BURHAN

Géométrie dans l'espace

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/cours

Chapitre	Semestre
Géométrie dans l'espace	Semestre 2

Pourquoi un tabouret à trois pieds ne boite jamais

Pose un tabouret à trois pieds sur un sol un peu inégal : il ne boite jamais.

Une table à quatre pieds, posée au même endroit, peut boiter. Il suffit qu'un pied soit un peu trop court.

Pourquoi trois pieds tiennent-ils toujours, et pas quatre ?

Devine : Une prédiction

Pourquoi un tabouret à trois pieds ne boite-t-il jamais ?

A. Ses trois pieds ont forcément la même longueur.

Faux.
Même avec un pied plus court, le tabouret ne boite pas : il penche un peu, c'est tout.

B. Les bouts de trois pieds sont toujours dans un même plan.

Juste.
Juste : trois points non alignés déterminent un plan, celui où le tabouret se pose.

C. Trois pieds portent moins de poids que quatre.

Faux.
Le poids ne joue aucun rôle : une table vide peut boiter aussi.

D. Les bouts de quatre pieds ne sont jamais dans un plan.

Faux.
Ils peuvent l'être : une table bien réglée ne boite pas. Ils ne le sont simplement pas toujours.

Correction

Par trois points non alignés passe un seul plan : les bouts des trois pieds touchent toujours le sol ensemble.

Avec quatre pieds, le quatrième bout n'est pas forcément dans le plan des trois autres.

Ce chapitre donne les règles qui expliquent ces faits.

Dans ce chapitre, tu passes de l'observation à la démonstration.

Tu apprends d'abord à dessiner un solide en perspective et à lire un tel dessin. Tu découvres ensuite les règles de base de l'espace : points, droites et plans.

Tu démontres alors des parallélismes et des orthogonalités, tu construis des sections de solides, et tu calcules des longueurs et des volumes.

Tes outils du collège servent toujours : Pythagore, Thalès, la droite des milieux.

Représenter l'espace : la perspective cavalière

Dessiner un solide en perspective

Rappel du collège. Tu connais le cube, le pavé droit, le prisme droit, la pyramide, le cylindre et le cône, ainsi que leurs patrons.

En clair. Une feuille est plate, un solide ne l'est pas : pour dessiner un cube, on accepte de déformer certaines faces.

Le dessin doit pourtant rester lisible. On doit y retrouver les arêtes parallèles et les milieux.

Devine : Les faces d'un cube dessiné

Sur un dessin en perspective d'un cube, la face de devant est dessinée en vraie grandeur, comme un carré. Comment apparaît la face du dessus ?

A. Comme un carré, identique à la face de devant.

Faux.
Sur le dessin, cette face est vue de biais : ses angles ne restent pas droits.

B. Comme un triangle.

Faux.
La face a quatre sommets, et le dessin les garde tous les quatre.

C. Comme un parallélogramme qui n'est pas un rectangle.

Juste.
Juste : les côtés opposés restent parallèles, mais les angles ne sont plus droits.

D. Comme un trapèze aux côtés obliques non parallèles.

Faux.
Le dessin conserve le parallélisme : les côtés opposés de la face restent parallèles.

Correction
La perspective cavalière conserve le parallélisme : les côtés opposés de la face du dessus restent parallèles.

Elle ne conserve pas les angles des faces qui partent vers l'arrière.

La face du dessus, un carré dans l'espace, devient donc sur le dessin un parallélogramme aux angles non droits.

Méthode : dessiner en perspective cavalière

1. **Trace** la face de devant en vraie grandeur : pour un cube, un carré.
2. **Dessine** les arêtes qui partent vers l'arrière : toutes parallèles, inclinées du même angle (par exemple $45°$), raccourcies de la même façon (par exemple de moitié).
3. **Complète** la face arrière, de même forme que celle de devant.
4. **Repasse** d'un trait plein chaque arête vue ; dessine chaque arête cachée en pointillés.

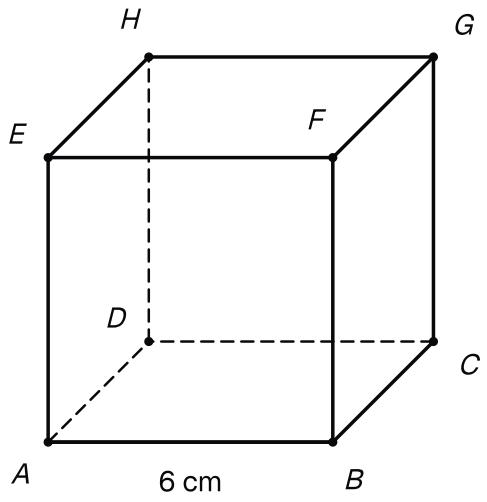
Exemple : dessiner le cube

On nomme toujours le cube $ABCDEFGH$ de la même façon. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Pour le dessin, prends la face $ABFE$ comme face de devant : A en bas à gauche, B en bas à droite. Trace un carré de 6 cm de côté.

Les arêtes $[AD]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[EH]$ partent vers l'arrière, en haut à droite, inclinées de $45°$ par rapport à l'horizontale, avec une longueur de 3 cm.

Fais cette figure sur ton cahier.



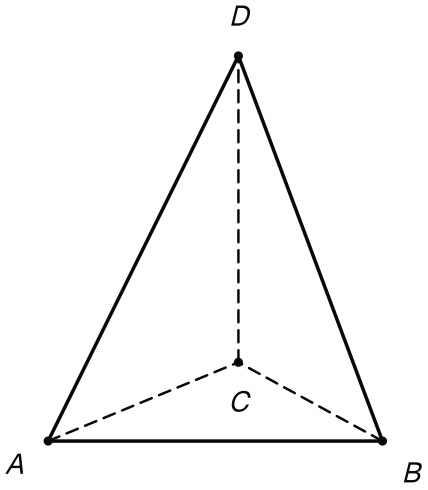
Le cube ABCDEFGH en perspective cavalière : la face ABFE de face, les arêtes fuyantes réduites de moitié.

Lire un dessin

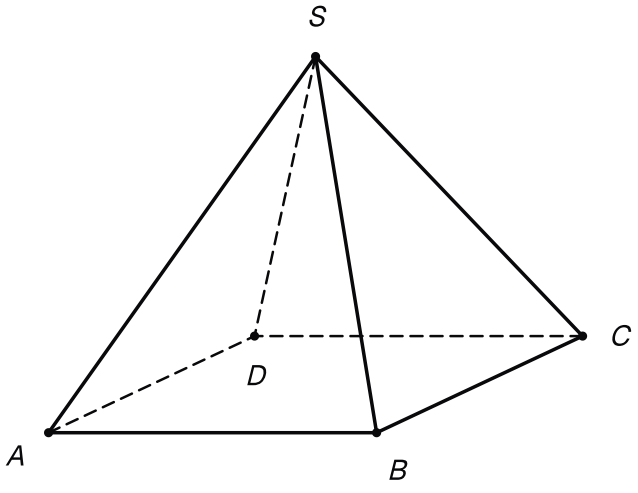
Exemple : un tétraèdre et une pyramide

- Un **tétraèdre** $ABCD$ a quatre faces triangulaires. Dessine la base ABC aplatie : A en bas à gauche, B en bas à droite, C un peu plus haut, au milieu. Place D au-dessus de C, puis relie-le aux trois sommets. Les arêtes cachées par les faces de devant sont en pointillés ; elles dépendent du point de vue.
- Une **pyramide** $SABCD$ a pour sommet S et pour base le quadrilatère $ABCD$. Ici, la base est un **parallélogramme**. Dessine-la aplatie, puis relie S aux quatre sommets.

Fais ces deux figures sur ton cahier.



Le tétraèdre ABCD, sa base ABC aplatie et le sommet D placé au-dessus de C.



La pyramide SABCD, de sommet S et de base le parallélogramme ABCD dessiné aplati.

Attention : ce que garde un dessin

✗ « Sur mon dessin du cube, l'angle $\widehat{DAB}$ n'est pas droit. Donc $ABCD$ n'est pas un carré. »

✓ La face $ABCD$ est un carré dans l'espace. Le dessin en perspective garde le parallélisme et les milieux, pas les angles des faces fuyantes. On ne mesure jamais sur le dessin un angle ni une longueur fuyante.

De même, deux arêtes qui se croisent sur le dessin ne se coupent pas forcément. Sur le dessin du cube, $[DH]$ croise $[EF]$, alors que ces arêtes n'ont aucun point commun.

Vérifie : Arêtes vues, arêtes cachées

Reprends le dessin du cube $ABCDEFGH$ de l'exemple. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. La face de devant est $ABFE$, et les arêtes vers l'arrière partent en haut à droite. Quelles arêtes sont en pointillés ?

A. $[AD]$, $[DC]$ et $[DH]$
Juste.
Juste : ce sont les trois arêtes qui partent du sommet caché D.

B. $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$
Faux.
La face du bas n'est pas entièrement cachée : son arête $[AB]$ est sur la face de devant, vue.

C. $[EH]$, $[HG]$ et $[DH]$
Faux.
La face du haut est vue d'en haut : $[EH]$ et $[HG]$ sont visibles.

D. $[BC]$, $[CD]$ et $[CG]$
Faux.
Ce serait le cas avec des arêtes vers l'arrière en haut à gauche : le sommet caché serait C.

Correction
On voit le cube de devant, un peu d'en haut et de la droite. Les faces cachées sont celle du bas, celle de derrière et celle de gauche.

Leur seul sommet commun est D. Une arête cachée borde deux faces cachées : ce sont les trois arêtes issues de D.

Les arêtes en pointillés sont donc $[AD]$, $[DC]$ et $[DH]$.

Volumes : rappel du collège

Remarque : Rappel du collège : volumes

Les formules du collège sont **admises** dans ce chapitre. On note V un volume.

- Cube d'arête a : $V = a^3$.
- Pavé droit de dimensions L, ℓ, h : $V = L \times \ell \times h$.
- Prisme droit ou cylindre : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.
- Pyramide ou cône : $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Rappel du collège : on mesure la **hauteur** d'une pyramide du sommet jusqu'au plan de sa base, en suivant la perpendiculaire à cette base. Pour un prisme droit, c'est la longueur commune de ses arêtes latérales.

Exemple : un cube et sa pyramide

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

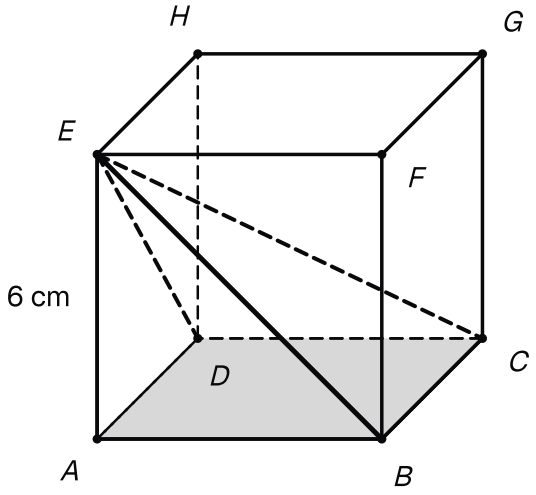
Le cube. Son volume vaut :

$$V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$$

La pyramide $EABCD$. Elle a pour sommet E et pour base le carré $ABCD$, d'aire 36 cm^2. Sa hauteur est l'arête verticale $[AE]$, de longueur 6 cm. D'après la formule des pyramides :

$$V = \frac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$$

C'est le tiers du volume du cube.



La pyramide EABCD dans le cube : sommet E, base le carré ABCD, hauteur l'arête [AE].

Vérifie : Le volume d'un tétraèdre

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Quel est le volume du tétraèdre $EABD$, de sommet E et de base le triangle ABD ?

A. $108\ \text{cm}^3$

Faux.

Tu as oublié le facteur $\dfrac{1}{3}$ de la formule des pyramides.

B. $72\ \text{cm}^3$

Faux.

C'est le volume de la pyramide à base carrée : ici, la base est la moitié du carré.

C. $18\ \text{cm}^3$

Faux.

$18\ \text{cm}^2$ est l'aire de la base, pas le volume.

D. $36\ \text{cm}^3$

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$.

Correction

La base ABD est la moitié du carré $ABCD$: son aire vaut $\dfrac{6 \times 6}{2} = 18\ \text{cm}^2$. La hauteur est encore $AE = 6$ cm.

D'après la formule des pyramides :

$$V = \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36\ \text{cm}^3$$

C'est le sixième du volume du cube.

