BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Application	8

Exercice 1

Dessiner une boîte en perspective cavalière

Une boîte a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On donne $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $AE = 3$ cm.

Tu la dessines sur ton cahier en perspective cavalière. La face $ABFE$ est vue de face ; les fuyantes partent vers la droite et vers le haut, raccourcies de moitié.

1.

Donner les longueurs à tracer pour $[AB]$, $[AE]$ et $[AD]$.

INDICE

Outil : la face de devant est en vraie grandeur ; seules les arêtes fuyantes sont raccourcies.

CORRIGÉ

La face $ABFE$ est vue de face : elle est dessinée en vraie grandeur. Tu traces donc $AB = 6$ cm et $AE = 3$ cm.

L'arête $[AD]$ est fuyante, donc raccourcie de moitié :

$$\frac{1}{2} \times 4 = 2$$

Conclusion. Sur le dessin, $[AB]$ mesure 6 cm, $[AE]$ mesure 3 cm, et $[AD]$ est tracée avec une longueur de 2 cm.

2.

Indiquer les arêtes à dessiner en pointillés.

INDICE

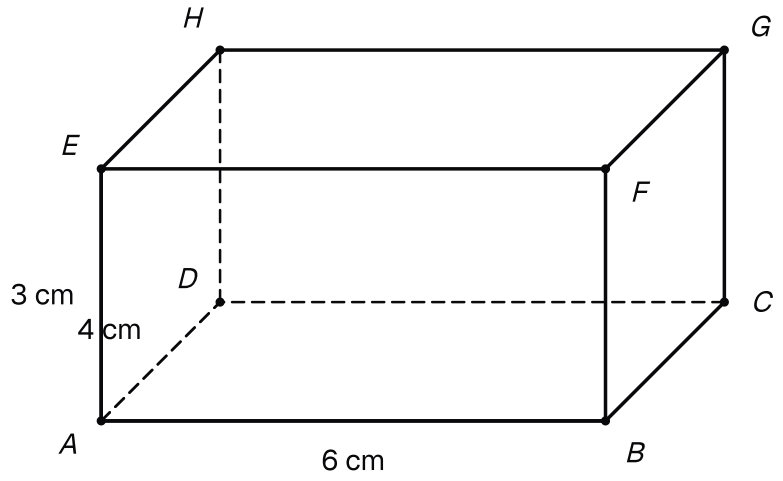
Outil : cherche le sommet caché, en bas et à l'arrière ; les arêtes qui en partent sont cachées.

CORRIGÉ

Les fuyantes partent vers la droite et vers le haut. On voit donc trois faces : celle de devant $ABFE$, celle du dessus $EFGH$ et celle de droite $BCGF$.

Le sommet D, en bas et à l'arrière, n'appartient à aucune de ces trois faces : il est caché, ainsi que les trois arêtes qui en partent.

Conclusion. Les arêtes $[AD]$, $[CD]$ et $[DH]$ se tracent en pointillés.



La boîte ABCDEFGH en perspective cavalière, avec ses vraies longueurs et ses arêtes cachées en pointillés.

3.

Sur le dessin, la face $ADHE$ est un parallélogramme. Donner sa vraie nature et sa vraie aire.

INDICE

Outil : un dessin en perspective ne conserve ni les angles droits des faces fuyantes ni leurs longueurs.

CORRIGÉ

Dans la boîte, $ADHE$ est une face du pavé droit : c'est un rectangle de 4 cm sur 3 cm. Son aire vaut $4 \times 3 = 12$ cm².

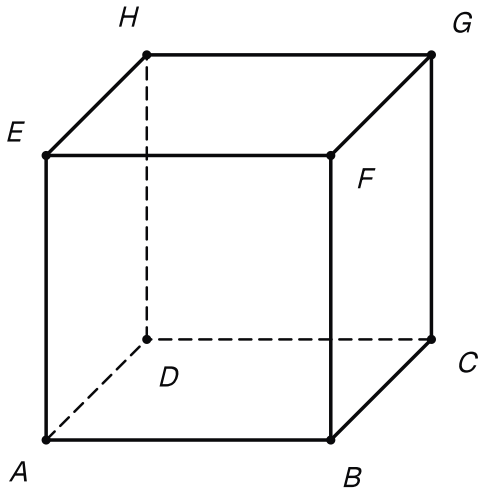
Une aire mesurée sur le dessin serait fausse : la perspective raccourcit $[AD]$ et ne conserve pas les angles droits de cette face.

