABC)$: le point I est sur la droite (AE), qui coupe (ABC) seulement en A. D'après le quatrième axiome d'incidence, les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants, selon une droite qui passe par B.

b) La droite (IJ) est incluse dans (BIJ), la droite (AC) dans (ABC), et $(IJ) \parallel (AC)$ (question 1). D'après le théorème du toit, l'intersection des deux plans est parallèle à (AC).

Conclusion. Les plans (BIJ) et (ABC) sont sécants, et leur intersection est la parallèle à (AC) menée par B.

3. 1,25 pts

On note O le centre du cube : c'est le milieu commun des diagonales $[AG]$ et $[BH]$ du rectangle $ABGH$.

a) Justifier que $AIGJ$ est un parallélogramme. En déduire que O est le milieu de $[IJ]$.

b) En déduire que H appartient au plan (BIJ), puis que $BIHJ$ est un parallélogramme.

INDICE

Début : compare $[AI]$ et $[JG]$, portés par deux arêtes verticales. **Ensuite :** les droites (BH) et (IJ) se coupent en O ; quel plan déterminent-elles ?

CORRIGÉ

a) Le parallélogramme $AIGJ$. Les segments $[AI]$ et $[JG]$ sont portés par les droites (AE) et (CG), parallèles d'après la question 1 : ils sont parallèles, et $AI = JG = \frac{3}{2}$ cm. Le quadrilatère $AIGJ$ a deux côtés opposés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.

Ses diagonales $[AG]$ et $[IJ]$ ont donc le même milieu. Le milieu de $[AG]$ est O : le point O est aussi le milieu de $[IJ]$.

b) Le point H. Les droites (BH) et (IJ) passent toutes deux par O. Elles sont distinctes, car $B \notin (IJ)$: la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC) (question 1) sans y être incluse, puisque $I \notin (ABC)$; elle ne rencontre donc pas ce plan, alors que $B \in (ABC)$.

Sécantes en O, ces droites déterminent un unique plan (détermination d'un plan). Ce plan contient B, I et J : c'est (BIJ), et il contient H.

Le quadrilatère $BIHJ$. Ses diagonales $[BH]$ et $[IJ]$ ont le même milieu O : c'est un parallélogramme.

Conclusion. $AIGJ$ est un parallélogramme et O est le milieu de $[IJ]$; le point H appartient au plan (BIJ), et $BIHJ$ est un parallélogramme.

4. 1,25 pts

a) Calculer BI et BJ. En déduire la nature du quadrilatère $BIHJ$.

b) Calculer les longueurs de ses diagonales IJ et BH.

INDICE

Début : le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et BCJ, rectangles en A et en C. **Ensuite :** $IJ = AC$; pour BH, passe par BD dans le triangle BDH.

CORRIGÉ

a) Les côtés BI et BJ. Le triangle ABI est rectangle en A, car $ABFE$ est un carré. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BI^2 &= AB^2 + AI^2 \\ &= 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

donc $BI = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm. De même, dans le triangle BCJ rectangle en C, $BJ = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm.

Le parallélogramme $BIHJ$ a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.

b) La diagonale IJ. D'après la question 1, $IJ = AC$. Dans le carré $ABCD$, $AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $IJ = 3\sqrt{2}$ cm.

La diagonale BH. Les faces $ADHE$ et $CDHG$ sont des carrés : $(DH) \perp (DA)$ et $(DH) \perp (DC)$, deux droites sécantes du plan (ABC). Donc $(DH) \perp (ABC)$ (critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan). Comme $(BD) \subset (ABC)$, on a $(DH) \perp (BD)$: le triangle BDH est rectangle en D. Avec $BD^2 = 18$, diagonale du carré, le théorème de Pythagore donne

$$\begin{aligned} BH^2 &= BD^2 + DH^2 \\ &= 18 + 9 = 27 \end{aligned}$$

donc $BH = 3\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. $BI = BJ = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm, donc $BIHJ$ est un losange ; ses diagonales mesurent $IJ = 3\sqrt{2}$ cm et $BH = 3\sqrt{3}$ cm.

5. 0,5 pts

Le losange $BIHJ$ est-il un carré ? Calculer son aire, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

Outil : un losange est un carré lorsque ses diagonales ont la même longueur ; son aire est le demi-produit de ses diagonales.

CORRIGÉ

Est-ce un carré ? Un losange est un carré lorsque ses diagonales ont la même longueur. Ici, elles mesurent $3\sqrt{2}$ cm et $3\sqrt{3}$ cm, et $\sqrt{2} \neq \sqrt{3}$: $BIHJ$ n'est pas un carré.