À toi : Le volume d'un petit tétraèdre

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$. Calcule le volume du tétraèdre $EAMD$, de sommet E et de base le triangle AMD. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la formule du volume d'une pyramide.
Indice 2
Le triangle AMD est rectangle en A, avec $AM = 3$ cm et $AD = 6$ cm ; la hauteur est AE.
Indice 3
Point délicat : l'aire d'un triangle rectangle est la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

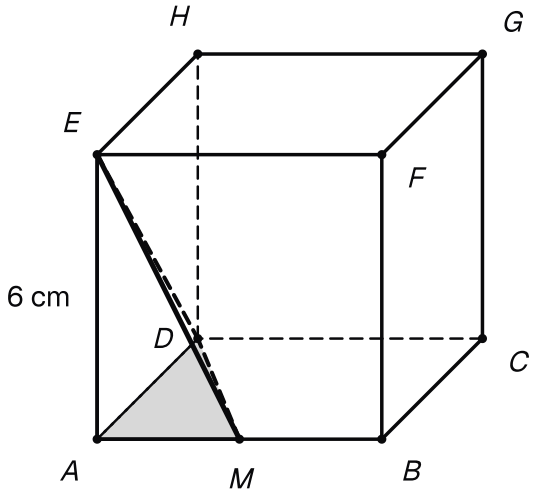
Réponse
L'aire de la base. Le triangle AMD est rectangle en A, angle du carré $ABCD$, avec $AM = 3$ cm et $AD = 6$ cm. Son aire vaut $\dfrac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ cm}^2$.

La hauteur. C'est l'arête verticale $[AE]$, de longueur 6 cm.

Le volume. D'après la formule des pyramides :

$$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 6 = 18 \text{ cm}^3$$

Conclusion. Le tétraèdre $EAMD$ a pour volume 18 cm^3.



Les données : le cube d'arête 6 cm, le milieu M de [AB] et le tétraèdre EAMD à l'intérieur.

Axiomes d'incidence : points, droites et plans de l'espace

Une règle posée sur une table

> **Devine : Une règle sur une table**
>
> Une règle bien droite touche une table plane en deux points distincts de son bord. Combien de points de ce bord touchent la table ?
>
> **A.** Exactement ces deux points.
> **Faux.**
> Entre les deux points de contact, le bord ne peut pas se soulever : il est droit et la table est plane.
>
> **B.** Tous les points de son bord.
> **Juste.**
> Juste : le bord est entièrement posé sur la table.
>
> **C.** Trois points au plus.
> **Faux.**
> Aucune limite de ce genre : le bord touche la table tout du long.
>
> **D.** On ne peut pas le savoir.
> **Faux.**
> On peut conclure : une règle de l'espace, énoncée plus bas, l'affirme.
>
> **Correction**
> La table est plane et le bord de la règle est droit. Dès que deux points du bord touchent la table, tout le bord la touche.
>
> C'est le troisième axiome d'incidence, énoncé plus bas : une droite qui a deux points distincts dans un plan est incluse dans ce plan.

En clair. Le géomètre fait comme toi avec la règle. Il part de quelques faits d'observation, acceptés sans preuve : on les appelle des **axiomes**.

Tout le reste du chapitre se démontre à partir d'eux. Dans chaque plan de l'espace, la géométrie du collège reste vraie.

Notations.

- On écrit $A \in (D)$ pour « le point A appartient à la droite (D) ».
- On écrit $A \notin (P)$ pour « A n'appartient pas au plan (P) ».
- On écrit $(D) \subset (P)$ pour « la droite (D) est incluse dans le plan (P) » : tous ses points sont dans (P).

Les axiomes d'incidence

Propriété : Axiomes d'incidence

On admet les propriétés suivantes, appelées **axiomes d'incidence**.

1. Par deux points distincts A et B de l'espace passe une **seule** droite, notée (AB).
2. Par trois points A, B et C non alignés passe un **seul** plan, noté (ABC).
3. Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan (P), alors la droite (AB) est incluse dans (P) : $(AB) \subset (P)$.
4. Si deux plans distincts ont un point commun, alors leur intersection est une droite qui passe par ce point.

Dans chaque plan de l'espace, tous les résultats de la géométrie plane restent vrais.

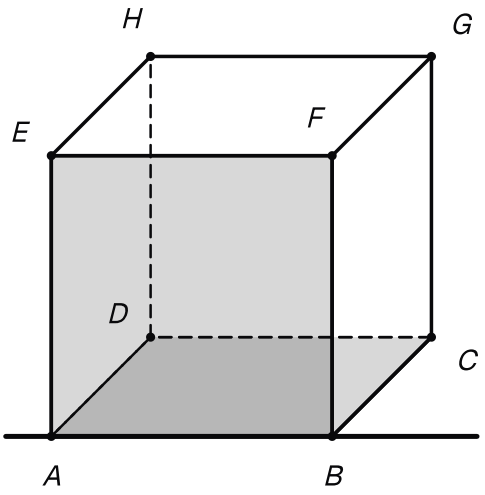
Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Ces axiomes sont le point de départ : on ne les démontre pas.

Exemple : des plans dans le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- A et B sont dans le plan (ABC) de la face du bas. D'après le troisième axiome d'incidence, $(AB) \subset (ABC)$.
- D est aussi dans ce plan : (ABC) et (ABD) désignent le même plan.
- Les plans (ABC) et (ABF) sont distincts, car F est en haut. Ils ont A et B en commun. D'après le quatrième axiome, leur intersection est une droite ; elle contient A et B : c'est (AB).



Les plans (ABC) et (ABF) du cube, distincts, se coupent selon la droite (AB).

Vérifie : Deux faces voisines

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les plans (ABF) et (BCG) sont distincts et ont le point B en commun. Quelle est leur intersection ?

A. Le point B seul.

Faux.

Quand deux plans distincts partagent un point, leur intersection est toute une droite : c'est le quatrième axiome.

B. La droite (AB).

Faux.

A n'est pas dans le plan (BCG) de la face de droite.

C. La droite (BF).

Juste.

Juste : B et F sont sur les deux faces.

D. La droite (BC).

Faux.

C n'est pas dans le plan (ABF) de la face de devant.

Correction

D'après le quatrième axiome d'incidence, l'intersection est une droite qui passe par B.

Le point F est sur la face $ABFE$ et sur la face $BCGF$: il est commun aux deux plans.

L'intersection contient donc B et F, qui sont distincts : d'après le premier axiome, c'est la droite (BF).

Ce qui détermine un plan

Reviens au tabouret : les bouts de ses trois pieds ne sont pas alignés, donc un seul plan passe par eux. La table boite quand le quatrième bout n'est pas dans ce plan.

Un plan peut aussi être donné par une droite et un point, ou par deux droites sécantes.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque fois, on se ramène à trois points non alignés.

Propriété : Détermination d'un plan

Chacune des données suivantes détermine un **unique** plan :

1. trois points non alignés ;
2. une droite (D) et un point A qui n'appartient pas à (D) ;
3. deux droites distinctes qui ont un point commun.

Démonstration

Étape 1. Le cas 1 est le deuxième axiome d'incidence.

Étape 2. Cas 2. Soit B et C deux points distincts de (D) : $(D) = (BC)$ (premier axiome). Comme $A \notin (BC)$, les points A, B, C ne sont pas alignés : un seul plan (P) passe par eux. Il contient B et C, donc (D) (troisième axiome). Tout plan contenant (D) et A contient A, B, C : c'est (P).

Étape 3. Cas 3. Soit I le point commun de (D) et (D'), et $C \in (D')$ distinct de I. Alors $C \notin (D)$, sinon les droites seraient confondues (premier axiome). Le cas 2 donne un unique plan contenant (D) et C ; il contient I et C, donc (D') (troisième axiome). Tout plan contenant les deux droites contient (D) et C : c'est ce plan.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'une donnée détermine un plan, **ramène-la à trois points non alignés**, puis applique le deuxième axiome.

Pour l'unicité, montre que tout plan qui contient la donnée contient ces trois points. Le troisième axiome montre ensuite que ce plan contient les droites données.

La preuve choisit ses points avec soin : deux points distincts de la droite (cas 2), ou un point de la seconde droite, distinct du point commun, ce qui ramène au cas 2 (cas 3).

Vérifie : Un argument de la preuve

Dans la preuve du cas 2, pourquoi les points A, B et C ne sont-ils pas alignés ?

A. Parce que A, B et C sont dans un même plan.

Faux.

Trois points sont toujours dans un même plan : cela ne dit rien de leur alignement.

B. Parce que B et C sont deux points distincts.

Faux.

Deux points distincts ne suffisent pas : A pourrait être sur (BC).

C. Parce que le troisième axiome l'affirme.

Faux.

Le troisième axiome parle d'une droite incluse dans un plan, pas d'alignement.

D. Parce que $A \notin (D)$, alors que B et C sont sur (D).

Juste.

Juste : si A était aligné avec B et C, il serait sur (BC), c'est-à-dire sur (D).

Correction

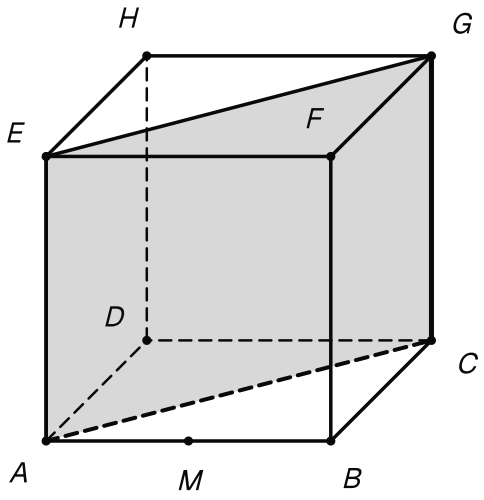
Les points B et C sont distincts et sur (D), donc $(BC) = (D)$, d'après le premier axiome.

Si A était aligné avec B et C, il serait sur (BC), c'est-à-dire sur (D). Or $A \notin (D)$: les trois points ne sont pas alignés.

Exemple : un plan qui traverse le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- Les droites (AC) et (CG) sont distinctes et ont le point C en commun. D'après la détermination d'un plan, elles déterminent un seul plan : le plan (ACG), qui coupe le cube en biais.
- **L'hypothèse compte.** Soit M le milieu de $[AB]$. Les points A, M, B sont alignés. Deux plans distincts les contiennent : (ABC) et (ABF). Trois points alignés ne déterminent pas un plan.



Le plan (ACG) coupe le cube en biais : il contient les droites (AC) et (CG), sécantes en C.

Points coplanaires, puis à toi

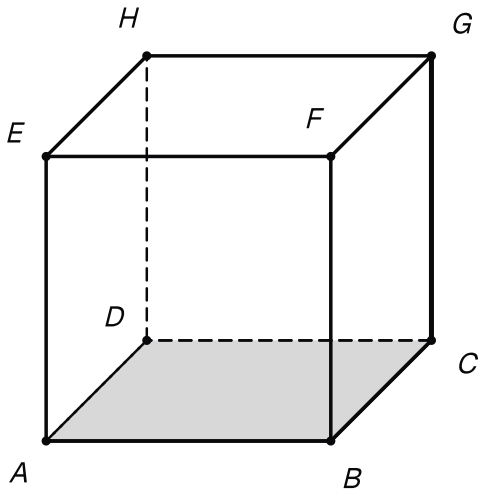
Exemple : Contre-exemple : quatre points sans plan commun

Des points sont **coplanaires** s'ils sont dans un même plan.

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Les points A, B, C déterminent le plan (ABC) de la face du bas. D'après le deuxième axiome, c'est le seul plan qui les contient.

Or G est en haut : il n'est pas dans ce plan. Les points A, B, C et G ne sont donc pas coplanaires. C'est la table qui boite.



Les points A, B et C sont dans le plan de la face du bas ; le point G est au-dessus de ce plan.

Vérifie : Quatre points coplanaires ?

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$ et N celui de $[BC]$. Lesquels de ces quatre points sont coplanaires ?

A. A, C, M et N

Juste.

Juste : ils sont tous sur la face du bas, dans le plan (ABC).

B. A, C, M et G

Faux.

A, C, M déterminent le plan (ABC), qui ne contient pas G.

C. A, C, F et H

Faux.

Le plan (ACF) ne contient pas H : ces quatre points sont les sommets d'un tétraèdre.

D. A, B, D et G

Faux.

A, B, D déterminent le plan de la face du bas, et G est en haut.

Correction

M est sur $[AB]$ et N sur $[BC]$, deux arêtes de la face du bas. D'après le troisième axiome, ces arêtes sont incluses dans le plan (ABC) : M et N y sont, comme A et C. Les quatre points sont coplanaires.

Dans les trois autres cas, trois des points déterminent un plan qui ne contient pas le quatrième.

À toi : Une droite dans une face

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$. Justifie que la droite (MC) est incluse dans le plan (ABC). Détermine ensuite l'intersection des plans (MCG) et (ABC). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise le troisième axiome d'incidence, deux fois.
Indice 2
M est sur la droite (AB), elle-même incluse dans (ABC).
Indice 3
Point délicat : avant d'appliquer le quatrième axiome, vérifie que les deux plans sont distincts.

Réponse
La droite (MC). Les points A et B sont dans (ABC) : d'après le troisième axiome d'incidence, $(AB) \subset (ABC)$, donc $M \in (ABC)$. Les points M et C sont distincts et dans (ABC) : par le même axiome, $(MC) \subset (ABC)$.

Deux plans distincts. Le point G est en haut, donc $G \notin (ABC)$: les plans (MCG) et (ABC) sont distincts. Ils ont en commun M et C.

