BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

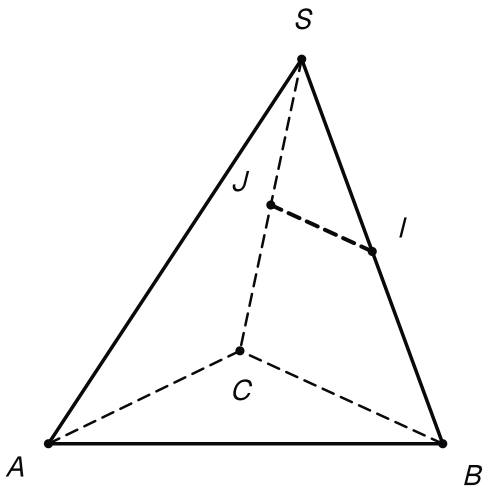
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Deux milieux dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre. On note I le milieu de l'arête $[SB]$ et J le milieu de l'arête $[SC]$.



Le tétraèdre SABC avec I milieu de [SB], J milieu de [SC] et le segment [IJ].

1.

Justifier que $(IJ) \parallel (BC)$.

INDICE

Piste : dans quel plan se trouvent I, J, B et C ? Quel résultat du collège parle de milieux ?

2.

En déduire que la droite (IJ) est strictement parallèle au plan (ABC).

INDICE

Piste : quelle droite du plan (ABC) est parallèle à (IJ) ? Pour le mot « strictement », le point I peut-il être dans (ABC) ?

3.

Les droites (IJ) et (AB) sont toutes deux parallèles au plan (ABC). Sont-elles parallèles entre elles ? Préciser leur position relative.

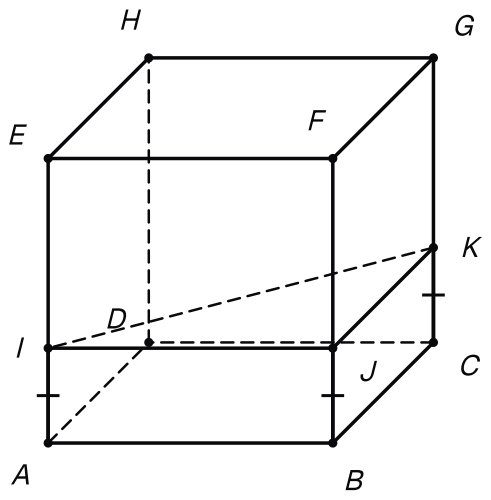
INDICE

Piste : si $(IJ) \parallel (AB)$, que dire de (BC) et de (AB) ? Pour un point commun éventuel, utilise la question 2.

Exercice 2

Trois points à la même hauteur dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Sur les arêtes verticales, on place I sur $[AE]$, J sur $[BF]$ et K sur $[CG]$, avec $AI = BJ = CK = \frac{1}{3}AE$.



Le cube avec I, J, K sur les arêtes verticales [AE], [BF], [CG], au tiers de leur hauteur, et le triangle IJK.

1.

Justifier que $(IJ) \parallel (AB)$ et que $(JK) \parallel (BC)$.

INDICE

Piste : que dire des côtés opposés $[AI]$ et $[BJ]$ du quadrilatère $ABJI$?

2.

En déduire que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

INDICE

Piste : de quoi le critère de parallélisme de deux plans a-t-il besoin ? Regarde les deux droites de la question 1.

3.

Le plan (IJK) coupe l'arête $[DH]$ en un point L. Justifier que $(IL) \parallel (AD)$, puis exprimer DL en fonction de AE.

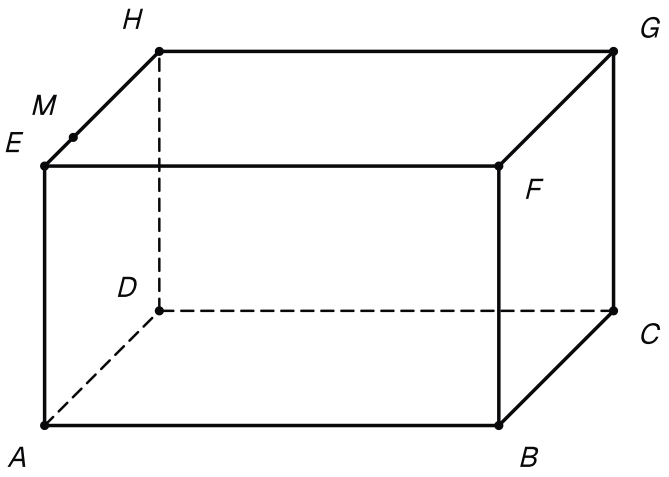
INDICE

Piste : quelles sont les traces du plan (ADH) sur (ABC) et sur (IJK) ?