Conclusion. En réalité, $ADHE$ est un rectangle, et son aire vaut 12 cm².

Exercice 2

Positions de droites dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube : face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. Fais la figure sur ton cahier.



Le cube ABCDEFGH de l'exercice, sommets E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D.

1.

Les droites (EH) et (BC) sont-elles parallèles ?

INDICE

Outil : passe par une troisième droite, parallèle à chacune d'elles.

CORRIGÉ

Les deux droites ne sont pas dans une même face : on passe par une troisième droite, (FG).

Le quadrilatère $EFGH$ est un carré, donc

$$(EH) \parallel (FG)$$

Le quadrilatère $BCGF$ est un carré, donc

$$(FG) \parallel (BC)$$

D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace, deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Conclusion. Oui, les droites (EH) et (BC) sont parallèles.

2.

Les droites (EF) et (BF) sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ?

INDICE

Outil : dans quelle face du cube ces deux droites se trouvent-elles ?

CORRIGÉ

Les droites (EF) et (BF) portent deux côtés consécutifs du carré $ABFE$: elles passent toutes deux par F et ne sont pas confondues.

Deux droites distinctes ont au plus un point commun. Ici, ce point est F.

Conclusion. Les droites (EF) et (BF) sont sécantes en F.

3.

Même question pour les droites (EG) et (BF).

INDICE

Outil : un plan qui contiendrait les deux droites contiendrait trois points non alignés que tu connais.

CORRIGÉ

Supposons qu'un plan contienne les droites (EG) et (BF). Il contient alors les points E, G et F, qui ne sont pas alignés. D'après le deuxième axiome d'incidence, ce plan est le plan (EFG) de la face du dessus.

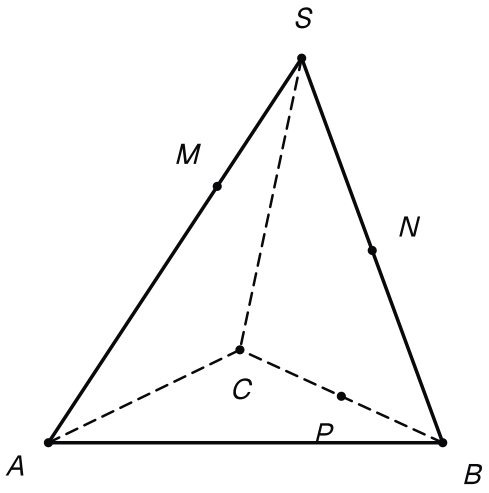
Or le point B, qui est sur (BF), n'appartient pas au plan (EFG) : c'est impossible. Aucun plan ne contient donc ces deux droites.

Conclusion. Les droites (EG) et (BF) sont non coplanaires : elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Exercice 3

Une droite dans une face d'un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre : ses quatre sommets ne sont pas coplanaires, donc $C \notin (SAB)$. Le point M est sur l'arête $[SA]$, avec $SM = \frac{1}{3}SA$. Le point N est le milieu de $[SB]$, et le point P est le milieu de $[BC]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le tétraèdre SABC avec M sur [SA], au tiers depuis S, N milieu de [SB] et P milieu de [BC].

1.

Justifier que (MN) est incluse dans le plan (SAB).

INDICE

Outil : le troisième axiome d'incidence ; commence par placer M et N dans ce plan.

CORRIGÉ

Le point M. Les points S et A sont dans le plan (SAB). D'après le troisième axiome d'incidence, la droite (SA) est incluse dans ce plan. Comme M est sur $[SA]$, on a $M \in (SAB)$.

Le point N. De même, $(SB) \subset (SAB)$ et N est sur $[SB]$, donc $N \in (SAB)$.

La droite (MN). Les points M et N sont distincts : ils sont différents de S et situés sur deux droites distinctes qui passent par S. Ils appartiennent tous deux à (SAB), donc le même axiome donne

$$(MN) \subset (SAB)$$

Conclusion. La droite (MN) est incluse dans le plan (SAB).

