BURHAN

Résumé : Généralités sur les fonctions numériques

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 2

Fonction, image, ensemble de définition

Définition : Fonction numérique, image, antécédent

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction numérique** f sur D, c'est associer à **chaque** réel x de D un **seul** réel, noté $f(x)$. On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

- x s'appelle la **variable** ; le réel $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f.
- Si $f(a) = b$, on dit que a est **un antécédent** de b par f.

Une fonction peut être donnée par une expression, par un tableau de valeurs ou par une courbe.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x$. Calcule l'image de 3, puis cherche les antécédents de 0.

Image. $f(3) = 9 - 6 = 3$.

Antécédents de 0. On résout $x^2 - 2x = 0$, soit $x(x-2) = 0$. Par la règle du produit nul : $x = 0$ ou $x = 2$.

Conclusion. Le réel 0 a deux antécédents par f : 0 et 2.

Attention : Un antécédent, pas forcément le seul

Avec la même fonction, $f(-1) = 1 + 2 = 3$ et $f(3) = 3$. Le réel 3 a donc au moins deux antécédents.

Écrire « l'antécédent de 3 est 3 » oublie le réel -1. Dis « un antécédent » tant que tu n'as pas trouvé tous les antécédents.

Définition : Ensemble de définition d'une fonction

L'**ensemble de définition** d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des réels qui ont une image par f.

Lorsque f est donnée par une expression, sans autre précision, D_f est l'ensemble des réels x pour lesquels cette expression a un sens. En particulier :

- un dénominateur ne doit pas s'annuler ;
- un nombre placé sous une racine carrée doit être positif ou nul.

Méthode : trouver un ensemble de définition

1. **Cherche** les fractions et les racines carrées dans l'expression.
2. **Pose** une condition par obstacle : dénominateur $\neq 0$, nombre sous la racine ≥ 0.
3. **Résous** chaque condition, puis garde les réels qui les vérifient toutes.
4. **Écris** D_f avec des intervalles. S'il n'y a aucun obstacle, $D_f = \mathbb{R}$.

Exemple

Énoncé. Détermine l'ensemble de définition de $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-4}$.

Racine. Il faut $x + 5 \geq 0$, soit $x \geq -5$.

Dénominateur. Il faut $x - 4 \neq 0$, soit $x \neq 4$.

Conclusion. Les deux conditions doivent être vraies en même temps :

$$D_g = [-5; 4[\cup]4; +\infty[.$$

Égalité de deux fonctions ; courbe représentative

Définition : Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** lorsque :

- elles ont le **même** ensemble de définition : $D_f = D_g$;
- pour tout x de D_f, $f(x) = g(x)$.

On écrit alors $f = g$.

Méthode : comparer deux fonctions

1. **Compare** d'abord D_f et D_g : s'ils diffèrent, la réponse est non.
2. **Transforme** ensuite $f(x)$ pour retrouver $g(x)$, pour tout x de D_f.
3. **Pour conclure** $f \neq g$ avec $D_f = D_g$, exhibe un réel a tel que $f(a) \neq g(a)$.

Exemple

Énoncé. Les fonctions $f : x \mapsto (x+3)^2 - (x-3)^2$ et $g : x \mapsto 12x$ sont-elles égales ?

Ensembles. Aucune fraction, aucune racine : $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Expressions. Pour tout réel x, on développe avec les identités remarquables :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 6x + 9) \\ &\quad - (x^2 - 6x + 9) \\ &= 12x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $f = g$.

Attention : Deux fonctions égales ont le même ensemble de définition

Soit $f : x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : x \mapsto x$. Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = x = g(x)$.

Pourtant $D_f = [0; +\infty[$ et $D_g = \mathbb{R}$: les fonctions ne sont pas égales. Par exemple, -4 a une image par g, mais pas par f.

Définition : Courbe représentative d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La **courbe représentative** de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ lorsque x parcourt D_f.

Ainsi, un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x \in D_f$ et $y = f(x)$. On dit que $y = f(x)$ est une **équation** de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Méthode : lire une image ou des antécédents

1. **Pour l'image de** a, pars du point d'abscisse a sur l'axe des abscisses, monte jusqu'à la courbe, puis lis l'ordonnée.
2. **Pour les antécédents de** b, trace la droite d'équation $y = b$ et relève l'abscisse de chacun de ses points communs avec la courbe.
3. **Donne** les valeurs lues comme approchées, avec $\approx$, sauf si un calcul les confirme.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x$. Les points $A(-2, 9)$ et $B(4, 8)$ sont-ils sur $\mathcal{C}_f$?

Point A. $f(-2) = 4 + 4 = 8$, et $8 \neq 9$: A n'est pas sur $\mathcal{C}_f$.

Point B. $f(4) = 16 - 8 = 8$: B est sur $\mathcal{C}_f$.

Parité

Définition : Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

- f est **paire** lorsque, pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** lorsque, pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La condition « pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ » signifie que D_f est **symétrique par rapport à** 0.