Exercice 3

Un plan incliné dans un pavé droit

$ABCDEFGH$ est un pavé droit : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Le point M est sur $[EH]$, avec $EM = \frac{1}{4}EH$. On étudie le plan (ABM).



Le pavé droit ABCDEFGH et le point M de [EH], au quart de l'arête à partir de E.

1.

Justifier que les plans (ABM) et (EFG) sont sécants.

INDICE

Piste : quel point se trouve dans les deux plans ? Les deux plans sont-ils distincts ?

2.

Justifier que (Δ) est parallèle à (AB).

INDICE

Piste : quelle arête de la face du dessus est parallèle à (AB) ?

3.

On note N le point de $[FG]$ tel que $FN = \frac{1}{4}FG$. Justifier que $N \in (\Delta)$.

INDICE

Piste : que dire des côtés $[EM]$ et $[FN]$ du quadrilatère $EFNM$?

4.

Donner la section du pavé par le plan (ABM), puis justifier que c'est un rectangle.

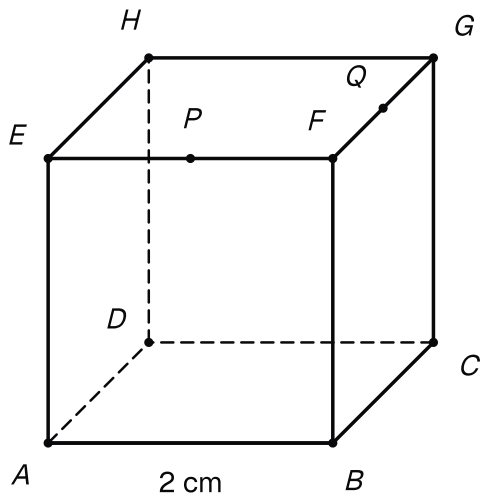
INDICE

Piste : cherche les côtés de la section face par face. Pour l'angle en A, la droite (AB) est-elle orthogonale au plan de la face $ADHE$?

Exercice 4

Une section en trapèze dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 2 cm : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On note P le milieu de $[EF]$ et Q le milieu de $[FG]$. On cherche la section du cube par le plan (CPQ).



Le cube d'arête 2 cm avec P milieu de [EF] et Q milieu de [FG].

1.

Justifier que $(PQ) \parallel (EG)$ et que $(EG) \parallel (AC)$.

INDICE

Piste : quels milieux le triangle EFG contient-il ? Pour la seconde partie, que dire des arêtes $[AE]$ et $[CG]$?

2.

En déduire que le point A appartient au plan (CPQ).

INDICE

Piste : les droites (PQ) et (AC) sont-elles strictement parallèles ? Quel plan déterminent-elles ?

3.

Donner la section du cube par le plan (CPQ) et sa nature.

INDICE

Piste : quels points du plan (CPQ) se trouvent sur une même face ?

4.

Calculer les longueurs des côtés du trapèze $ACQP$. Que peux-tu en conclure ?

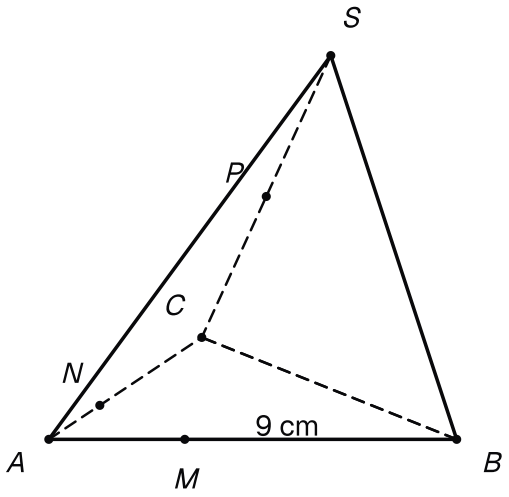
INDICE

Piste : dans quel triangle rectangle d'une face se trouve le segment $[AP]$?

Exercice 5

Une section en trapèze dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre, avec $BC = 9$ cm. Le point M est sur $[AB]$, avec $AM = \frac{1}{3}AB$; le point N est sur $[AC]$, avec $AN = \frac{1}{3}AC$. Le point P est le milieu de $[SC]$.