2.

Justifier que la droite (BC) coupe le plan (SAB) au seul point B.

INDICE

Outil : la droite (BC) est-elle incluse dans (SAB) ? Quel point a-t-elle en commun avec lui ?

CORRIGÉ

Le point C n'est pas dans (SAB) : la droite (BC) n'est donc pas incluse dans ce plan. Elle a cependant un point commun avec lui, le point B.

Or une droite non incluse dans un plan a au plus un point commun avec lui.

Conclusion. La droite (BC) coupe (SAB) au seul point B.

3.

En déduire que $P \notin (SAB)$.

INDICE

Outil : le point P est sur la droite (BC) ; est-il égal à B ?

CORRIGÉ

Le point P, milieu de $[BC]$, est sur la droite (BC), et il est distinct de B.

D'après la question 2, le seul point de (BC) situé dans le plan (SAB) est B.

Conclusion. Donc $P \notin (SAB)$.

4.

En déduire la position relative de la droite (MP) et du plan (SAB).

INDICE

Outil : compte les points communs à la droite et au plan.

CORRIGÉ

La droite (MP) n'est pas incluse dans (SAB), car son point P n'y est pas (question 3). Elle a pourtant le point M en commun avec ce plan (question 1).

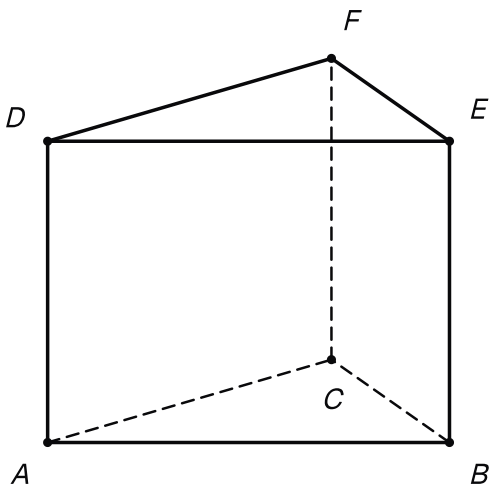
Une droite non incluse dans un plan a au plus un point commun avec lui : ce point est donc M.

Conclusion. La droite (MP) et le plan (SAB) sont sécants en M.

Exercice 4

Les plans d'une tente

Une tente a la forme d'un prisme droit $ABCDEF$ à base triangulaire. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, avec D au-dessus de A, E au-dessus de B et F au-dessus de C. Les faces $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des rectangles. Fais la figure sur ton cahier.



La tente : le prisme droit ABCDEF, D au-dessus de A, E au-dessus de B, F au-dessus de C.

1.

Les droites (AD) et (CF) déterminent-elles un plan ? Si oui, lequel ?

INDICE

Outil : deux droites strictement parallèles déterminent un unique plan.

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ACFD$ est un rectangle, donc

$$(AD) \parallel (CF)$$

Ces droites sont distinctes, car $C \notin (AD)$. Parallèles et distinctes, elles n'ont aucun point commun : elles sont strictement parallèles.

Elles déterminent donc un seul plan, celui qui contient la face $ACFD$.

Conclusion. Oui : les droites (AD) et (CF) déterminent le plan de la face $ACFD$, noté (ACF).

2.

La droite (BE) et le point A déterminent-ils un plan ? Lequel ?

INDICE

Outil : une droite et un point qui n'est pas sur elle déterminent un plan.

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ABED$ est un rectangle, donc $(AD) \parallel (BE)$, et ces droites sont distinctes. Elles n'ont aucun point commun. Le point A, qui est sur (AD), n'est donc pas sur (BE) :

$$A \notin (BE)$$

D'après la détermination d'un plan, une droite et un point qui n'est pas sur elle déterminent un unique plan.

Conclusion. Oui : la droite (BE) et le point A déterminent le plan (ABE) de la face $ABED$.

3.

Les droites (AB) et (BE) déterminent-elles un plan ? Comparer avec la question 2.

INDICE

Outil : deux droites distinctes qui ont un point commun déterminent un plan.

CORRIGÉ

Les droites (AB) et (BE) sont distinctes et ont le point commun B : elles sont sécantes. D'après la détermination d'un plan (troisième cas), deux droites sécantes déterminent un unique plan.