Méthode : étudier une parité

1. **Contrôle** l'ensemble de définition : s'il n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction n'est ni paire ni impaire.
2. **Calcule** $f(-x)$ et simplifie.
3. **Compare** le résultat à $f(x)$, puis à $-f(x)$.
4. **Pour réfuter** une parité, un seul réel a suffit : compare $f(-a)$ à $f(a)$ et à $-f(a)$.

Exemple

Fonction impaire. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$. Comme $x^2+4>0$, $D_f = \mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(-x)^2+4} \\ &= -\frac{x}{x^2+4} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

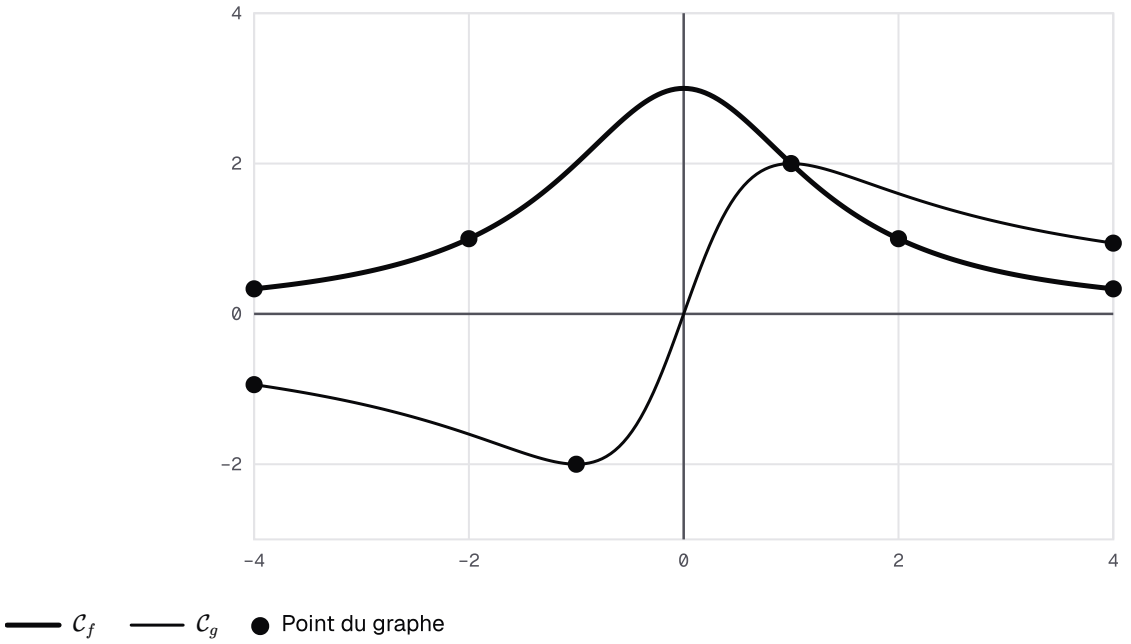
Ni paire ni impaire. Soit $h : x \mapsto x^2+2x$, définie sur $\mathbb{R}$. On a $h(1)=3$ et $h(-1)=-1$.

Or $-1 \neq 3$, donc h n'est pas paire ; et $-1 \neq -3$, donc h n'est pas impaire.

Propriété : Interprétation graphique de la parité

Le plan est rapporté à un repère **orthogonal** $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.

- f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



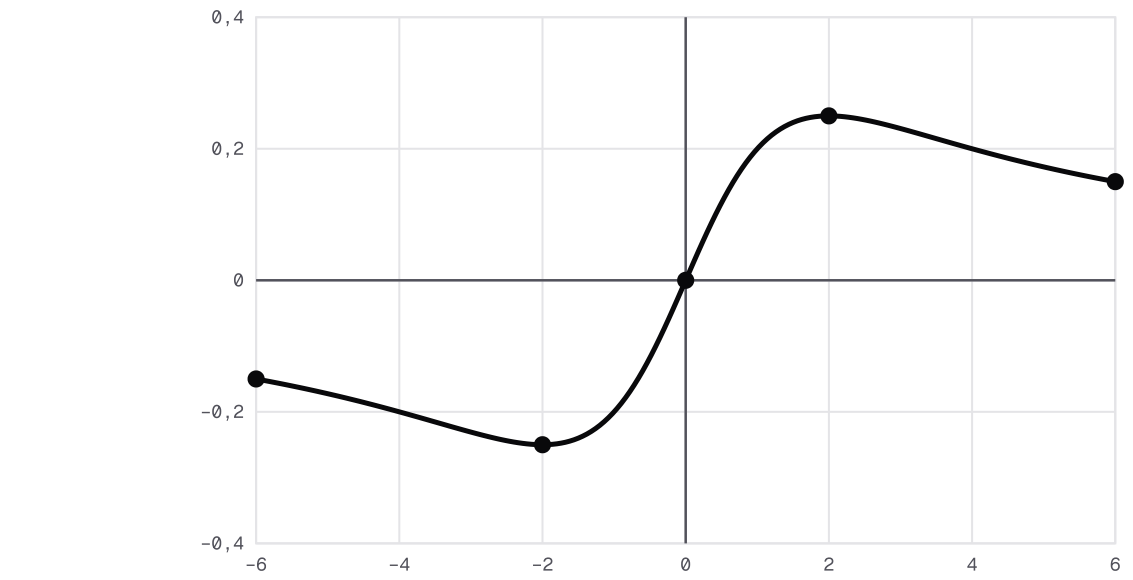
Une courbe paire, reflet d'elle-même par rapport à l'axe des ordonnées, et une courbe impaire, invariante par le demi-tour de centre O.