Aire. L'aire d'un losange est le demi-produit de ses diagonales :

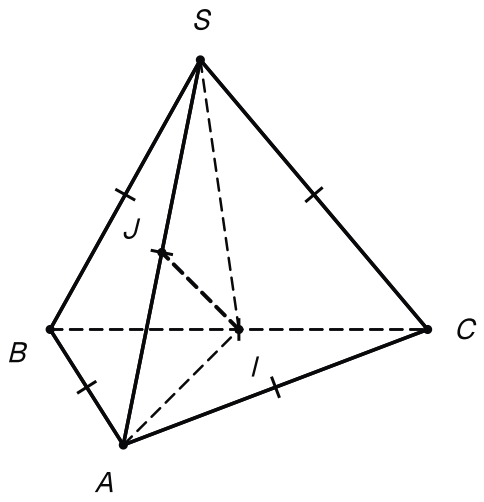
$$\frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

Conclusion. Le losange $BIHJ$ n'est pas un carré ; son aire vaut $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ cm², soit environ $11{,}02$ cm².

Exercice 2 5 pts

Les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier

$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 4 cm : ses six arêtes mesurent 4 cm et ses quatre faces sont des triangles équilatéraux. On note I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[SA]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le tétraèdre régulier SABC d'arête 4 cm, avec I milieu de [BC], J milieu de [SA] et les segments [AI], [SI], [IJ].

1. 0,75 pts

a) Justifier que $(BC) \perp (AI)$ et que $(BC) \perp (SI)$.

b) Calculer AI et SI.

INDICE

Début : dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est aussi une hauteur. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle ABI.

CORRIGÉ

a) Le point I est le milieu de $[BC]$. Dans le triangle équilatéral ABC, la médiane (AI) est aussi une hauteur : $(BC) \perp (AI)$. De même, dans le triangle équilatéral SBC, la médiane (SI) est une hauteur : $(BC) \perp (SI)$.

b) Le triangle ABI est rectangle en I, avec $AB = 4$ cm et $BI = 2$ cm. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AI^2 &= AB^2 - BI^2 \\ &= 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

donc $AI = 2\sqrt{3}$ cm. Le même calcul dans le triangle SBI, rectangle en I, donne $SI = 2\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. $(BC) \perp (AI)$ et $(BC) \perp (SI)$; de plus, $AI = SI = 2\sqrt{3}$ cm.

2. 1 pts

a) Justifier que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAI).

b) En déduire que les droites (SA) et (BC), qui portent deux arêtes opposées, sont orthogonales.

INDICE

Début : les deux droites de la question 1 sont-elles sécantes, et dans quel plan ? **Ensuite :** la définition d'une droite orthogonale à un plan.

CORRIGÉ

a) Les droites (AI) et (SI) sont sécantes en I et incluses dans le plan (SAI). D'après la question 1, la droite (BC) est orthogonale à chacune d'elles. D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan :

$$(BC) \perp (SAI)$$

b) La droite (SA) est incluse dans (SAI). Par définition, (BC) est orthogonale à toutes les droites de ce plan : $(BC) \perp (SA)$.

Conclusion. La droite (BC) est orthogonale au plan (SAI), et les droites (SA) et (BC), qui portent deux arêtes opposées, sont orthogonales.

3. 1 pts

a) Justifier que $(IJ) \perp (SA)$.

b) Calculer IJ, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

Début : d'après la question 1, le triangle SAI est isocèle en I. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle AIJ.

CORRIGÉ

a) D'après la question 1, $IA = IS = 2\sqrt{3}$ cm : le triangle SAI est isocèle en I. Le point J est le milieu de $[SA]$, donc (IJ) est la médiane issue de I ; dans ce triangle isocèle, elle est aussi une hauteur. Donc $(IJ) \perp (SA)$.

b) Le triangle AIJ est rectangle en J, avec $AI = 2\sqrt{3}$ cm et $AJ = 2$ cm. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} IJ^2 &= AI^2 - AJ^2 \\ &= 12 - 4 = 8 \end{aligned}$$

donc $IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

Conclusion. $(IJ) \perp (SA)$, et $IJ = 2\sqrt{2}$ cm, soit environ $2{,}83$ cm.

4. 0,75 pts

a) Justifier que $(IJ) \perp (BC)$.

b) En déduire que la droite (IJ) est perpendiculaire à la fois à (SA) et à (BC).

INDICE

Début : la droite (IJ) est incluse dans le plan (SAI) ; utilise la question 2. **Ensuite :** perpendiculaires veut dire orthogonales et sécantes.

CORRIGÉ

a) Les points I et J sont dans (SAI), donc $(IJ) \subset (SAI)$, d'après le troisième axiome d'incidence. Comme $(BC) \perp (SAI)$ (question 2), la définition d'une droite orthogonale à un plan donne $(IJ) \perp (BC)$.

b) Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes. La droite (IJ) est orthogonale à (SA) (question 3) et la coupe en J ; elle est orthogonale à (BC) et la coupe en I.

Conclusion. $(IJ) \perp (BC)$, et la droite (IJ) est perpendiculaire à la fois à (SA) et à (BC).