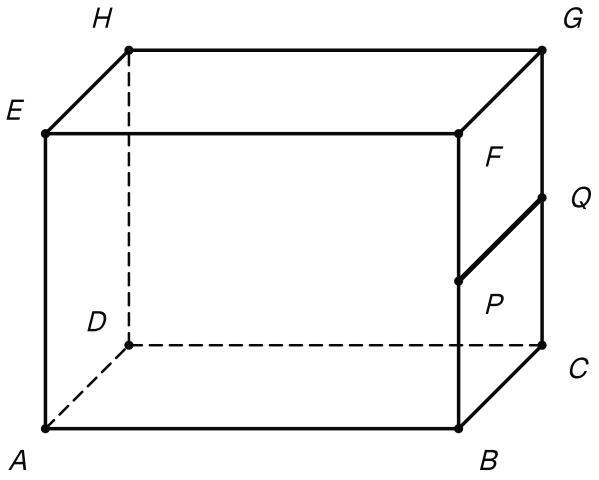
Ce plan contient A, B et E : c'est le plan (ABE).

Conclusion. Oui, et c'est le même plan qu'à la question 2 : le plan (ABE) de la face $ABED$.

Exercice 5

Une planche dans une étagère

Une étagère a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D. On note P le milieu de l'arête $[BF]$ et Q le milieu de l'arête $[CG]$. Une planche est posée le long de $[PQ]$.



L'étagère ABCDEFGH et la planche [PQ], entre les milieux P de [BF] et Q de [CG].

1.

Justifier que $(PQ) \parallel (BC)$.

INDICE

Outil : rappel du collège, compare les côtés opposés $[BP]$ et $[CQ]$ du quadrilatère $BCQP$.

CORRIGÉ

Les arêtes $[BF]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur ; elles sont donc dans un même plan. Comme P et Q sont leurs milieux, $(BP) \parallel (CQ)$ et

$$\begin{aligned} BP &= \frac{1}{2}BF \\ &= \frac{1}{2}CG = CQ \end{aligned}$$

Le quadrilatère $BCQP$ a deux côtés opposés $[BP]$ et $[CQ]$ parallèles et de même longueur : d'après le collège, c'est un parallélogramme. Ses deux autres côtés opposés, $[PQ]$ et $[BC]$, sont donc parallèles.

Conclusion. $(PQ) \parallel (BC)$.

2.

En déduire que la droite (PQ) est parallèle au plan (ADH).

INDICE

Outil : trouve dans le plan (ADH) une droite parallèle à (PQ).

CORRIGÉ

Cherchons dans le plan (ADH) une droite parallèle à (PQ).

Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, donc $(AD) \parallel (BC)$. Les droites (PQ) et (AD) sont parallèles à la même droite (BC). D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace :

$$(PQ) \parallel (AD)$$

La droite (AD) est incluse dans le plan (ADH) : le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan s'applique.

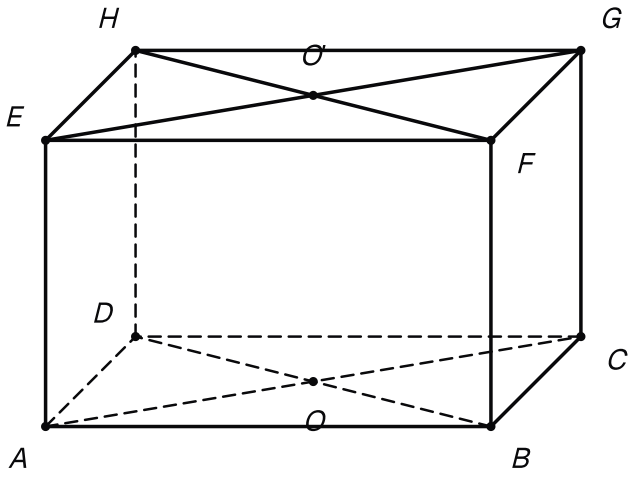
Conclusion. $(PQ) \parallel (ADH)$: la droite (PQ) est parallèle au plan (ADH).

Exercice 6

Deux vitres dans un aquarium

Un aquarium a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$: face inférieure $ABCD$, face supérieure $EFGH$, avec E, F, G, H au-dessus de A, B, C, D.