L'intersection. D'après le quatrième axiome, l'intersection de ces deux plans est une droite. Elle contient M et C : c'est (MC).

Conclusion. La droite (MC) est incluse dans le plan (ABC), et l'intersection des plans (MCG) et (ABC) est la droite (MC).

Positions relatives de deux droites de l'espace

Trois situations

En clair. On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Regarde les arêtes à partir de l'arête $[AB]$.

- Certaines la touchent, comme $[BF]$.
- D'autres ne la touchent pas, mais sont dans une même face qu'elle, comme $[DC]$.
- D'autres encore ne la touchent pas et ne sont dans aucune face commune, comme $[CG]$.

Dans le plan, cette troisième situation n'existe pas.

Devine : Deux arêtes qui ne se touchent pas

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Existe-t-il un plan qui contient les droites (AB) et (CG) ?

A. Oui : le plan de la face du bas.

Faux.
Ce plan contient (AB), mais pas G, qui est en haut.

B. Oui : deux droites sont toujours dans un même plan.

Faux.
C'est vrai dans le plan, mais faux dans l'espace : la suite le montre.

C. Non : aucun plan ne contient ces deux droites.

Juste.
Juste : un tel plan contiendrait A, B et C, donc serait la face du bas.

Correction
Supposons qu'un plan contienne (AB) et (CG). Il contient A, B et C, non alignés : d'après le deuxième axiome, c'est le plan (ABC).

Or G n'est pas dans ce plan. Donc aucun plan ne contient (AB) et (CG).

Définition : Positions relatives de deux droites

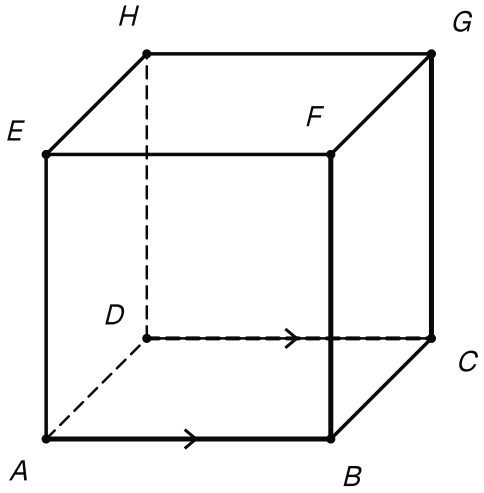
- Deux droites de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un plan qui les contient toutes les deux.
- Deux droites sont **sécantes** si elles ont un seul point commun.
- Deux droites (D) et (D') sont **parallèles** si elles sont coplanaires et si elles sont confondues ou n'ont aucun point commun ; dans ce dernier cas, elles sont **strictement parallèles**. On note $(D) \parallel (D')$.

Dans le cube, et un piège

Exemple : les trois situations dans le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- (AB) et (BF) sont **sécantes** en B.
- (AB) et (DC) sont **strictement parallèles** : ce sont deux côtés opposés du carré $ABCD$, dans le plan de la face du bas.
- (AB) et (CG) ne sont **pas coplanaires** : elles ne sont ni sécantes, ni parallèles.



Trois couples d'arêtes du cube : (AB) et (BF) sécantes, (AB) et (DC) parallèles, (AB) et (CG) non coplanaires.

Attention : sans point commun ne veut pas dire parallèles

✗ « Les droites (AB) et (CG) n'ont aucun point commun, donc elles sont parallèles. »

✓ Dans l'espace, deux droites parallèles doivent aussi être **coplanaires**. Ici, aucun plan ne contient (AB) et (CG) : elles ne sont pas parallèles.

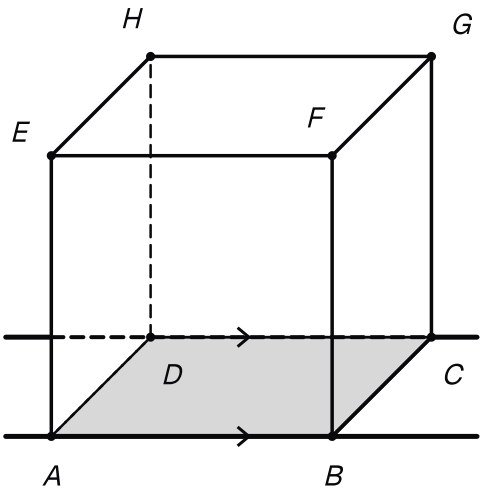
Avant de conclure au parallélisme, cherche un plan qui contient les deux droites.

Deux parallèles déterminent un plan

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Les droites (AB) et (DC) sont strictement parallèles : un plan les contient, celui de la face du bas. En existe-t-il un autre ?

Pourquoi est-ce vrai ? Un point de l'une n'est pas sur l'autre. On se ramène ainsi à une droite et un point extérieur, qui déterminent un plan.



Les droites parallèles (AB) et (DC) dans le plan de la face du bas du cube.

Propriété : Plan défini par deux droites strictement parallèles

Deux droites strictement parallèles déterminent un **unique** plan.

Démonstration

Étape 1. Soit (D) et (D') deux droites strictement parallèles. Par définition du parallélisme, elles sont coplanaires : il existe un plan (P) qui les contient.

Étape 2. Soit A un point de (D'). Les deux droites n'ont aucun point commun, donc $A \notin (D)$. Tout plan qui contient (D) et (D') contient (D) et A. D'après la détermination d'un plan (cas 2), un seul plan contient (D) et A.

Étape 3. Donc (P) est le seul plan qui contient (D) et (D').

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : choisir un point A sur l'une des droites. Comme les droites n'ont aucun point commun, A n'est pas sur l'autre.

Une droite et un point extérieur déterminent un seul plan : c'est la détermination d'un plan. Le parallélisme **strict** sert exactement à cette étape.

Vérifie : Le cas employé

La preuve emploie la détermination d'un plan. Quelle donnée utilise-t-elle ?

A. Trois points non alignés.

Faux.
La preuve ne choisit qu'un seul point, sur la droite (D').

B. Deux droites sécantes.
Faux.
Les droites de l'énoncé n'ont aucun point commun : elles ne sont pas sécantes.

C. Le quatrième axiome d'incidence.
Faux.
Ce n'est pas une donnée qui détermine un plan : cet axiome parle de deux plans.

D. Une droite et un point hors de cette droite.
Juste.
Juste : la droite (D) et un point A de (D'), qui n'est pas sur (D).

Correction
La preuve choisit $A \in (D')$. Les droites n'ont aucun point commun, donc $A \notin (D)$.

D'après la détermination d'un plan, cas 2, un seul plan contient (D) et A. Tout plan qui contient les deux droites est donc ce plan.

Exemple : le parallélisme strict compte

Même cube $ABCDEFGH$ (bas $ABCD$, haut $EFGH$).

- (AB) et (DC) sont strictement parallèles. D'après le plan défini par deux droites strictement parallèles, le seul plan qui les contient est (ABC).
- **L'hypothèse compte.** Soit M le milieu de $[AB]$: les droites (AB) et (AM) sont confondues. Les plans distincts (ABC) et (ABF) contiennent tous deux cette droite. Deux droites confondues ne déterminent pas un plan.

Des parallèles en chaîne

Devine : Des arêtes en chaîne

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On sait que $(EF) \parallel (AB)$, dans le carré $ABFE$, et que $(AB) \parallel (DC)$, dans le carré $ABCD$. Que peux-tu dire des droites (EF) et (DC) ?

A. Elles sont parallèles.
Juste.
Juste : toutes deux sont parallèles à (AB).

B. Elles sont sécantes.
Faux.

(EF) est sur la face du haut, (DC) sur celle du bas : elles ne se rencontrent pas.

C. Elles ne sont pas coplanaires.

Faux.

Le résultat qui suit montre le contraire : elles sont parallèles, donc coplanaires.

D. On ne peut pas le savoir.

Faux.

On peut conclure : deux droites parallèles à une même troisième le sont entre elles.

Correction

Pense aux piliers d'une pièce, qui vont tous dans la même direction : deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Ici, (EF) et (DC) sont toutes deux parallèles à (AB) : elles sont parallèles. C'est le second point du résultat qui suit.

Propriété : Droites parallèles dans l'espace

1. Par un point A de l'espace passe une **seule** droite parallèle à une droite (D) donnée.
2. Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il prolonge à l'espace une propriété des parallèles du plan.

Exemple : des arêtes parallèles en chaîne

Même cube $ABCDEFGH$ (bas $ABCD$, haut $EFGH$).

- $(AE) \parallel (BF)$: côtés opposés du carré $ABFE$. De même, $(BF) \parallel (CG)$ dans le carré $BCGF$.
- D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace, $(AE) \parallel (CG)$.
- Ces droites sont distinctes, donc strictement parallèles. D'après le plan défini par deux droites strictement parallèles, un seul plan les contient. Il contient A, C et G : c'est (ACG). Ce plan contient donc aussi le point E.

À toi : Quatre sommets dans un plan

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Montre que les droites (BF) et (DH) sont parallèles. Déduis-en que les points B, D, F et H sont coplanaires. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Passe par une troisième arête, parallèle aux deux.
Indice 2
(AE) est parallèle à (BF) dans une face, et à (DH) dans une autre.
Indice 3
Point délicat : pour employer le plan défini par deux droites, vérifie que (BF) et (DH) sont **strictement** parallèles.

Réponse
Le parallélisme. Dans le carré $ABFE$, $(BF) \parallel (AE)$. Dans le carré $ADHE$, $(DH) \parallel (AE)$. D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace, $(BF) \parallel (DH)$.

Un parallélisme strict. Le point D n'est pas sur (BF) : les droites sont distinctes, donc strictement parallèles.

Le plan. D'après le plan défini par deux droites strictement parallèles, un seul plan contient (BF) et (DH). Il contient B, D, F et H.

Conclusion. Les droites (BF) et (DH) sont parallèles, et les points B, D, F, H sont coplanaires.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Un crayon et une feuille

En clair. Tiens un crayon près d'une feuille posée sur la table. Il peut être couché sur la feuille, la traverser en un point, ou rester au-dessus sans la toucher.

On note $(D) \cap (P)$ l'ensemble des points communs à (D) et (P), et $\emptyset$ l'ensemble vide.

Pourquoi est-ce vrai ? Tout dépend du nombre de points communs.

Devine : Combien de points communs ?

Combien de points communs une droite et un plan peuvent-ils avoir ?

A. Aucun, un seul ou exactement deux.
Faux.
Avec deux points communs, la droite est incluse dans le plan : elle en a alors une infinité.

B. Toujours exactement un.
Faux.
Un crayon tenu au-dessus de la feuille, sans la toucher, n'a aucun point commun avec elle.

C. Aucun, un seul ou une infinité.

Juste.
Juste : le crayon est au-dessus, il perce la feuille, ou il est couché dessus.

D. Aucun ou une infinité.
Faux.
Un crayon qui perce la feuille la touche en un seul point.

Correction
Trois situations sont possibles :

- le crayon reste au-dessus de la feuille : aucun point commun ;
- il la perce : un seul point commun ;
- il est couché dessus : tous ses points sont communs.

Exactement deux points communs, c'est impossible : la propriété qui suit le démontre.

Trois positions

Propriété : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (D) une droite et (P) un plan. Une et une seule des trois situations suivantes se produit :

- (D) est **incluse** dans (P) ;
- (D) et (P) sont **sécants** : ils ont un seul point commun ;
- (D) et (P) n'ont aucun point commun.

On dit que (D) est **parallèle** à (P), et on note $(D) \parallel (P)$, lorsque $(D) \subset (P)$ ou $(D) \cap (P) = \emptyset$; dans le second cas, (D) est **strictement parallèle** à (P).

Démonstration
Étape 1. Supposons que (D) et (P) aient deux points communs distincts A et B. D'après le premier axiome d'incidence, $(D) = (AB)$; d'après le troisième, $(AB) \subset (P)$. Donc (D) est incluse dans (P).

Étape 2. Sinon, (D) et (P) ont au plus un point commun : ils sont sécants, ou ils n'ont aucun point commun.

Étape 3. Les trois situations s'excluent : une droite incluse dans (P) a une infinité de points communs avec (P), et les deux autres situations en donnent un ou aucun.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le raisonnement compte les points communs. **Deux points communs distincts suffisent** : par le premier, puis le troisième axiome d'incidence, la droite est incluse dans le plan.

Sinon, il y a au plus un point commun. Ce schéma de **disjonction des cas** revient dans tout le chapitre.

Vérifie : Les axiomes de la preuve

Dans la preuve, quels axiomes montrent qu'une droite qui a deux points communs avec un plan y est incluse ?

A. Le premier, puis le troisième axiome d'incidence.

Juste.
Juste : le premier donne $(D) = (AB)$, le troisième $(AB) \subset (P)$.

B. Le deuxième, puis le quatrième axiome d'incidence.

Faux.
Ces axiomes parlent de trois points et de deux plans : aucun ne sert ici.

C. Le quatrième axiome d'incidence seul.

Faux.
Le quatrième parle de l'intersection de deux plans, pas d'une droite et d'un plan.