5. 1,5 pts

a) Calculer l'aire du triangle SAI.

b) Le tétraèdre $SABC$ est formé des tétraèdres $BSAI$ et $CSAI$, de base commune SAI. La hauteur d'un tétraèdre issue d'un sommet se mesure sur la droite qui passe par ce sommet et qui est orthogonale au plan de la face opposée. Justifier que leurs hauteurs sont BI et CI.

c) En déduire le volume V du tétraèdre $SABC$, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

Début : dans le triangle SAI, la hauteur issue de I est $[IJ]$. **Ensuite :** $(BC) \perp (SAI)$; pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$ (formule admise).

CORRIGÉ

a) Aire du triangle SAI. D'après la question 3, $(IJ) \perp (SA)$ et J est sur $[SA]$: la hauteur du triangle SAI issue de I est $[IJ]$. Son aire, en cm², vaut

$$\begin{aligned}\frac{SA \times IJ}{2} &= \frac{4 \times 2\sqrt{2}}{2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) Les hauteurs. La droite (BI), c'est-à-dire (BC), passe par B, elle est orthogonale au plan (SAI) (question 2) et elle le coupe en I. La hauteur du tétraèdre $BSAI$ issue de B est donc $BI = 2$ cm. De même, celle du tétraèdre $CSAI$ issue de C est $CI = 2$ cm.

c) Le volume. Avec la formule admise pour une pyramide, chaque petit tétraèdre a pour volume, en cm³ :

$$\frac{1}{3} \times 4\sqrt{2} \times 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Le tétraèdre $SABC$ est formé de ces deux tétraèdres, donc

$$V = 2 \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

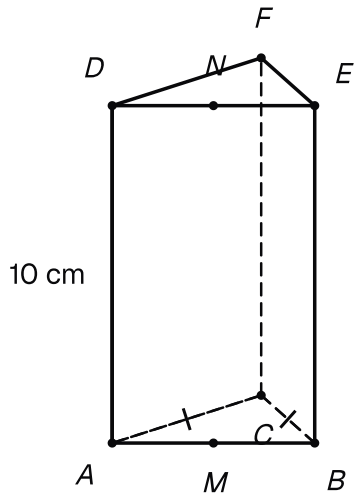
Conclusion. L'aire du triangle SAI vaut $4\sqrt{2}$ cm², les hauteurs sont BI et CI, et le volume du tétraèdre $SABC$ vaut $V = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ cm³, soit environ $7{,}54$ cm³.

Exercice 3 5 pts

Une pièce de bois en prisme coupée en deux

Une pièce de bois a la forme d'un prisme droit $ABCDEF$. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, avec D au-dessus de A, E au-dessus de B et F au-dessus de C. Ses faces latérales $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des rectangles. Ses arêtes latérales $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont orthogonales au plan (ABC) et mesurent 10 cm.

Le triangle ABC est isocèle en C, avec $CA = CB = 5$ cm et $AB = 6$ cm. On note M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[DE]$.



La pièce de bois : prisme droit ABCDEF de hauteur 10 cm, base ABC isocèle en C, M milieu de [AB], N milieu de [DE].

1. 1 pts

a) Justifier que $(MN) \parallel (AD)$ et que $MN = 10$ cm.

b) En déduire que la droite (MN) est orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Début : dans le rectangle $ABED$, compare $[AM]$ et $[DN]$. **Ensuite :** un plan orthogonal à l'une de deux droites parallèles est orthogonal à l'autre.

CORRIGÉ

a) Dans le rectangle $ABED$, les côtés $[AB]$ et $[DE]$ sont parallèles et de même longueur. Leurs moitiés $[AM]$ et $[DN]$ sont donc parallèles et de même longueur : $AM = DN = 3$ cm. Le quadrilatère $AMND$ est un parallélogramme, donc

$$(MN) \parallel (AD)$$

et $MN = AD = 10$ cm.

b) Les droites (MN) et (AD) sont parallèles, et $(AD) \perp (ABC)$ d'après l'énoncé. D'après la deuxième propriété liant parallélisme et orthogonalité, $(MN) \perp (ABC)$.

Conclusion. $(MN) \parallel (AD)$ et $MN = 10$ cm ; la droite (MN) est orthogonale au plan (ABC).

2. 1 pts

a) Justifier que $(MN) \parallel (CF)$.

b) En déduire que les points C, F, M et N sont coplanaires.

INDICE

Début : (MN) et (CF) sont parallèles à une même droite. **Ensuite :** deux droites strictement parallèles déterminent un plan.

CORRIGÉ

a) Dans le rectangle $ACFD$, $(CF) \parallel (AD)$. Les droites (MN) et (CF) sont parallèles à la même droite (AD) : elles sont parallèles (droites parallèles dans l'espace).

b) Deux droites strictement parallèles. La droite (CF) coupe le plan (ABC) seulement en C, car $F \notin (ABC)$. Le point M est dans (ABC) et $M \neq C$, donc $M \notin (CF)$. Les droites (MN) et (CF) sont donc distinctes, et strictement parallèles.

Elles déterminent un unique plan (R) (plan défini par deux droites strictement parallèles). Les points C, F, M et N appartiennent à (R) : ils sont coplanaires.