On note O le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du fond, et O' celui des diagonales $[EG]$ et $[FH]$ du couvercle. Deux vitres intérieures occupent les plans (ACG) et (BDF). On admet que le plan (ACG) contient aussi E, et que le plan (BDF) contient aussi H.



L'aquarium ABCDEFGH avec les diagonales du fond et du couvercle, et leurs points d'intersection O et O'.

1.

Justifier que O appartient aux deux plans (ACG) et (BDF).

INDICE

Outil : un point d'une droite incluse dans un plan appartient à ce plan.

CORRIGÉ

Les points A et C sont dans (ACG). D'après le troisième axiome d'incidence, $(AC) \subset (ACG)$. Comme O est sur (AC), on a $O \in (ACG)$.

De même, B et D sont dans (BDF), donc $(BD) \subset (BDF)$. Comme $O \in (BD)$, on a $O \in (BDF)$.

Conclusion. Le point O appartient aux deux plans (ACG) et (BDF).

2.

Justifier que O' appartient aussi aux deux plans.

INDICE

Outil : même raisonnement qu'à la question 1, avec les diagonales du couvercle.

CORRIGÉ

Les points E et G sont dans (ACG) ; pour E, c'est le fait admis dans l'énoncé. D'après le troisième axiome d'incidence, $(EG) \subset (ACG)$, donc $O' \in (ACG)$.

De même, F et H sont dans (BDF), donc $(FH) \subset (BDF)$ et $O' \in (BDF)$.

Conclusion. Le point O' appartient aussi aux deux plans (ACG) et (BDF).

3.

En déduire l'intersection des plans (ACG) et (BDF).

INDICE

Outil : deux plans distincts qui ont un point commun se coupent selon une droite ; ici, tu en connais deux points.

CORRIGÉ

Les plans sont distincts. Si B appartenait à (ACG), ce plan contiendrait A, B et C : ce serait le plan du fond, qui ne contient pas G. Donc $B \notin (ACG)$, alors que $B \in (BDF)$.

Leur intersection. D'après le quatrième axiome d'incidence, deux plans distincts qui ont un point commun se coupent selon une droite. Cette droite contient O et O' (questions 1 et 2), qui sont distincts : l'un est dans le fond, l'autre dans le couvercle.

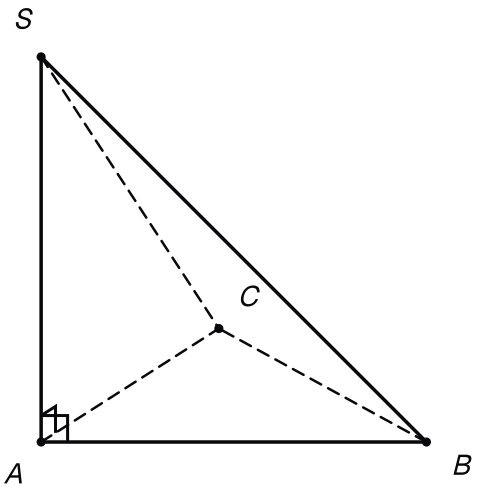
$$(ACG) \cap (BDF) = (OO')$$

Conclusion. Les plans (ACG) et (BDF) se coupent selon la droite (OO').

Exercice 7

Une arête orthogonale à une face

$SABC$ est un tétraèdre tel que les triangles SAB et SAC sont rectangles en A. Fais la figure sur ton cahier.



Le tétraèdre SABC, avec les triangles SAB et SAC rectangles en A.

1.

Justifier que la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Outil : quelles sont les deux droites sécantes du plan (ABC) à utiliser ?

CORRIGÉ

Le triangle SAB est rectangle en A, donc $(SA) \perp (AB)$. Le triangle SAC est rectangle en A, donc $(SA) \perp (AC)$.

Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A et incluses dans le plan (ABC). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan :

$$(SA) \perp (ABC)$$

Conclusion. La droite (SA) est orthogonale au plan (ABC).

2.

En déduire que les droites (SA) et (BC) sont orthogonales.

INDICE

Outil : la définition d'une droite orthogonale à un plan.

CORRIGÉ

Par définition, une droite orthogonale à un plan est orthogonale à chaque droite incluse dans ce plan.