Le tétraèdre SABC avec BC = 9 cm, M et N au tiers de [AB] et [AC] à partir de A, P milieu de [SC].

1.

Justifier que $(MN) \parallel (BC)$, puis calculer MN.

INDICE

Piste : compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$; quel résultat du collège les utilise ?

2.

Le plan (MNP) coupe le plan (SBC) selon une droite (Δ). Justifier que (Δ) est la parallèle à (BC) passant par P.

INDICE

Piste : quelle droite du plan (MNP) est parallèle à une droite du plan (SBC) ?

3.

La droite (Δ) coupe $[SB]$ en Q. Préciser la position de Q, puis calculer PQ.

INDICE

Piste : dans le triangle SBC, P est le milieu de $[SC]$ et $(PQ) \parallel (BC)$: que dit le collège ?

4.

Donner la section du tétraèdre par le plan (MNP) et sa nature.

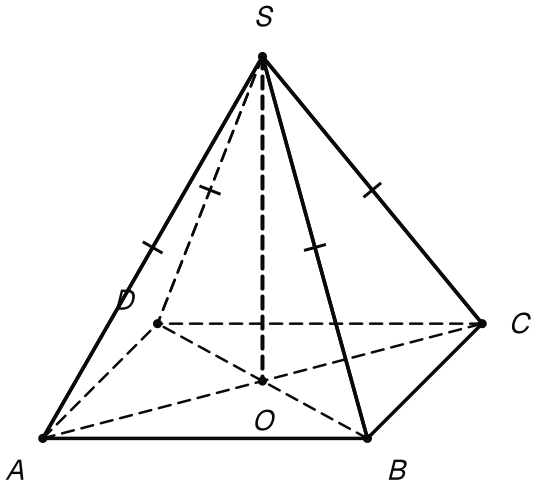
INDICE

Piste : quels points du plan (MNP) sont sur une même face ? Quels côtés de la section sont parallèles ?

Exercice 6

Une pyramide régulière à base carrée

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un carré de centre O, et dont les arêtes latérales ont la même longueur : $SA = SB = SC = SD$.



La pyramide SABCD : base carrée de centre O, arêtes latérales de même longueur, hauteur [SO].

1.

Justifier que $(SO) \perp (AC)$ et que $(SO) \perp (BD)$.

INDICE

Piste : dans le triangle SAC, isocèle en S, que représente la droite (SO) ?

2.

En déduire que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Piste : quelles droites du plan (ABC) sont déjà orthogonales à (SO) d'après la question 1 ? Se coupent-elles ?

3.

Justifier que la droite (BD) est orthogonale au plan (SAC), puis que les droites (BD) et (SA) sont orthogonales.

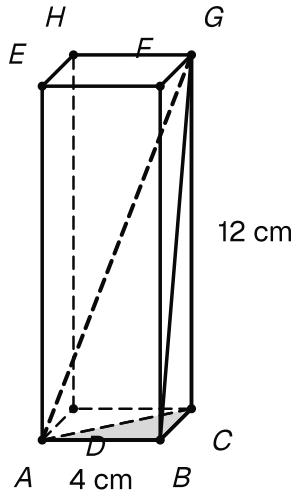
INDICE

Piste : dans le carré, quelle droite du plan (SAC) est perpendiculaire à (BD) ? En faut-il une seconde ?

Exercice 7

La diagonale d'une boîte et un tétraèdre

Une boîte a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On donne $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm et $CG = 12$ cm.



La boîte ABCDEFGH avec AB = 4 cm, BC = 3 cm, CG = 12 cm, sa grande diagonale [AG] et le tétraèdre GABC.

1.

Justifier que la droite (CG) est orthogonale au plan (ABC), puis que le triangle ACG est rectangle en C.

INDICE

Piste : quels angles droits portent les faces qui contiennent l'arête $[CG]$?

2.

Calculer AC, puis la longueur AG de la diagonale de la boîte.

INDICE

Piste : dans quel triangle rectangle de la base se trouve $[AC]$? Et $[AG]$, d'après la question 1 ?

3.

Rappel : la hauteur du tétraèdre $GABC$ issue de G est la distance de G au plan (ABC), mesurée sur la droite orthogonale à ce plan qui passe par G.

Calculer le volume du tétraèdre $GABC$, puis la fraction du volume de la boîte qu'il représente.

INDICE

Piste : pour une pyramide, $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$ (formule admise) ; quelle est la hauteur issue de G ?