Le plan (R). De plus, $C \notin (MN)$, car (MN) coupe le plan (ABC) seulement en M. Les points C, M, N ne sont donc pas alignés : (R) est le plan (CMN), qui contient F.

Conclusion. $(MN) \parallel (CF)$, et les points C, F, M et N sont coplanaires.

3. 1 pts

a) Justifier que les plans (CMN) et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Déterminer l'intersection des plans (CMN) et (ABE).

INDICE

Début : cherche une droite de (CMN) orthogonale à (ABC). **Ensuite :** cherche deux points communs aux deux plans.

CORRIGÉ

a) Le plan (CMN) contient la droite (MN), orthogonale au plan (ABC) d'après la question 1. Par définition, les plans (CMN) et (ABC) sont perpendiculaires.

b) Deux points communs. Les points M et N sont dans (CMN). Ils sont aussi dans (ABE), plan de la face $ABED$, car $M \in [AB]$ et $N \in [DE]$.

Deux plans distincts. Le point C n'est pas dans (ABE) : sinon C serait dans les plans distincts (ABC) et (ABE), qui se coupent selon (AB), et A, B, C seraient alignés.

D'après le quatrième axiome d'incidence, l'intersection des deux plans est une droite. Elle contient les points distincts M et N.

Conclusion. Les plans (CMN) et (ABC) sont perpendiculaires, et l'intersection des plans (CMN) et (ABE) est la droite (MN).

4. 1,5 pts

La section du prisme par le plan (CMN) est le quadrilatère $CMNF$.

a) Justifier que $CMNF$ est un parallélogramme, puis un rectangle.

b) Calculer CM, puis l'aire de cette section.

INDICE

Début : compare les côtés $[MN]$ et $[CF]$; $(MN) \perp (ABC)$ donne un angle droit en M. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle AMC.

CORRIGÉ

a) Un parallélogramme. Les côtés $[MN]$ et $[CF]$ sont parallèles (question 2) et mesurent tous deux 10 cm : $CMNF$ est un parallélogramme.

Un rectangle. Comme $(MN) \perp (ABC)$ et $(CM) \subset (ABC)$, on a $(MN) \perp (CM)$: l'angle en M est droit, et $CMNF$ est un rectangle.

b) La longueur CM. Dans le triangle ABC isocèle en C, la médiane (CM) est aussi une hauteur : le triangle AMC est rectangle en M, avec $AC = 5$ cm et $AM = 3$ cm. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} CM^2 &= AC^2 - AM^2 \\ &= 25 - 9 = 16 \end{aligned}$$

donc $CM = 4$ cm. L'aire de la section vaut $4 \times 10 = 40$ cm².

Conclusion. $CMNF$ est un rectangle, $CM = 4$ cm, et l'aire de la section vaut 40 cm².

5. 0,5 pts

a) Calculer le volume V de la pièce de bois.

b) Le plan (CMN) partage la pièce en deux prismes droits, de bases AMC et BMC. En déduire le volume de chacun.

On rappelle que la hauteur d'un prisme droit est la longueur de l'une de ses arêtes latérales.

INDICE

Outil : pour un prisme droit, $V = \text{aire de la base} \times h$ (formule admise).

CORRIGÉ

a) Volume de la pièce. L'aire du triangle ABC, en cm², vaut

$$\frac{AB \times CM}{2} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

Les arêtes latérales mesurent 10 cm : c'est la hauteur du prisme. Avec la formule admise pour un prisme droit, $V = 12 \times 10 = 120$ cm³.

b) Les deux prismes. Les triangles AMC et BMC ont chacun pour aire $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm², et les deux prismes ont la même hauteur, 10 cm. Chacun a pour volume $6 \times 10 = 60$ cm³.

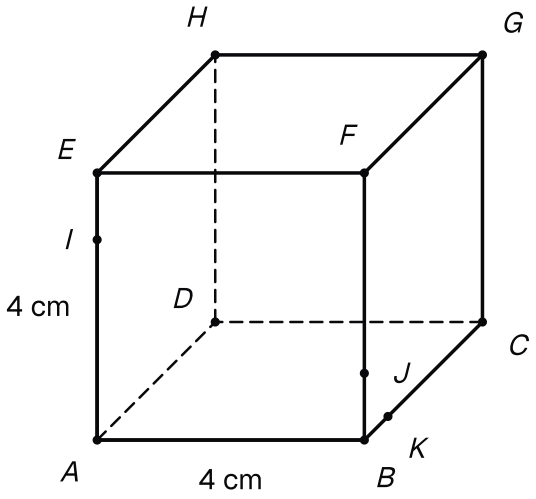
Conclusion. La pièce a pour volume 120 cm³ ; le plan (CMN) la partage en deux prismes de 60 cm³ chacun, donc en deux parties de même volume.

Exercice 4 5 pts

Un bloc de mousse coupé grâce à un point extérieur

Un bloc de mousse a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On donne $AB = 4$ cm, $AD = 5$ cm et $AE = 4$ cm.