D'après la question 1, $(SA) \perp (ABC)$. De plus, la droite (BC) est incluse dans (ABC).

Conclusion. Les droites (SA) et (BC) sont orthogonales : $(SA) \perp (BC)$.

3.

Les droites (SA) et (BC) sont-elles perpendiculaires ?

INDICE

Outil : deux droites perpendiculaires sont orthogonales **et** sécantes.

CORRIGÉ

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales et sécantes. Les droites (SA) et (BC) sont orthogonales (question 2) ; cherchons un éventuel point commun.

Un point commun à (SA) et (BC) serait dans (ABC), puisque $(BC) \subset (ABC)$. Or la droite (SA) coupe le plan (ABC) au seul point A, car $S \notin (ABC)$: ce point commun serait donc A. Mais $A \notin (BC)$, puisque A, B et C ne sont pas alignés.

Les droites (SA) et (BC) n'ont donc aucun point commun.

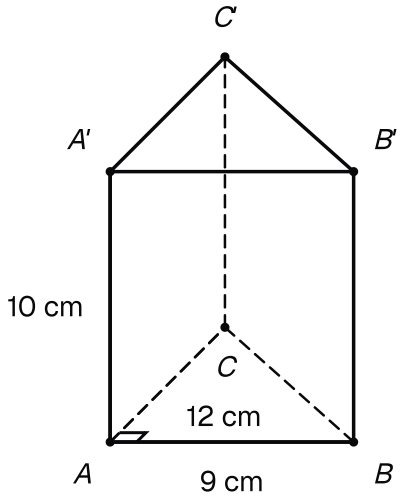
Conclusion. Orthogonales mais non sécantes, les droites (SA) et (BC) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 8

Le volume d'une boîte en prisme

Une boîte en carton a la forme d'un prisme droit. Sa base est un triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 9$ cm et $AC = 12$ cm. Ses arêtes latérales mesurent 10 cm et sont orthogonales au plan de la base.

Rappel : la hauteur d'un prisme droit est la distance entre les plans de ses deux bases, mesurée sur une droite orthogonale à ces plans.



La boîte en prisme droit : base ABC rectangle en A, AB = 9 cm, AC = 12 cm, arêtes latérales de 10 cm.

1.

Pourquoi la hauteur du prisme est-elle égale à la longueur d'une arête latérale ?

INDICE

Outil : relis le rappel ; une arête latérale relie-t-elle les deux bases ?

CORRIGÉ

Une arête latérale relie un sommet d'une base au sommet correspondant de l'autre base. D'après l'énoncé, elle est orthogonale au plan de la base.

Sa longueur est donc la distance entre les plans des deux bases, mesurée sur une droite orthogonale à ces plans : c'est la hauteur, d'après le rappel.

Conclusion. La hauteur du prisme est égale à la longueur d'une arête latérale, soit 10 cm.

2.

Calculer le volume de la boîte.

INDICE

Outil : pour un prisme droit, $V = \text{aire de la base} \times h$ (formule admise).

CORRIGÉ

Aire de la base. Le triangle ABC est rectangle en A :

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$$

L'aire de la base vaut 54 cm².

Volume. Pour un prisme droit, le volume est l'aire de la base multipliée par la hauteur (formule admise), avec $h = 10$ cm d'après la question 1. Donc $V = 54 \times 10 = 540$ cm³.

Conclusion. Le volume de la boîte vaut 540 cm³.

3.

Calculer BC, puis l'aire totale du carton.

INDICE

Outil : le théorème de Pythagore dans le triangle ABC ; les faces latérales sont des rectangles de hauteur 10 cm.

CORRIGÉ

Calcul de BC. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 9^2 + 12^2 \\ &= 81 + 144 = 225 \end{aligned}$$

Donc $BC = 15$ cm.

Faces latérales. Ce sont trois rectangles de hauteur 10 cm, dont les largeurs sont les côtés du triangle ABC. Leur aire totale, en cm², vaut

$$(9 + 12 + 15) \times 10 = 360$$

Aire totale. On ajoute les deux bases : $360 + 2 \times 54 = 468$ cm².

Conclusion. $BC = 15$ cm, et l'aire totale du carton vaut 468 cm².