D. La détermination d'un plan.

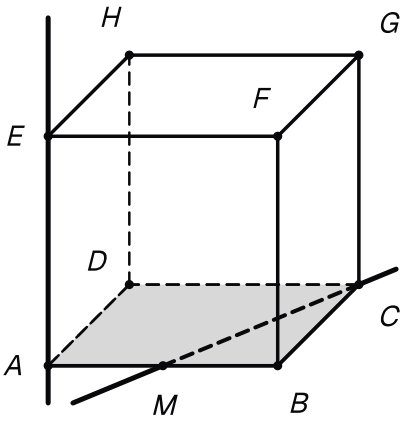
Faux.
Le plan est déjà donné : on n'a pas à le construire.

Correction
Soit A et B deux points communs distincts. D'après le premier axiome, une seule droite passe par A et B : $(D) = (AB)$. D'après le troisième, $(AB) \subset (P)$. Donc $(D) \subset (P)$.

Exemple : deux positions dans le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$.

- M et C sont dans le plan (ABC) : la droite (MC) y est incluse.
- E est en haut, donc (AE) n'est pas incluse dans (ABC). D'après les positions relatives d'une droite et d'un plan, elle a au plus un point commun avec (ABC) : c'est A. Ils sont sécants : $(AE) \cap (ABC) = \{A\}$.



La droite (MC) est incluse dans le plan (ABC) ; la droite (AE) le coupe au seul point A.

Le critère de parallélisme

Devine : Un crayon au-dessus d'un trait

Trace un trait sur une feuille posée sur la table. Tiens un crayon au-dessus de la feuille, parallèle à ce trait, sans le poser. Prolongé dans les deux sens, peut-il percer le plan de la feuille ?

A. Oui, s'il est assez long.

Faux.

Le crayon garde la direction du trait : il ne descend jamais vers la feuille.

B. Non, jamais.

Juste.

Juste : parallèle à un trait de la feuille, il ne la perce jamais.

C. Oui : il finit par se poser sur la feuille.

Faux.

Il est tenu au-dessus, sans être posé : il ne touche pas la feuille.

D. On ne peut pas le savoir sans mesurer.

Faux.

Aucune mesure n'est utile : la propriété qui suit le démontre.

Correction

Le crayon ne perce jamais la feuille.

Pourquoi est-ce vrai ? S'il la perçait, le point de contact serait dans deux plans : celui de la feuille, et celui du crayon et du trait. Il serait donc sur le trait.

C'est impossible : le crayon et le trait n'ont aucun point commun.

Propriété : Critère de parallélisme d'une droite et d'un plan

Si une droite (D) est parallèle à une droite (Δ) incluse dans un plan (P), alors (D) est parallèle à (P).

Démonstration

Étape 1. Si $(D) \subset (P)$, alors $(D) \parallel (P)$ par définition. Supposons (D) non incluse dans (P). Alors $(D) \neq (\Delta)$, donc (D) et (Δ) sont strictement parallèles. Elles déterminent un plan (Q) (plan défini par deux droites strictement parallèles), distinct de (P) car $(D) \subset (Q)$.

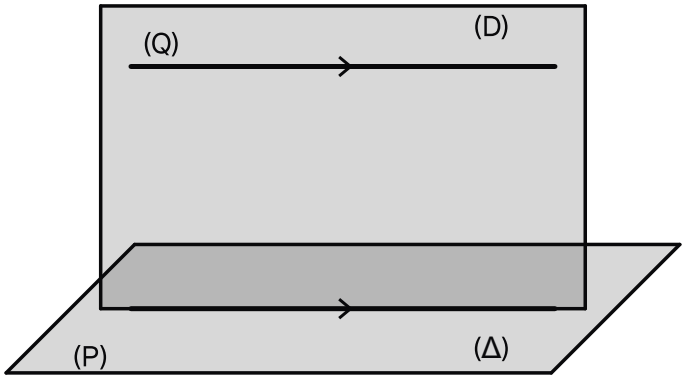
Étape 2. Supposons par l'absurde que (D) coupe (P) en un point M. Alors $M \in (P) \cap (Q)$. Les plans distincts (P) et (Q) contiennent (Δ) : d'après le quatrième axiome d'incidence, leur intersection est une droite, qui contient (Δ), donc égale à (Δ). Ainsi $M \in (\Delta)$: M est commun à (D) et (Δ), ce qui contredit leur parallélisme strict.

Étape 3. Donc $(D) \cap (P) = \emptyset$, et $(D) \parallel (P)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, **cherche une droite du plan qui lui est parallèle**.

La preuve raisonne par l'absurde. Un point commun serait dans les deux plans (P) et (Q), donc sur leur intersection (Δ) : c'est le quatrième axiome qui fait ce travail.



Le plan (P) contient la droite (Δ) ; la droite (D), parallèle à (Δ), est hors de (P) ; (Q) est le plan de ces deux droites.

Vérifie : Le point commun impossible

Dans la preuve, pourquoi le point M serait-il sur la droite (Δ) ?

A. Parce que (D) et (Δ) sont parallèles.

Faux.

Le parallélisme sert à la fin, pour obtenir une contradiction.

B. Parce que l'intersection de (P) et (Q) est (Δ).

Juste.

Juste : M est dans les deux plans, donc sur leur intersection.

C. Parce que M est sur la droite (D).

Faux.

Être sur (D) ne place pas M sur (Δ) : il faut les deux plans.

D. Parce que M est dans le plan (P).

Faux.

Le plan (P) contient bien d'autres points que ceux de (Δ).

Correction

Le point M est sur (D), donc dans (Q) ; il est aussi dans (P).

Les plans distincts (P) et (Q) contiennent (Δ). D'après le quatrième axiome, leur intersection est exactement (Δ).

Donc $M \in (\Delta)$, ce qui contredit le parallélisme strict de (D) et (Δ).

Exemple : une arête parallèle à une face

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- $(EF) \parallel (AB)$, côtés opposés du carré $ABFE$, et $(AB) \subset (ABC)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(EF) \parallel (ABC)$.
- **L'hypothèse compte.** (CG) n'a aucun point commun avec (AB), droite de (ABC). Pourtant (CG) coupe (ABC) en C. Il faut une droite du plan **parallèle** à la droite donnée, pas seulement sans point commun.

La méthode et un piège

Méthode : montrer qu'une droite est parallèle à un plan

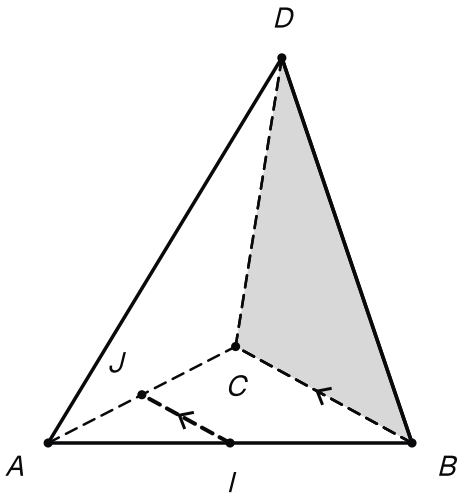
1. **Cherche** dans le plan une droite parallèle à la droite donnée : côtés opposés d'un parallélogramme, droite des milieux, arêtes parallèles.
2. **Justifie** ce parallélisme dans un plan qui contient les deux droites, avec la géométrie du collège.
3. **Vérifie** que la droite choisie est bien incluse dans le plan.
4. **Conclus** en citant le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.

Exemple : la droite des milieux dans un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$. Fais la figure sur ton cahier.

Rappel du collège : dans un triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

- Dans le triangle ABC, on a donc $(IJ) \parallel (BC)$, et $IJ = \dfrac{1}{2}BC$.
- Or $(BC) \subset (BCD)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(IJ) \parallel (BCD)$.



Dans le tétraèdre ABCD, la droite des milieux (IJ) est parallèle à (BC), donc au plan (BCD).

Attention : parallèles à un même plan

✗ « Dans le cube $ABCDEFGH$, (EF) et (EH) sont parallèles au plan (ABC), donc elles sont parallèles entre elles. »

✓ Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les droites (EF) et (EH) sont sécantes en E : elles ne sont pas parallèles.

Deux droites parallèles à un même **plan** ne sont pas forcément parallèles. Deux droites parallèles à une même **droite**, elles, le sont.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une droite parallèle à un plan diagonal

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$ et N celui de $[BC]$. Montre que (MN) est parallèle au plan (ACG). Est-elle incluse dans ce plan ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : cherche une droite de (ACG) parallèle à (MN).
Indice 2
Dans le triangle ABC, pense à la droite des milieux.
Indice 3
Point délicat : pour l'inclusion, suppose $M \in (ACG)$; ce plan contiendrait alors (AM), donc B.

Réponse

Une droite du plan parallèle à (MN). Dans le triangle ABC, M et N sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. D'après la droite des milieux, $(MN) \parallel (AC)$.

Le critère. Or $(AC) \subset (ACG)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(MN) \parallel (ACG)$.

L'inclusion. Si M était dans (ACG), ce plan contiendrait A et M, donc la droite (AB) et le point B. Il contiendrait A, B, C : ce serait (ABC), qui ne contient pas G. Donc $M \notin (ACG)$.

Conclusion. La droite (MN) est parallèle au plan (ACG) sans y être incluse : elle lui est strictement parallèle.

Remarque : Coin devoir : rédiger un parallélisme

En devoir, chaque étape cite sa justification. Pour le tétraèdre de l'exemple, écris :

« Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. D'après la droite des milieux, $(IJ) \parallel (BC)$. Or $(BC) \subset (BCD)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(IJ) \parallel (BCD)$. »

Vérifie toujours que la droite choisie est **incluse** dans le plan.

Positions relatives de deux plans

Le sol, le plafond, un mur

Devine : Un seul point commun ?

Deux plans distincts peuvent-ils avoir exactement un point commun ?

A. Oui, comme deux feuilles qui se touchent par un coin.

Faux.
Une feuille n'est qu'un morceau de plan : les plans entiers, prolongés, se coupent selon une droite.

B. Non : ils ont alors toute une droite en commun.

Juste.
Juste : c'est le quatrième axiome d'incidence.

C. Oui, quand les deux plans sont parallèles.

Faux.
Deux plans strictement parallèles n'ont aucun point commun.

Correction
D'après le quatrième axiome d'incidence, l'intersection de deux plans distincts ayant un point commun est une droite passant par ce point. Ils ont donc une infinité de points communs, jamais un seul.

> Un plan est illimité : une feuille n'en est qu'un morceau.

En clair. Dans une pièce, le sol et le plafond n'ont aucun point commun. Le sol et un mur se coupent le long d'une droite : le bas du mur. Deux plans peuvent aussi être confondus.

Pourquoi est-ce vrai ? Ces trois situations sont les seules possibles : le quatrième axiome écarte toutes les autres.

Trois positions

Propriété : Positions relatives de deux plans

Soit (P) et (Q) deux plans. Une et une seule des trois situations suivantes se produit :

- (P) et (Q) sont **confondus** ;
- (P) et (Q) sont **sécants** : leur intersection est une droite ;
- (P) et (Q) n'ont aucun point commun.

On dit que (P) et (Q) sont **parallèles**, et on note $(P) \parallel (Q)$, lorsqu'ils sont confondus ou n'ont aucun point commun ; dans le second cas, ils sont **strictement parallèles**.

Démonstration

Étape 1. Si (P) et (Q) sont distincts et ont un point commun, leur intersection est une droite, d'après le quatrième axiome d'incidence : ils sont sécants.

Étape 2. Sinon, ou bien ils sont confondus, ou bien ils sont distincts et n'ont aucun point commun.

Étape 3. Les situations s'excluent : l'intersection de deux plans confondus est un plan, qui contient trois points non alignés, alors qu'une droite n'en contient pas ; deux plans confondus ou sécants ont des points communs, ce qui exclut la troisième situation.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Même schéma que pour une droite et un plan : une **disjonction des cas**. Si les plans sont distincts et ont un point commun, le quatrième axiome donne une droite. Sinon, ils sont confondus ou sans point commun.
>
> Pour l'exclusion, on compare ce que contient l'intersection : un plan contient trois points non alignés, une droite non.

> **Vérifie : Pourquoi les cas s'excluent**
>
> Dans la preuve, pourquoi deux plans confondus ne sont-ils pas sécants ?

A. Parce qu'ils n'ont aucun point commun.

Faux.

Deux plans confondus ont tous leurs points en commun.

B. Leur intersection contient trois points non alignés.

Juste.

Juste : une droite ne contient jamais trois points non alignés.

C. Parce que le quatrième axiome l'interdit.

Faux.

Le quatrième axiome suppose les plans distincts : il ne dit rien des plans confondus.

D. Parce qu'ils n'ont qu'un point commun.

Faux.

Deux plans n'ont jamais un seul point commun.