On place le point I sur l'arête $[AE]$, avec $AI = 3$ cm, le point J sur l'arête $[BF]$, avec $BJ = 1$ cm, et le point K sur l'arête $[BC]$, avec $BK = 1$ cm. On découpe le bloc selon le plan (IJK). Dessine le bloc en perspective cavalière, puis complète ce dessin au fil des questions.



Le bloc de mousse ABCDEFGH (AB = 4 cm, AD = 5 cm, AE = 4 cm) avec les points I, J et K.

1. 1 pts

a) Justifier que les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires, puis qu'elles ne sont pas parallèles. On note L leur point commun.

b) Le point L est sur la droite (AB), du côté de B opposé à A. En déduire LB, puis LA.

INDICE

Début : les points A, B, I, J sont tous dans la face $ABFE$; si $(IJ) \parallel (AB)$, que serait le quadrilatère $ABJI$? **Ensuite :** le théorème de Thalès dans le triangle LAI, avec $(BJ) \parallel (AI)$.

CORRIGÉ

a) Coplanaires. Les points I et J appartiennent au plan (ABF) de la face $ABFE$. D'après le troisième axiome d'incidence, $(IJ) \subset (ABF)$. Comme $(AB) \subset (ABF)$, les deux droites sont coplanaires.

Non parallèles. Les arêtes $[AE]$ et $[BF]$ sont parallèles, donc $(AI) \parallel (BJ)$. Si l'on avait $(IJ) \parallel (AB)$, le quadrilatère $ABJI$ serait un parallélogramme, et l'on aurait $AI = BJ$: c'est faux, car $3 \neq 1$. Coplanaires et non parallèles, les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

b) Les longueurs. Dans le plan (ABF), le point B est sur $[LA]$, le point J est sur $[LI]$, et $(BJ) \parallel (AI)$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle LAI :

$$\begin{aligned}\frac{LB}{LA} &= \frac{LJ}{LI} \\ &= \frac{BJ}{AI} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc $LA = 3 \times LB$. Comme B est entre L et A, on a aussi $LA = LB + AB = LB + 4$. Ainsi

$$\begin{aligned}3 \times LB &= LB + 4 \\ 2 \times LB &= 4\end{aligned}$$

d'où $LB = 2$ cm et $LA = 6$ cm.

Conclusion. Les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires et non parallèles ; leur point commun L vérifie $LB = 2$ cm et $LA = 6$ cm.

2. 1 pts

a) Justifier que le point L appartient au plan (IJK) et au plan (ABC).

b) En déduire l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

INDICE

Début : L est sur une droite de chacun des deux plans. **Ensuite :** quel autre point est commun aux deux plans ?

CORRIGÉ

a) Le point L est sur (IJ), et $(IJ) \subset (IJK)$: donc $L \in (IJK)$. Il est aussi sur (AB), et $(AB) \subset (ABC)$: donc $L \in (ABC)$.

b) Un second point commun. Le point K est sur l'arête $[BC]$: il appartient à (ABC) et à (IJK). Les points K et L sont distincts, car $K \notin (AB)$.

Deux plans distincts. La droite (AE) coupe le plan (ABC) seulement en A, et $I \neq A$: donc $I \notin (ABC)$, alors que $I \in (IJK)$.

D'après le quatrième axiome d'incidence, l'intersection des deux plans est une droite. Elle contient L et K : c'est la droite (LK).

Conclusion. Le point L appartient aux plans (IJK) et (ABC), et ces plans se coupent selon la droite (LK).

3. 1 pts

a) La droite (LK) coupe la droite (AD) en un point M, et K est sur $[LM]$. Calculer AM. Le point M est-il sur l'arête $[AD]$?

b) En déduire la section du bloc par le plan (IJK).

INDICE

Début : dans la face $ABCD$, les côtés $[BC]$ et $[AD]$ sont parallèles ; utilise le théorème de Thalès dans le triangle LAM. **Ensuite :** cherche, face par face, deux points de la section.

CORRIGÉ

a) Calcul de AM. Dans le plan (ABC), B est sur $[LA]$, K est sur $[LM]$, et $(BK) \parallel (AM)$, car $ABCD$ est un rectangle. D'après le théorème de Thalès dans le triangle LAM :

$$\begin{aligned}\frac{BK}{AM} &= \frac{LK}{LM} \\ &= \frac{LB}{LA} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

donc $AM = 3 \times BK = 3$ cm.

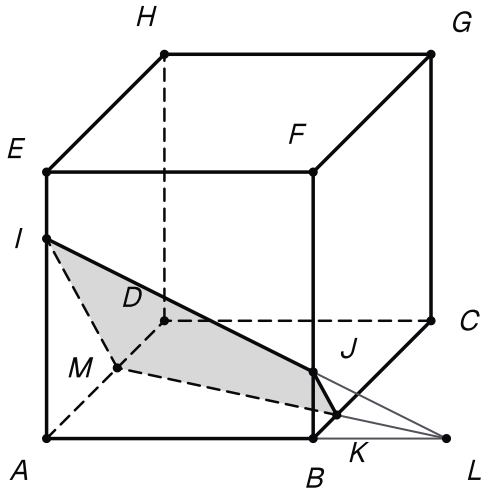
Position de M. Le point M est sur la droite (AD), du même côté de (AB) que K, donc que D. Comme $AM = 3$ cm et $AD = 5$ cm, le point M est sur l'arête $[AD]$, avec $MD = 2$ cm.

b) La section. Le plan (IJK) coupe chaque face qui contient deux de ses points selon le segment qui les joint :

- $[IJ]$ dans la face $ABFE$;
- $[JK]$ dans la face $BCGF$;
- $[KM]$ dans la face $ABCD$, car M et K sont sur (LK), intersection de (IJK) et de (ABC) ;
- $[MI]$ dans la face $ADHE$.

Ces quatre segments ferment un polygone : la section du bloc est le quadrilatère $IJKM$.

Conclusion. $AM = 3$ cm, donc M est sur l'arête $[AD]$; la section du bloc par le plan (IJK) est le quadrilatère $IJKM$.



La section du bloc par le plan (IJK) : le quadrilatère IJKM, construit grâce au point L de (AB).

4. 1,25 pts

a) Justifier que les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles.

b) En déduire que $(IM) \parallel (JK)$. Calculer IM et JK, puis donner la nature du quadrilatère $IJKM$.

INDICE

Début : les droites (AD) et (AE) sont sécantes en A ; à quelles droites du plan (BCG) sont-elles parallèles ? **Ensuite :** le plan (IJK) coupe deux plans parallèles ; pour les longueurs, les triangles AIM et BJK sont rectangles en A et en B.

CORRIGÉ

a) On a $(AD) \parallel (BC)$ et $(AE) \parallel (BF)$, avec (BC) et (BF) incluses dans (BCG). Donc $(AD) \parallel (BCG)$ et $(AE) \parallel (BCG)$ (critère de parallélisme d'une droite et d'un plan).

Les droites (AD) et (AE) sont sécantes en A et incluses dans (ADH), donc $(ADH) \parallel (BCG)$ (critère de parallélisme de deux plans). Ces plans sont strictement parallèles, car $A \notin (BCG)$.

b) Parallélisme. Les plans (IJK) et (ADH) sont distincts, car $J \notin (ADH)$. Ils ont en commun I et M, donc $(IJK) \cap (ADH) = (IM)$ (quatrième axiome d'incidence). De même, $I \notin (BCG)$ et $(IJK) \cap (BCG) = (JK)$. D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles :

$$(IM) \parallel (JK)$$

Longueurs. La face $ADHE$ est un rectangle, donc le triangle AIM est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$IM^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

d'où $IM = 3\sqrt{2}$ cm. La face $BCGF$ est un rectangle, donc le triangle BJK est rectangle en B, et

$$JK^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

d'où $JK = \sqrt{2}$ cm.

Nature. Le quadrilatère $IJKM$ a deux côtés opposés $[IM]$ et $[JK]$ parallèles et de longueurs différentes.

Conclusion. Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles et $(IM) \parallel (JK)$. Avec $IM = 3\sqrt{2}$ cm et $JK = \sqrt{2}$ cm, le quadrilatère $IJKM$ est un trapèze de bases $[IM]$ et $[JK]$, et ce n'est pas un parallélogramme.

5. 0,75 pts

a) Calculer LI et LM.

b) En déduire IJ et KM, puis le périmètre de la section, en valeur exacte puis arrondie au centième.

INDICE

Début : les triangles LAI et LAM sont rectangles en A. **Ensuite :** les rapports de Thalès des questions 1 et 3 donnent LJ et LK.

CORRIGÉ

a) La face $ABFE$ est un rectangle, donc le triangle LAI est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$LI^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

d'où $LI = 3\sqrt{5}$ cm. De même, la face $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle LAM est rectangle en A, et

$$LM^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

d'où $LM = 3\sqrt{5}$ cm.

b) Les côtés IJ et KM. D'après la question 1, $\dfrac{LJ}{LI} = \dfrac{1}{3}$, donc $LJ = \sqrt{5}$ cm. Comme J est entre L et I, $IJ = LI - LJ = 2\sqrt{5}$ cm. D'après la question 3, $\dfrac{LK}{LM} = \dfrac{1}{3}$, donc $LK = \sqrt{5}$ cm et $KM = LM - LK = 2\sqrt{5}$ cm.