Correction

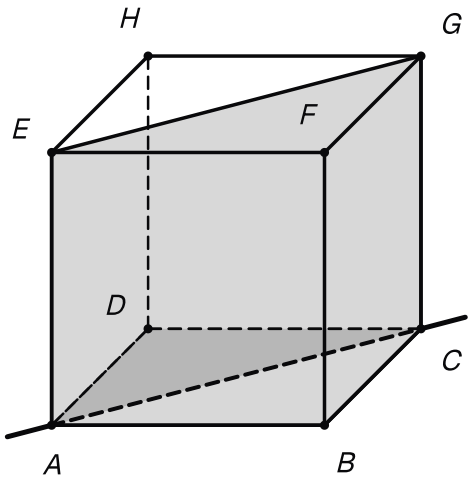
Si (P) et (Q) sont confondus, leur intersection est le plan (P) tout entier. Ce plan contient trois points non alignés.

Une droite n'en contient pas : l'intersection n'est donc pas une droite, et les plans ne sont pas sécants.

Exemple : des plans dans le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- (ABC) et (ACG) sont distincts et ont A et C en commun : ils sont sécants selon (AC).
- **L'hypothèse compte.** (ABC) et (BCD) ont en commun B, C et D. Ces trois points ne sont pas alignés : les deux plans sont confondus, pas sécants. Le quatrième axiome ne s'applique qu'à des plans **distincts**.



Les plans (ABC) et (ACG) du cube sont sécants selon la droite (AC).

Le critère des plans parallèles

Devine : Un plan qui ne penche pas

Un plan contient une droite parallèle au sol. Que faut-il de plus pour être sûr que ce plan est parallèle au sol ?

A. Rien de plus : une droite suffit.

Faux.

Un pan de toit contient sa gouttière, parallèle au sol, et pourtant il penche.

B. Une seconde droite, parallèle à la première.

Faux.

Deux droites parallèles ont la même direction : le plan peut encore pencher autour d'elles.

C. Une seconde droite sécante, elle aussi parallèle au sol.

Juste.

Juste : c'est le critère de parallélisme de deux plans.

D. Un point du plan situé au-dessus du sol.

Faux.

Un plan penché a, lui aussi, des points au-dessus du sol.

Correction

Une seule droite parallèle au sol ne suffit pas : un pan de toit en contient une, sa gouttière, et il penche.

Avec deux droites sécantes parallèles au sol, le plan ne peut plus pencher. C'est le critère qui suit.

Propriété : Critère de parallélisme de deux plans

1. Si un plan (P) contient deux droites **sécantes** qui sont toutes deux parallèles à un plan (Q), alors les plans (P) et (Q) sont parallèles.
2. Par un point A de l'espace passe un **seul** plan parallèle à un plan (Q) donné.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. On s'en sert comme d'une règle de travail.

Exemple : les faces du haut et du bas

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- $(EF) \parallel (AB)$ et $(AB) \subset (ABC)$: d'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(EF) \parallel (ABC)$. De même, $(EH) \parallel (AD)$ donne $(EH) \parallel (ABC)$.
- (EF) et (EH) sont sécantes en E et incluses dans (EFG). D'après le critère de parallélisme de deux plans, $(EFG) \parallel (ABC)$.
- E n'est pas dans (ABC) : ces plans sont strictement parallèles.

Un plan coupe deux plans parallèles

Devine : Les traces d'une cloison

Une cloison plane traverse une pièce. Elle coupe le sol selon une droite, et le plafond selon une autre. Comment sont ces deux traces ?

A. Sécantes, si la cloison est penchée.

Faux.
Les traces sont sur le sol et sur le plafond, qui n'ont aucun point commun : elles ne se rencontrent jamais.

B. Non coplanaires.

Faux.
Elles sont toutes deux dans le plan de la cloison.

C. Parallèles, même si la cloison est penchée.

Juste.
Juste : coplanaires et sans point commun.

D. Perpendiculaires.

Faux.
Deux droites perpendiculaires se coupent ; ces traces ne se coupent pas.

Correction
Les deux traces sont parallèles.

Pourquoi est-ce vrai ? Elles sont dans le plan de la cloison, donc coplanaires. Elles ne peuvent pas se rencontrer : le sol et le plafond n'ont aucun point commun.

Propriété : Plan coupant deux plans parallèles

Soit (P) et (Q) deux plans strictement parallèles, et (R) un plan qui coupe (P) selon une droite (D) et (Q) selon une droite (D'). Alors les droites (D) et (D') sont parallèles.

Démonstration

Étape 1. Les droites (D) et (D') sont toutes deux incluses dans (R) : elles sont coplanaires.

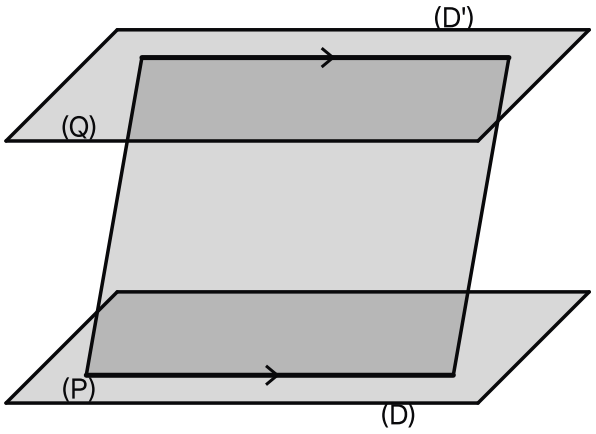
Étape 2. Un point commun à (D) et (D') appartiendrait à (P), car $(D) \subset (P)$, et à (Q), car $(D') \subset (Q)$. Or $(P) \cap (Q) = \emptyset$. Donc (D) et (D') n'ont aucun point commun.

Étape 3. Coplanaires et sans point commun, les droites (D) et (D') sont strictement parallèles, par définition du parallélisme.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux conditions font deux droites parallèles : être **coplanaires**, et n'avoir **aucun point commun**. La preuve vérifie les deux.

- Le plan (R) donne la première.
- La seconde vient de $(P) \cap (Q) = \emptyset$: un point commun aux traces serait commun aux deux plans.



Les plans parallèles (P) et (Q) sont coupés par le plan (R) selon deux droites parallèles (D) et (D').

Vérifie : L'argument central

Dans la preuve, pourquoi (D) et (D') n'ont-elles aucun point commun ?

A. Parce qu'elles sont toutes deux incluses dans (R).

Faux.

Être dans (R) les rend coplanaires, sans empêcher un point commun.

B. Parce qu'elles sont parallèles par hypothèse.

Faux.

C'est la conclusion à démontrer : on ne peut pas la supposer.

C. Parce que (R) est parallèle à (P).

Faux.

(R) coupe (P) : il ne lui est pas parallèle.

D. Un tel point serait commun à (P) et à (Q).

Juste.

Juste : or $(P) \cap (Q) = \emptyset$.

Correction

Un point commun à (D) et (D') serait dans (P), car $(D) \subset (P)$, et dans (Q), car $(D') \subset (Q)$.

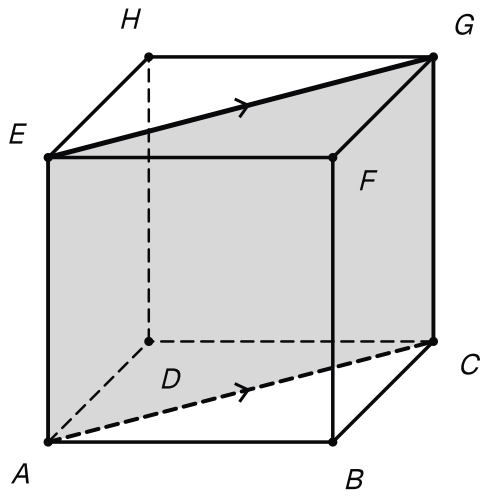
Or (P) et (Q) sont strictement parallèles : $(P) \cap (Q) = \emptyset$. Un tel point n'existe donc pas.

Des traces parallèles, puis à toi

Exemple : deux traces parallèles dans le cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.

- Le plan (ACG) contient E. Il coupe (ABC) selon (AC) et (EFG) selon (EG). D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, $(AC) \parallel (EG)$.
- **L'hypothèse compte.** (ACG) coupe aussi (BCG) selon (CG). Or (AC) et (CG) sont sécantes en C : les plans (ABC) et (BCG) ne sont pas parallèles.



Le plan (ACG) coupe les faces du bas et du haut du cube selon (AC) et (EG), parallèles.

À toi : Une trace sur la face du haut

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M et N les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. Le plan (MNF) coupe le plan (EFG) selon une droite (Δ) qui passe par F. Montre que $(\Delta) \parallel (MN)$, puis que $(\Delta) \parallel (EG)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles : sers-t'en.
Indice 2
Le plan (MNF) coupe (ABC) selon (MN). Pour la suite, pense à la droite des milieux, puis à $(AC) \parallel (EG)$.
Indice 3
Point délicat : pour conclure $(\Delta) \parallel (EG)$, passe par une même troisième droite, (AC).

Réponse

La trace sur (ABC). F n'est pas dans (ABC) : les plans (MNF) et (ABC) sont distincts, et ils ont M et N en commun. D'après le quatrième axiome d'incidence, leur intersection est la droite (MN).

Le parallélisme avec (MN). Le plan (MNF) coupe les plans strictement parallèles (ABC) et (EFG), selon (MN) et selon (Δ). D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, $(\Delta) \parallel (MN)$.

Le parallélisme avec (EG). Dans le triangle ABC, la droite des milieux donne $(MN) \parallel (AC)$. D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace, $(\Delta) \parallel (AC)$. Comme $(AC) \parallel (EG)$, d'après l'exemple, la même propriété donne $(\Delta) \parallel (EG)$.

Conclusion. La droite (Δ) est parallèle à (MN) et à (EG).

Intersections de plans et sections planes

Le faîte d'un toit

Devine : Le faîte d'un toit

Les deux pans d'un toit sont deux plans qui se coupent selon le faîte. Le bord bas de chaque pan est une gouttière, et les deux gouttières sont parallèles. Comment est le faîte ?

A. Parallèle aux deux gouttières.

Juste.
Juste : c'est le théorème du toit, énoncé juste après.

B. Perpendiculaire aux deux gouttières.

Faux.
Le faîte court le long du toit, dans le même sens que les gouttières.

C. Il coupe chacune des deux gouttières.

Faux.
Dans un pan, le faîte et la gouttière ne se rencontrent jamais.

D. On ne peut rien dire sans mesurer.

Faux.
Aucune mesure n'est utile : le parallélisme se démontre.

Correction
Chaque gouttière est dans un pan, et elles sont parallèles. Le théorème du toit affirme alors que la droite commune aux deux pans, le faîte, est parallèle aux deux gouttières.

En clair. Le faîte est l'intersection de deux plans. Chaque pan contient une gouttière, et ces gouttières sont parallèles.

Pourquoi est-ce vrai ? Une gouttière est parallèle à l'autre pan, d'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan. Elle ne peut donc pas rencontrer le faîte, qui est dans cet autre pan, sauf à être le faîte lui-même.

Or gouttière et faîte sont dans un même pan : ils sont parallèles.

Le théorème du toit

Théorème : Théorème du toit

Soit (P) et (Q) deux plans sécants selon une droite (Δ). Si une droite (D) incluse dans (P) et une droite (D') incluse dans (Q) sont parallèles, alors (Δ) est parallèle à (D) et à (D').

Démonstration

Étape 1. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, (D) est parallèle à (Q), car elle est parallèle à (D'), incluse dans (Q).

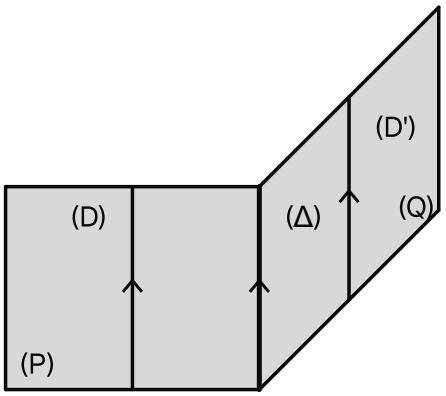
Étape 2. Si $(D) \subset (Q)$, alors (D) est incluse dans $(P) \cap (Q) = (\Delta)$, donc $(D) = (\Delta)$. Sinon, $(D) \cap (Q) = \emptyset$; comme $(\Delta) \subset (Q)$, les droites (D) et (Δ) n'ont aucun point commun. Elles sont incluses dans (P), donc coplanaires : elles sont strictement parallèles. Dans les deux cas, $(\Delta) \parallel (D)$.

Étape 3. Les droites (Δ) et (D') sont parallèles à la même droite (D) : elles sont parallèles entre elles (droites parallèles dans l'espace).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve enchaîne trois énoncés vus avant : le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, la définition du parallélisme, puis la propriété des droites parallèles dans l'espace, admise. Elle sépare deux cas : (D) incluse dans (Q), ou non.

Retiens le geste. Pour trouver la **direction** d'une intersection, cherche deux droites parallèles, une dans chaque plan.