Le périmètre. On ajoute les quatre côtés, avec $JK = \sqrt{2}$ cm et $MI = 3\sqrt{2}$ cm (question 4). En cm :

$$\begin{aligned} &2\sqrt{5} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

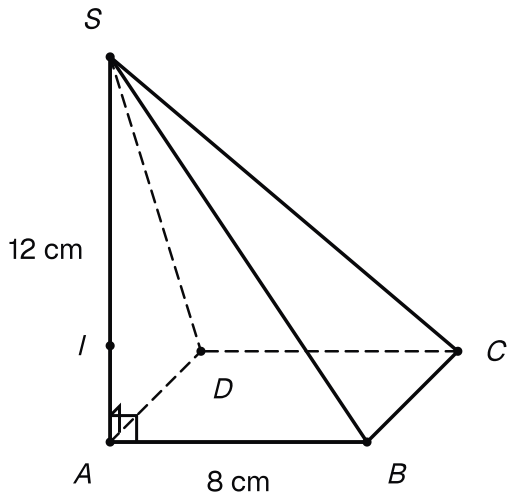
Conclusion. $LI = LM = 3\sqrt{5}$ cm et $IJ = KM = 2\sqrt{5}$ cm ; le périmètre de la section vaut $IJ + JK + KM + MI = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ cm, soit environ $14{,}60$ cm.

Exercice 5 5 pts

Une pyramide coupée par un plan orthogonal à une arête

$SABCD$ est une pyramide de sommet S. Sa base $ABCD$ est un carré de côté 8 cm. L'arête $[SA]$ est orthogonale au plan (ABC) de la base, et $SA = 12$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

On place le point I sur l'arête $[SA]$, avec $SI = 9$ cm. On note (P) le plan qui passe par I et qui est orthogonal à la droite (SA).



La pyramide SABCD : base carrée de côté 8 cm, arête [SA] orthogonale à la base, SA = 12 cm, et le point I de [SA].

1. 0,75 pts

a) Justifier que les plans (P) et (ABC) sont parallèles.

b) En déduire qu'ils sont strictement parallèles.

INDICE

Début : les deux plans sont orthogonaux à une même droite. **Ensuite :** cherche un point de (P) qui n'est pas dans (ABC).

CORRIGÉ

a) Le plan (P) est orthogonal à (SA) par définition, et $(SA) \perp (ABC)$ d'après l'énoncé. Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles (cinquième propriété liant parallélisme et orthogonalité) :

$$(P) \parallel (ABC)$$

b) La droite (SA) n'est pas incluse dans (ABC), car $S \notin (ABC)$: elle coupe ce plan seulement en A. Comme $I \neq A$, on a $I \notin (ABC)$. Or $I \in (P)$: les plans parallèles (P) et (ABC) ne sont pas confondus.

Conclusion. Les plans (P) et (ABC) sont parallèles, et même strictement parallèles.

2. 1 pts

a) Justifier que les plans (P) et (SAB) sont sécants selon une droite (Δ) qui passe par I, et que $(\Delta) \parallel (AB)$.

b) La droite (Δ) coupe $[SB]$ en un point J. En déduire $\dfrac{SJ}{SB}$, puis IJ.

INDICE

Début : le point I est commun aux deux plans ; le plan (SAB) coupe aussi le plan (ABC). **Ensuite :** le théorème de Thalès dans le triangle SAB.

CORRIGÉ

a) L'intersection. Le point I appartient à (P) et à (SAB). Ces plans sont distincts, car $A \in (SAB)$ et $A \notin (P)$: les plans (P) et (ABC) n'ont aucun point commun (question 1). D'après le quatrième axiome d'incidence, leur intersection est une droite (Δ) qui passe par I.

Le parallélisme. Le plan (SAB) coupe les plans strictement parallèles (P) et (ABC) selon (Δ) et (AB). D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, $(\Delta) \parallel (AB)$.

b) Rapport et longueur. Dans le triangle SAB, I est sur $[SA]$, J est sur $[SB]$ et $(IJ) \parallel (AB)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SJ}{SB} = \frac{SI}{SA} = \frac{IJ}{AB}$$

avec $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. Donc $\dfrac{SJ}{SB} = \dfrac{3}{4}$ et $IJ = \dfrac{3}{4} \times 8 = 6$ cm.

Conclusion. Les plans (P) et (SAB) se coupent selon une droite (Δ) qui passe par I et qui est parallèle à (AB) ; $\dfrac{SJ}{SB} = \dfrac{3}{4}$ et $IJ = 6$ cm.

3. 1,25 pts

a) Le plan (P) coupe l'arête $[SC]$ en un point K. Justifier que $(JK) \parallel (BC)$, puis calculer JK.

On admet que, de même, (P) coupe l'arête $[SD]$ en un point L, avec $(KL) \parallel (CD)$, $(LI) \parallel (DA)$ et $KL = LI = 6$ cm.

b) Justifier que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires. En déduire la nature de la section $IJKL$ de la pyramide par (P), puis son aire.

INDICE

Début : le plan (SBC) coupe les deux plans parallèles ; le rapport $\dfrac{SJ}{SB}$ est connu. **Ensuite :** les parallèles à (IJ) et à (JK) menées par B sont (AB) et (BC).

CORRIGÉ

a) Le parallélisme. Les points J et K appartiennent à (P) et au plan (SBC). Ces plans sont distincts, car $S \notin (P)$: la droite (SA) coupe (P) seulement en I. Le plan (SBC) coupe donc (P) selon (JK), et (ABC) selon (BC). D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, $(JK) \parallel (BC)$.