Le théorème du toit : deux plans sécants (P) et (Q), et deux droites parallèles (D) et (D'), une dans chaque plan ; leur intersection (Δ) leur est parallèle.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve, quel énoncé donne d'abord $(D) \parallel (Q)$?

A. Le critère de parallélisme de deux plans.

Faux.

Aucun plan parallèle n'intervient : les plans (P) et (Q) sont sécants.

B. La propriété du plan coupant deux plans parallèles.

Faux.

Les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles : ils se coupent selon (Δ).

C. Le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.

Juste.

Juste : (D) est parallèle à (D'), incluse dans (Q).

D. La détermination d'un plan.

Faux.

On ne construit aucun plan nouveau dans cette preuve.

Correction

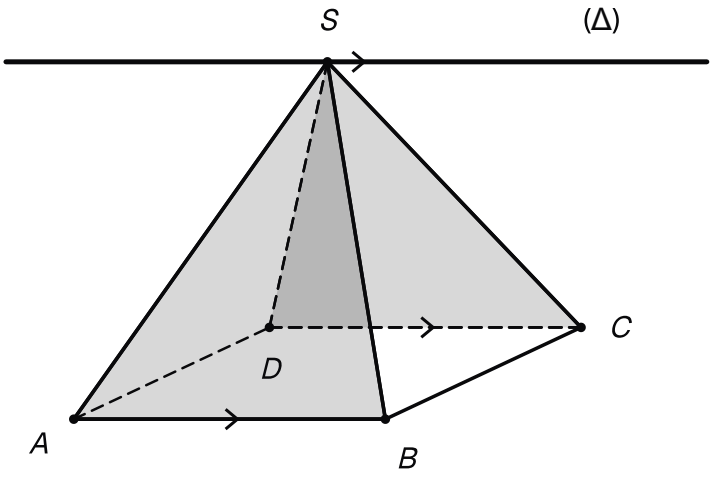
La droite (D) est parallèle à (D'), et $(D') \subset (Q)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, $(D) \parallel (Q)$.

La suite de la preuve en déduit que (D) ne rencontre pas (Δ), sauf si elle lui est égale.

Exemple : une intersection dans une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Fais la figure sur ton cahier.

- Les plans (SAB) et (SDC) sont distincts et ont S en commun : ils sont sécants selon une droite (Δ) qui passe par S.
- $(AB) \subset (SAB)$, $(DC) \subset (SDC)$, et $(AB) \parallel (DC)$, côtés opposés du parallélogramme.
- D'après le théorème du toit, (Δ) est la parallèle à (AB) menée par S.
- **L'hypothèse compte :** le théorème exige des plans sécants. Il faut d'abord un point commun, ici S.



Dans la pyramide SABCD, les plans (SAB) et (SDC) se coupent selon la parallèle (Δ) à (AB) menée par S.

L'intersection de deux plans

Méthode : déterminer l'intersection de deux plans

1. **Cherche** deux points communs aux deux plans. Pense au point de rencontre de deux droites coplanaires : l'une dans le premier plan, l'autre dans le second.
2. **Conclus** : l'intersection est la droite qui passe par ces deux points.
3. **À défaut**, trouve un point commun, puis deux droites parallèles, une dans chaque plan. Le théorème du toit donne alors la direction de l'intersection.

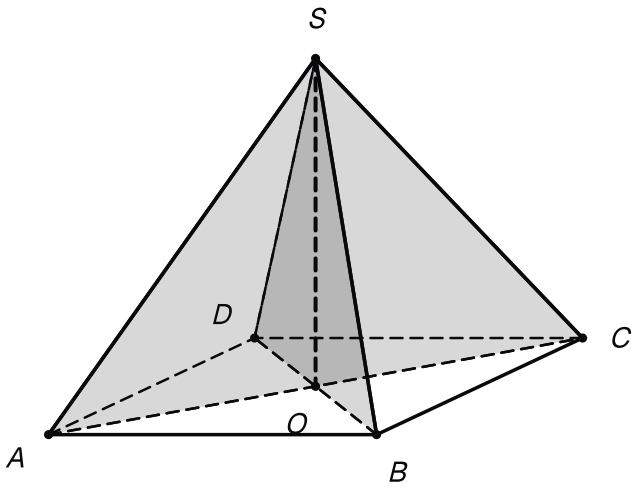
Exemple : deux plans diagonaux de la pyramide

On reprend la pyramide $SABCD$ à base parallélogramme. Soit O le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

Rappel du collège : les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu, et ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

- S est commun aux plans (SAC) et (SBD).
- O est sur (AC), incluse dans (SAC), et sur (BD), incluse dans (SBD) : il est commun aux deux plans.
- Les deux plans sont distincts : si B était dans (SAC), ce plan contiendrait A, B, C ; ce serait le plan de la base, qui ne contient pas S.

D'après le quatrième axiome d'incidence, l'intersection des plans (SAC) et (SBD) est donc la droite (SO).



Les plans diagonaux (SAC) et (SBD) de la pyramide se coupent selon la droite (SO).

Sections planes

Méthode : construire la section d'un solide

1. **Relie** deux points du plan de coupe situés sur une même face : tu obtiens un côté de la section.
2. **Sur deux faces parallèles**, trace des côtés parallèles : c'est la propriété du plan coupant deux plans parallèles.
3. **Prolonge**, si besoin, un côté et une arête d'une même face : tu obtiens ainsi un autre point qui appartient au plan de coupe.

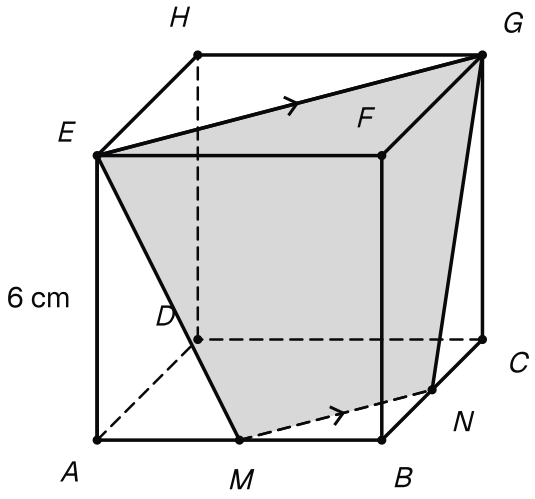
4. **Recommence** jusqu'à fermer le polygone, puis donne sa nature.

Exemple : la section d'un cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M et N les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. On coupe le cube par le plan (EMN). Fais la figure sur ton cahier.

- $[MN]$ est un côté, dans la face du bas.
- La face du haut est parallèle à celle du bas : d'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, le côté qui passe par E est parallèle à (MN). Or $(MN) \parallel (AC)$ et $(AC) \parallel (EG)$: ce côté est $[EG]$.
- On ferme avec $[EM]$ dans la face de devant, et $[NG]$ dans celle de droite.

La section est le trapèze $EMNG$, de bases $MN = 3\sqrt{2}$ cm et $EG = 6\sqrt{2}$ cm.



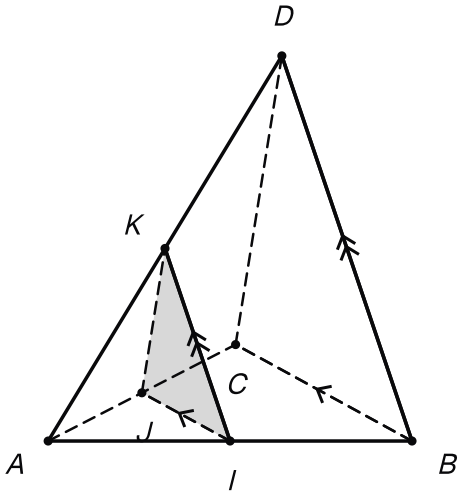
La section du cube par le plan (EMN) : le trapèze EMNG, de bases [MN] et [EG] parallèles.

Exemple : la section d'un tétraèdre

Soit $ABCD$ un tétraèdre, et I, J, K les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$. On coupe par le plan (IJK).

- D'après la droite des milieux, $(IJ) \parallel (BC)$ et $(IK) \parallel (BD)$. D'après le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan, ces droites sont parallèles au plan (BCD).
- Elles sont sécantes en I. D'après le critère de parallélisme de deux plans, $(IJK) \parallel (BCD)$.

- La section est le triangle IJK. Ses côtés sont parallèles à ceux de BCD et mesurent leur moitié.



La section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK) : le triangle IJK, aux côtés parallèles à ceux de BCD.

Vérifie : La nature d'une section

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M et N les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. Quelle est la section du cube par le plan (MNF) ?

A. Un triangle équilatéral.

Faux.

$MN = 3\sqrt{2}$ cm, mais $MF = 3\sqrt{5}$ cm : les côtés ne sont pas tous égaux.

B. Un triangle isocèle en F.

Juste.

Juste : $MF = NF = 3\sqrt{5}$ cm.

C. Un trapèze.

Faux.

Le plan ne coupe que les trois faces qui se touchent en B : la section a trois côtés.

D. Un rectangle.

Faux.

Le plan ne rencontre la face du haut qu'en F : il n'y a pas de quatrième sommet.

Correction

M et N sont dans la face du bas, M et F dans celle de devant, N et F dans celle de droite : la section est le triangle MNF.

Le triangle MBF est rectangle en B, angle du carré $ABFE$. **Rappel du collège :** dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés. Le théorème de Pythagore donne :

$$MF^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

De même, $NF^2 = 45$. Donc $MF = NF = 3\sqrt{5}$ cm, alors que $MN = 3\sqrt{2}$ cm : le triangle MNF est isocèle en F.

Logiciel, à toi, coin devoir

Pour voir une section sous tous ses angles, un logiciel de géométrie dans l'espace aide beaucoup : tu fais tourner le solide et tu observes la coupe.

Il confirme une figure, mais il ne remplace pas la justification. Sur ton cahier, chaque côté de la section se justifie par une propriété.

À toi : La section d'une pyramide

Soit $SABCD$ une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On note U le milieu de $[SA]$ et W celui de $[SB]$. Montre que le plan (UWC) contient D, puis donne la section de la pyramide par ce plan. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

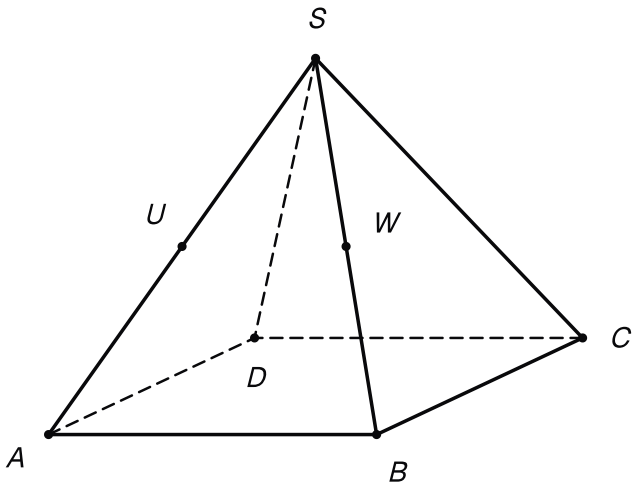
Indice 1
Dans le triangle SAB, applique la droite des milieux.
Indice 2
Compare (UW) et (DC) en passant par (AB), puis emploie le plan défini par deux droites strictement parallèles.
Indice 3
Point délicat : vérifie que (UW) et (DC) sont distinctes ; U n'est pas dans le plan de la base.

Réponse
Le parallélisme. Dans le triangle SAB, la droite des milieux donne $(UW) \parallel (AB)$ et $UW = \frac{1}{2}AB$. Dans le parallélogramme $ABCD$, $(AB) \parallel (DC)$. D'après la propriété des droites parallèles dans l'espace, $(UW) \parallel (DC)$.

Le plan (UWC). U n'est pas dans la base, donc $(UW) \neq (DC)$: ces droites sont strictement parallèles. D'après le plan défini par deux droites strictement parallèles, elles déterminent un plan. Il contient U, W et C : c'est (UWC). Il contient donc D.

La section. Le plan (UWC) coupe les faces SAB, SBC, $ABCD$ et SAD selon $[UW]$, $[WC]$, $[CD]$ et $[DU]$.

Conclusion. Le plan (UWC) contient D, et la section est le trapèze $UWCD$, de bases $[UW]$ et $[DC]$, avec $UW = \frac{1}{2}DC$.



Les données : la pyramide SABCD, U milieu de [SA] et W milieu de [SB].

Remarque : Coin devoir : justifier un côté de section

En devoir, chaque côté d'une section se justifie. Pour le cube de l'exemple, écris :

« Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles. Le plan (EMN) les coupe selon (MN) et selon une droite passant par E. D'après la propriété du plan coupant deux plans parallèles, ces droites sont parallèles. »

Nomme ensuite le polygone obtenu et ses côtés parallèles.

Droites orthogonales

Un angle droit sans point commun

Devine : Un angle droit à distance

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les droites (AB) et (CG) n'ont aucun point commun. Font-elles pourtant « un angle droit » ?

A. Non : sans point commun, il n'y a pas d'angle.

Faux.

On peut déplacer (CG) parallèlement à elle-même jusqu'à B : un angle apparaît.