La longueur. Dans le triangle SBC, le théorème de Thalès donne

$$\frac{JK}{BC} = \frac{SJ}{SB} = \frac{3}{4}$$

donc $JK = \dfrac{3}{4} \times 8 = 6$ cm.

b) L'angle en J. Les parallèles à (IJ) et à (JK) menées par B sont (AB) et (BC), qui sont perpendiculaires car $ABCD$ est un carré. Par définition, les droites (IJ) et (JK) sont donc orthogonales. Elles se coupent en J : elles sont perpendiculaires.

Nature et aire. Le quadrilatère $IJKL$, contenu dans le plan (P), a quatre côtés de 6 cm : c'est un losange. Il a un angle droit en J : c'est un carré. Son aire vaut $6 \times 6 = 36$ cm².

Conclusion. $(JK) \parallel (BC)$ et $JK = 6$ cm ; les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires, et la section $IJKL$ est un carré d'aire 36 cm².

4. 1 pts

a) Justifier que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAB). En déduire que la droite (JK) est orthogonale au plan (SAB).

b) En déduire que le triangle SJK est rectangle en J. Calculer SB, puis SJ, puis SK.

INDICE

Début : (BC) est orthogonale à (AB) et à (SA) ; ces deux droites sont-elles sécantes ? **Ensuite :** $(SJ) \subset (SAB)$; le triangle SAB est rectangle en A, et le rapport $\dfrac{SJ}{SB}$ est connu.

CORRIGÉ

a) La droite (BC). Le carré $ABCD$ donne $(BC) \perp (AB)$. Comme $(SA) \perp (ABC)$ et $(BC) \subset (ABC)$, on a aussi $(BC) \perp (SA)$. Les droites (AB) et (SA) sont sécantes en A et incluses dans (SAB). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan :

$$(BC) \perp (SAB)$$

La droite (JK). On a $(JK) \parallel (BC)$ (question 3). Le plan (SAB), orthogonal à (BC), est donc aussi orthogonal à (JK) (deuxième propriété liant parallélisme et orthogonalité) : $(JK) \perp (SAB)$.

b) Le triangle SJK. La droite (SJ) est incluse dans (SAB), donc $(JK) \perp (SJ)$. Ces deux droites se coupent en J : le triangle SJK est rectangle en J.

Les longueurs. Comme $(SA) \perp (ABC)$ et $(AB) \subset (ABC)$, le triangle SAB est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} SB^2 &= SA^2 + AB^2 \\ &= 144 + 64 = 208 \end{aligned}$$

donc $SB = 4\sqrt{13}$ cm. D'après la question 2, $SJ = \dfrac{3}{4} \times SB = 3\sqrt{13}$ cm. Enfin, dans le triangle SJK rectangle en J, le théorème de Pythagore donne

$$\begin{aligned} SK^2 &= SJ^2 + JK^2 \\ &= 117 + 36 = 153 \end{aligned}$$

Conclusion. La droite (JK) est orthogonale au plan (SAB) et le triangle SJK est rectangle en J ; $SB = 4\sqrt{13}$ cm, $SJ = 3\sqrt{13}$ cm, et $SK = 3\sqrt{17}$ cm, soit environ $12{,}37$ cm.

5. 1 pts

a) Calculer le volume V de la pyramide $SABCD$.

b) Le plan (P) partage la pyramide en une petite pyramide $SIJKL$ et une partie basse. Justifier que la hauteur de $SIJKL$ issue de S est SI, puis calculer son volume V'.

c) En déduire le volume de la partie basse, puis la fraction $\dfrac{V'}{V}$. Comparer avec $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

INDICE

Outil : pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$ (formule admise). La hauteur se mesure sur la perpendiculaire au plan de la base menée par le sommet ; relis la définition de (P).

CORRIGÉ

a) Le volume V. La droite (SA) est orthogonale au plan de la base et le coupe en A : la hauteur de $SABCD$ est $SA = 12$ cm. L'aire de la base vaut $8 \times 8 = 64$ cm². Avec la formule admise pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3} \times 64 \times 12 = 256$ cm³.

b) Le volume V'. Par définition de (P), $(SA) \perp (P)$: la droite qui passe par S et qui est orthogonale au plan (P) est (SA), et elle coupe (P) en I. La hauteur de $SIJKL$ issue de S est donc $SI = 9$ cm. Sa base est le carré $IJKL$, d'aire 36 cm² (question 3), donc $V' = \dfrac{1}{3} \times 36 \times 9 = 108$ cm³.

c) La partie basse et le rapport. La partie basse a pour volume $256 - 108 = 148$ cm³. Ensuite :

$$\frac{V'}{V} = \frac{108}{256} = \frac{27}{64}$$

et

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Conclusion. $V = 256$ cm³, $V' = 108$ cm³ et la partie basse a pour volume 148 cm³ ; la fraction $\dfrac{V'}{V}$ est égale à $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.