B. Oui : la parallèle à (CG) par B est perpendiculaire à (AB).

Juste.

Juste : cette parallèle est (BF), et l'angle $\widehat{ABF}$ est droit.

C. Non : elles font un angle de $45°$.

Faux.

Aucun angle de $45°$ n'apparaît : (BF) et (AB) sont deux côtés du carré $ABFE$.

Correction

Par B, la parallèle à (CG) est (BF) : ces droites sont deux côtés opposés du carré $BCGF$.

Dans le carré $ABFE$, (AB) et (BF) sont perpendiculaires. On dira que (AB) et (CG) sont **orthogonales**.

En clair. Dans l'espace, deux droites peuvent former un angle droit sans se toucher. Pour le voir, on les déplace parallèlement à elles-mêmes jusqu'à un même point.

Rappel du collège : dans un plan, deux droites perpendiculaires se coupent en formant un angle droit.

La définition

Définition : Droites orthogonales

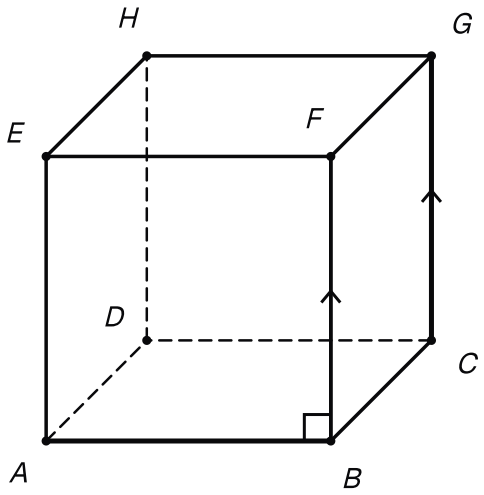
Deux droites (D) et (D') de l'espace sont **orthogonales** si les parallèles à (D) et à (D') menées par un même point sont perpendiculaires (on admet que cela ne dépend pas du point choisi). On note $(D) \perp (D')$.

Deux droites orthogonales et sécantes sont dites **perpendiculaires**.

Exemple : des arêtes orthogonales

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- $(AB) \perp (CG)$: par B, la parallèle à (CG) est (BF), perpendiculaire à (AB) dans le carré $ABFE$.
- $(AB) \perp (EH)$: par A, la parallèle à (EH) est (AD), perpendiculaire à (AB) dans le carré $ABCD$.
- (AB) et (BF) sont orthogonales et sécantes : elles sont **perpendiculaires**.



Les arêtes (AB) et (CG) sont orthogonales : par B, la parallèle (BF) à (CG) fait un angle droit avec (AB).

Attention : orthogonales ou perpendiculaires ?

✗ « Dans le cube $ABCDEFGH$, les droites (AB) et (CG) sont perpendiculaires. »

✓ Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Elles sont orthogonales, mais elles n'ont aucun point commun. Le mot « perpendiculaires » est réservé à deux droites orthogonales **et** sécantes, comme (AB) et (BF).

Attention aussi au dessin : en perspective, les angles droits de l'espace peuvent sembler aigus ou obtus.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Orthogonales sans être perpendiculaires

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Quel couple est formé de droites orthogonales qui ne sont pas perpendiculaires ?

A. (AB) et (BC)

Faux.

Elles sont orthogonales, mais sécantes en B : elles sont perpendiculaires.

B. (AB) et (GH)

Faux.

Elles sont parallèles, toutes deux parallèles à (DC).

C. (AE) et (AG)

Faux.
Elles sont sécantes en A, et l'angle $\widehat{EAG}$ n'est pas droit.

D. (AD) et (BF)

Juste.
Juste : par A, la parallèle à (BF) est (AE), perpendiculaire à (AD).

Correction
Par A, la parallèle à (BF) est (AE), côté opposé du carré $ABFE$. Dans le carré $ADHE$, (AE) et (AD) sont perpendiculaires : donc $(AD) \perp (BF)$.

Ces droites n'ont aucun point commun : elles sont orthogonales sans être perpendiculaires.

À toi : Deux diagonales orthogonales

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit O le centre de la face $ABCD$, point commun de ses diagonales. Montre que les droites (EG) et (BD) sont orthogonales. Sont-elles perpendiculaires ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la définition : choisis le point O, et cherche par O une parallèle à (EG).
Indice 2
Tu sais que $(AC) \parallel (EG)$; et les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
Indice 3
Point délicat : orthogonales ne veut pas dire sécantes ; (EG) est dans la face du haut, (BD) dans celle du bas.

Réponse
Les parallèles menées par O. Par O, la parallèle à (EG) est (AC), car $(AC) \parallel (EG)$ et $O \in (AC)$. La parallèle à (BD) par O est (BD) elle-même.

L'angle droit. Les diagonales du carré $ABCD$ sont perpendiculaires : $(AC) \perp (BD)$. Par définition de deux droites orthogonales, $(EG) \perp (BD)$.

Aucun point commun. Les plans (ABC) et (EFG) n'ont aucun point commun, donc (EG) et (BD) non plus.

Conclusion. Les droites (EG) et (BD) sont orthogonales, mais elles ne sont pas perpendiculaires.

Droite orthogonale à un plan

Un pied de table et le sol

Devine : Un pied de table bien droit

Pour vérifier qu'un pied de table est bien droit sur le sol, on pose une équerre au sol, contre le pied. Combien de directions du sol faut-il contrôler, au minimum ?

A. Une seule direction suffit.

Faux.

Le pied peut faire un angle droit avec une direction et pencher dans une autre.

B. Deux directions parallèles.

Faux.

Deux directions parallèles n'en font qu'une : le pied peut encore pencher.

C. Deux directions qui se croisent.

Juste.

Juste : c'est le critère d'orthogonalité, énoncé plus bas.

D. Toutes les directions du sol, une à une.

Faux.

Il y en a une infinité : un critère évite ce travail impossible.

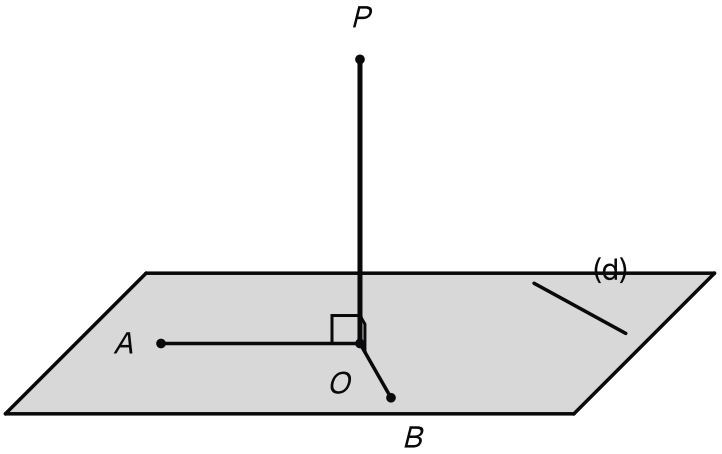
Correction

Une seule direction ne suffit pas : le pied peut pencher dans une direction perpendiculaire. Deux directions parallèles reviennent à une seule.

Deux directions qui se croisent suffisent : c'est le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan.

En clair. Un pied de table bien droit fait un angle droit avec toutes les lignes tracées au sol, même celles qui ne passent pas par son pied. On dit qu'il est **orthogonal** au sol.

Contrôler toutes ces lignes est impossible : le critère qui suit en demande deux.



Un pied droit sur le sol fait un angle droit avec les lignes du sol qui passent par son pied.

Définition et critère

Définition : Droite orthogonale à un plan

Une droite (D) est **orthogonale** à un plan (P) si elle est orthogonale à **toutes** les droites incluses dans (P). On note $(D) \perp (P)$.

Vérifie : Ce que donne la définition

Une droite (D) est orthogonale à un plan (P). Laquelle de ces affirmations est toujours vraie ?

A. (D) est perpendiculaire à toutes les droites de (P).

Faux.

« Perpendiculaires » exige un point commun : une droite de (P) qui ne passe pas par le point de rencontre ne touche pas (D).

B. (D) coupe toutes les droites de (P).

Faux.

(D) ne rencontre (P) qu'en un point : les droites de (P) qui n'y passent pas ne la touchent pas.

C. (D) est orthogonale à toutes les droites de (P).

Juste.

Juste : c'est la définition.

D. (D) est parallèle au plan (P).

Faux.

Une droite orthogonale à un plan le coupe en un point : elle ne lui est pas parallèle.

Correction

Par définition, (D) est orthogonale à toutes les droites de (P), même à celles qui ne la rencontrent pas.

Pour s'en servir, il faut d'abord reconnaître une telle droite. Tester toutes les droites du plan est impossible : le critère qui suit en demande deux.

Théorème : Critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Si une droite (D) est orthogonale à **deux droites sécantes** incluses dans un plan (P), alors (D) est orthogonale à (P).

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Sa preuve dépasse les outils de ce chapitre.

Vérifie : Ce que donne le critère

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. La droite (CG) est orthogonale à (CB) et à (CD), deux droites sécantes du plan (ABC). Que permet de conclure le critère ?

A. $(CG) \perp (ABC)$

Juste.

Juste : deux droites sécantes du plan suffisent.

B. $(CG) \perp (BCG)$

Faux.

(CG) est incluse dans (BCG) : elle ne peut pas lui être orthogonale.

C. $(CG) \parallel (ABC)$

Faux.

(CG) coupe (ABC) en C : elle ne lui est pas parallèle.

D. Rien : il faudrait trois droites du plan.

Faux.

Deux droites sécantes du plan suffisent : c'est tout l'intérêt du critère.

Correction

Les droites (CB) et (CD) sont sécantes en C et incluses dans (ABC). La droite (CG) est orthogonale à chacune, dans les carrés $BCGF$ et $DCGH$.

D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(CG) \perp (ABC)$.

Méthode : droite orthogonale à un plan

Méthode : montrer qu'une droite est orthogonale à un plan

1. **Choisis** dans le plan deux droites **sécantes**, de préférence passant par un même point connu.
2. **Démontre** que la droite donnée est orthogonale à chacune : angle droit d'une face, diagonales d'un carré, médiane d'un triangle isocèle.
3. **Conclus** en citant le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Rappel du collège : dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur et la médiatrice de la base.

Exemple : une arête, une face, une longueur

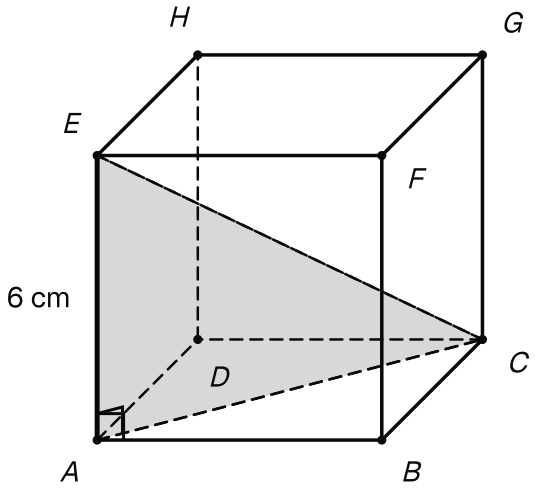
On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

L'arête $[AE]$ et la base. $(AE) \perp (AB)$ dans le carré $ABFE$, et $(AE) \perp (AD)$ dans le carré $ADHE$. Ces droites sont sécantes en A et incluses dans (ABC). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(AE) \perp (ABC)$. C'est pourquoi $[AE]$ est la hauteur de la pyramide $EABCD$.

La longueur EC. Comme $(AC) \subset (ABC)$, on a $(AE) \perp (AC)$ par définition : le triangle EAC est rectangle en A. Dans le triangle ABC, rectangle en B, le théorème de Pythagore donne $AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$. Le même théorème dans le triangle EAC donne :

$$EC^2 = 36 + 72 = 108$$

Ainsi $EC = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm.



L'arête (AE) est orthogonale aux droites sécantes (AB) et (AD), donc au plan (ABC) ; le triangle EAC est rectangle en A.

Deux droites orthogonales

Méthode : montrer que deux droites sont orthogonales

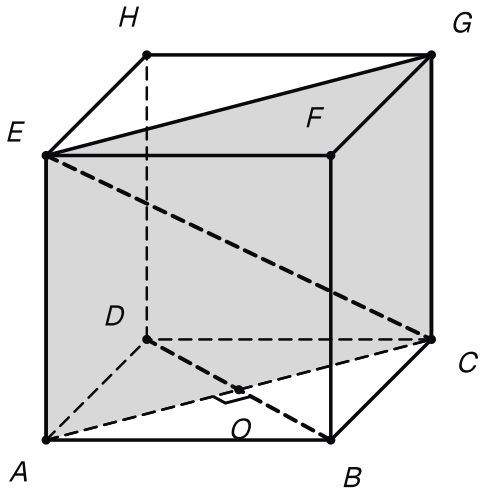
1. **Trouve** un plan qui contient l'une des deux droites, et auquel l'autre semble orthogonale.
2. **Démontre** cette orthogonalité avec la méthode précédente.
3. **Conclus** : une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Exemple : une diagonale de face et une grande diagonale

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Montrons que $(BD) \perp (EC)$.

- $(BD) \perp (AC)$: ce sont les diagonales du carré $ABCD$.

- $(AE) \perp (ABC)$ et $(BD) \subset (ABC)$, donc $(BD) \perp (AE)$.
- (AC) et (AE) sont sécantes en A et incluses dans (ACE). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(BD) \perp (ACE)$.
- Or $(EC) \subset (ACE)$. Donc $(BD) \perp (EC)$.



La diagonale (BD) est orthogonale au plan (ACE), qui contient la grande diagonale (EC).

Attention : deux droites parallèles ne suffisent pas

✗ « Dans le cube $ABCDEFGH$, (AH) est orthogonale à (AB) et à (DC), deux droites du plan (ABC). Donc $(AH) \perp (ABC)$. »

✓ Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les droites (AB) et (DC) sont parallèles, pas sécantes : le critère ne s'applique pas.

D'ailleurs, (AH) n'est pas orthogonale à (AD). En effet, $[AH]$ est une diagonale du carré $ADHE$, et l'angle $\widehat{DAH}$ vaut $45°$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une grande diagonale orthogonale

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Montre que (EG) est orthogonale au plan (BFH), puis que $(EG) \perp (BH)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : cherche dans (BFH) deux droites sécantes orthogonales à (EG), par exemple (FH) et (BF).

Indice 2

(FH) et (EG) sont les diagonales du carré $EFGH$; pour (BF), montre d'abord que $(BF) \perp (EFG)$.

Indice 3

Point délicat : (BH) doit être incluse dans (BFH) ; c'est le cas, car B et H sont dans ce plan.

Réponse

La droite (BF). $(BF) \perp (FE)$ dans le carré $ABFE$, et $(BF) \perp (FG)$ dans le carré $BCGF$. Ces droites sont sécantes en F et incluses dans (EFG). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(BF) \perp (EFG)$. Comme $(EG) \subset (EFG)$, on en déduit $(BF) \perp (EG)$.

Le plan (BFH). De plus, $(FH) \perp (EG)$: ce sont les diagonales du carré $EFGH$. Les droites (BF) et (FH) sont sécantes en F et incluses dans (BFH). Par le même critère, $(EG) \perp (BFH)$.

La droite (BH). Les points B et H sont dans (BFH), donc $(BH) \subset (BFH)$. Par définition d'une droite orthogonale à un plan, $(EG) \perp (BH)$.

Conclusion. La droite (EG) est orthogonale au plan (BFH), et elle est orthogonale à (BH).

Remarque **: Coin devoir : rédiger une orthogonalité**

En devoir, la rédaction nomme les deux droites sécantes et le critère. Pour l'arête $[AE]$ de l'exemple, écris :

« $(AE) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (AD)$. Or (AB) et (AD) sont deux droites sécantes du plan (ABC). D'après le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, $(AE) \perp (ABC)$. »

Vérifie toujours que les deux droites sont **sécantes**.

Parallélisme, orthogonalité et plans perpendiculaires

Des piliers verticaux

Devine : Deux piliers

Deux piliers bien droits sont tous les deux orthogonaux au sol d'une pièce. Comment sont-ils l'un par rapport à l'autre ?

A. Sécants, s'ils sont assez longs.

Faux.

Deux piliers droits ne se rejoignent jamais, même très longs.

B. Orthogonaux.

Faux.

Ils ont la même direction, la verticale : aucun angle droit entre eux.

C. Parallèles.

Juste.

Juste : deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

D. On ne peut rien dire.

Faux.

Le résultat qui suit permet de conclure.

Correction

Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles : c'est le troisième point du résultat qui suit.

Les deux piliers ont la même direction, celle qui est orthogonale au sol.

En clair. Les piliers d'une pièce, tous orthogonaux au sol, sont parallèles entre eux. Le sol et le plafond, tous deux orthogonaux à un même pilier, sont parallèles. Parallélisme et orthogonalité sont liés : le résultat qui suit rassemble ces liens.

Parallélisme et orthogonalité

Propriété : Parallélisme et orthogonalité

1. Par un point donné passe un **seul** plan orthogonal à une droite donnée, et une **seule** droite orthogonale à un plan donné.
2. Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
3. Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
4. Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
5. Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Chacun de ses points se retrouve sur les piliers et le sol d'une pièce.

Exemple : les arêtes verticales du cube

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On sait que $(AE) \perp (ABC)$.

- $(AE) \parallel (CG)$. D'après le résultat sur le parallélisme et l'orthogonalité, point 2, le plan (ABC), orthogonal à (AE), est orthogonal à (CG).

- De même, $(BF) \perp (ABC)$ et $(DH) \perp (ABC)$.
- Inversement, (BF) et (DH) sont orthogonales au même plan (ABC) : d'après le point 3, elles sont parallèles.

Vérifie : Le bon argument

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. On sait que $(AE) \perp (ABC)$. Quel argument donne $(AE) \perp (EFG)$?

A. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

Juste.
Juste : toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

B. Les droites (AE) et (CG) sont parallèles.

Faux.
C'est vrai, mais cela parle de (CG), pas du plan (EFG).

C. La droite (AE) est incluse dans (ABF).

Faux.
Le plan (ABF) n'intervient pas dans la question.

D. Le plan (EFG) contient le point E.

Faux.
Un point commun ne donne aucune orthogonalité.

Correction
Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles, d'après le critère de parallélisme de deux plans.

D'après le résultat sur le parallélisme et l'orthogonalité, point 4, une droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre : $(AE) \perp (EFG)$.

Plans perpendiculaires

Un mur contient un pilier orthogonal au sol. On dit que le mur et le sol sont **perpendiculaires**. Pour deux plans, ce mot a donc un sens précis : l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

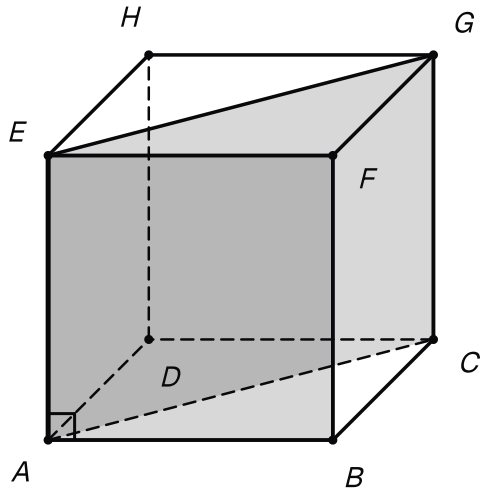
Définition : Plans perpendiculaires

Un plan (P) est **perpendiculaire** à un plan (Q) si (P) contient une droite orthogonale à (Q). On admet qu'alors (Q) est aussi perpendiculaire à (P) : on dit que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires, et on note $(P) \perp (Q)$.

Exemple : des plans perpendiculaires à la face du bas

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

- Le plan (ABF) contient (AE), orthogonale à (ABC) : par définition, $(ABF) \perp (ABC)$.
- Le plan (ACG) contient aussi (AE), car il contient E : donc $(ACG) \perp (ABC)$. Un plan diagonal peut être perpendiculaire à une face.



Les plans (ABF) et (ACG) contiennent tous deux l'arête (AE), orthogonale au plan (ABC).

Attention : perpendiculaires à un même plan

✗ « Dans le cube $ABCDEFGH$, $(ABF) \perp (ABC)$ et $(ADH) \perp (ABC)$. Donc $(ABF) \parallel (ADH)$. »

✓ Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Les plans (ABF) et (ADH) sont sécants selon (AE) : ils ne sont pas parallèles.

Comme deux murs voisins d'une pièce, deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas forcément parallèles.

Vérifie : Lequel est perpendiculaire ?

On reprend le cube $ABCDEFGH$. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Lequel de ces plans est perpendiculaire au plan (ABC) ?

A. Le plan (EFG)

Faux.

Il est parallèle à (ABC), pas perpendiculaire.

B. Le plan (ACH)

Faux.
Il contient H, mais pas D : il ne contient pas (DH), la droite orthogonale à (ABC) menée par H. Il est penché.

C. Le plan (BEG)

Faux.
Il contient E, mais pas A : la droite orthogonale à (ABC) menée par E est (AE), et elle n'est pas dans ce plan. Il est penché.

D. Le plan (BDH)

Juste.
Juste : il contient (DH), orthogonale à (ABC).

Correction
Le plan (BDH) contient la droite (DH). Comme (AE), l'arête (DH) est orthogonale à (ABC). Par définition de deux plans perpendiculaires, $(BDH) \perp (ABC)$.

Calculer une longueur, puis à toi

Exemple : une longueur dans un plan perpendiculaire

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit M le milieu de $[AB]$. Calculons MG.

Un triangle rectangle. Le plan (MCG) contient (CG), orthogonale à (ABC) : par définition, il est perpendiculaire à (ABC). Comme $(CG) \perp (ABC)$ et $(MC) \subset (ABC)$, on a $(CG) \perp (MC)$ par définition : le triangle MCG est rectangle en C.

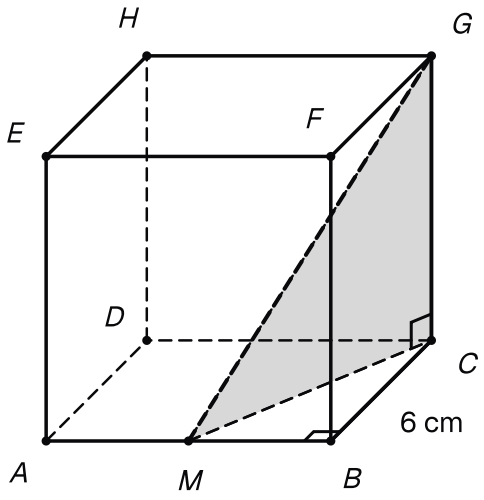
La longueur MC. Le triangle MBC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$MC^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

La longueur MG. Le même théorème dans le triangle MCG, rectangle en C, donne :

$$MG^2 = 45 + 6^2 = 81$$

Donc $MG = 9$ cm.



Le triangle MCG, dans un plan perpendiculaire à la face du bas, est rectangle en C.

À toi : Du sommet au centre

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. Sa face du bas est $ABCD$, sa face du haut $EFGH$; E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D. Soit O le centre de la face $ABCD$. Montre que le plan (AEO) est perpendiculaire à (ABC), puis calcule EO. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le plan (AEO) contient l'arête (AE).
Indice 2
Calcule d'abord AC, puis AO, la moitié de AC.
Indice 3
Point délicat : le triangle EAO est rectangle en A, et non en O.

Réponse
Les plans perpendiculaires. Le plan (AEO) contient (AE), orthogonale à (ABC) : par définition, $(AEO) \perp (ABC)$.

Un triangle rectangle. Comme $(AO) \subset (ABC)$, on a $(AE) \perp (AO)$: le triangle EAO est rectangle en A.

La longueur AO. Le triangle ABC est rectangle en B : d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 36 + 36 = 72$. Donc $AC = 6\sqrt{2}$ cm. Le point O est le milieu de la diagonale $[AC]$: $AO = 3\sqrt{2}$ cm.

La longueur EO. Le même théorème dans le triangle EAO donne :

$$EO^2 = 36 + 18 = 54$$

Conclusion. Le plan (AEO) est perpendiculaire au plan (ABC), et $EO = 3\sqrt{6} \approx 7{,}35$ cm.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel énoncé pour quelle question

- **Une droite dans un plan** : deux de ses points dans le plan, par le troisième axiome d'incidence.
- **Un plan** : trois points non alignés ; une droite plus un point extérieur ; deux droites sécantes ; deux droites strictement parallèles.
- **Une droite parallèle à un plan** : une droite du plan qui lui est parallèle.
- **Deux plans parallèles** : deux droites sécantes de l'un, parallèles à l'autre.
- **Des traces parallèles** : un plan qui coupe deux plans parallèles.
- **L'intersection de deux plans** : deux points communs, ou un point et le théorème du toit.

À retenir : sections, orthogonalité, calculs

- **Une section plane** : relie les points du plan de coupe face par face ; sur deux faces parallèles, ses côtés sont parallèles.
- **Une droite orthogonale à un plan** : deux droites sécantes du plan.
- **Deux droites orthogonales** : l'une orthogonale à un plan qui contient l'autre.
- **Deux plans perpendiculaires** : l'un contient une droite orthogonale à l'autre.
- **Une longueur** : un triangle rectangle dans un plan bien choisi, puis le théorème de Pythagore.
- **Un volume** : les formules du collège, avec la bonne hauteur.

Le mot du prof. En géométrie dans l'espace, observe d'abord, puis justifie : chaque affirmation nomme l'énoncé qui la permet.

Contrôle aussi les hypothèses : des droites sécantes, un parallélisme strict, une droite incluse dans le plan.

Quand une figure t'échappe, cherche un plan où la géométrie du collège s'applique.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Géométrie dans l'espace » (tc · sciences · mathematiques)