Exemple

Énoncé. Le repère est orthogonal. Avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$, place un second point de $\mathcal{C}_f$ à partir de $M\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$.

Réponse. $f(2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, donc M est sur $\mathcal{C}_f$.

La fonction f est impaire : $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. Le point $M'\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right)$, symétrique de M par rapport à O, est donc aussi sur $\mathcal{C}_f$.



La courbe de x ↦ x/(x² + 4), le point M d'abscisse 2 et son symétrique M' par rapport à l'origine.

Attention : L'ensemble de définition avant le calcul

Soit $f : x \mapsto x^2$, définie seulement sur $[-1; 2]$. Le réel 2 est dans cet intervalle, mais pas -2 : l'ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0. Cette fonction n'est donc ni paire ni impaire.

Retiens aussi qu'une fonction qui n'est pas paire n'est pas forcément impaire.

Sens de variation

Définition : Sens de variation sur un intervalle

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$).
- f est **constante** sur I lorsque $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous x_1 et x_2 de I.

Une fonction croissante sur I, ou décroissante sur I, est dite **monotone** sur I.

Propriété : Taux de variation et sens de variation

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f. Pour deux réels **distincts** x_1 et x_2 de I, le **taux de variation** de f entre x_1 et x_2 est le réel :

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T \geq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $T \leq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

De même, f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T > 0$ (respectivement $T < 0$) pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

Méthode : le sens de variation par le taux

1. **Choisis** deux réels distincts x_1 et x_2 dans l'intervalle I.
2. **Écris** $f(x_1) - f(x_2)$ et factorise-le par $x_1 - x_2$.
3. **Simplifie** le taux T, puis cherche son signe à l'aide des propriétés de l'ordre.
4. **Conclus** avec la propriété du taux de variation, en nommant l'intervalle.

Exemple

Énoncé. Étudie le sens de variation de $f : x \mapsto x^4$ sur $[0; +\infty[$.

Factorisation. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0; +\infty[$. On applique deux fois l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} & x_1^4 - x_2^4 \\ &= (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ &\quad \times (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Taux. On simplifie par $x_1 - x_2$, qui n'est pas nul :

$$T = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Signe. Les réels x_1 et x_2 sont positifs ou nuls et ne sont pas tous deux nuls. Les deux facteurs sont donc strictement positifs, et $T > 0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Méthode : dresser un tableau de variations

1. **Suis** la courbe de la gauche vers la droite et note où elle change de sens.
2. **Recopie** ces abscisses et les bornes de l'ensemble de définition sur la ligne de x.
3. **Dessine** une flèche ↗ quand la courbe monte, une flèche ↘ quand elle descend.
4. **Inscris** les images au bout de chaque flèche.

Exemple

Énoncé. La courbe d'une fonction f définie sur $[-3;5]$ descend du point $(-3,4)$ au point $(1,-2)$. Elle monte ensuite jusqu'au point $(5,3)$. Dresse le tableau de variations de f.

Tableau.

x	-3		1		5
variations de f	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Attention : Un sens de variation sur un intervalle

Pour la fonction du tableau précédent, $f(-3)=4$ et $f(5)=3$. Ces deux valeurs ne disent pas que f est décroissante sur $[-3;5]$: elle monte sur $[1;5]$.

Un sens de variation s'annonce toujours avec son intervalle.

Parité et sens de variation

Propriété : Parité et sens de variation

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. Soit I un intervalle inclus dans D_f et formé de réels positifs ou nuls, sur lequel f est **monotone**. Soit J l'intervalle formé des opposés des éléments de I.

- Si f est **paire**, f est monotone sur J, de sens **contraire** à son sens sur I.
- Si f est **impaire**, f est monotone sur J, de **même** sens que sur I.

Si f est strictement monotone sur I, elle l'est aussi sur J.

Exemple

Énoncé. Dresse le tableau de variations de $f : x \mapsto x^4$ sur $[-2;2]$.

Parité. $D_f=\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et $(-x)^4=x^4$ pour tout réel x : f est paire.

Variations. D'après l'exemple précédent, f est croissante sur $[0;2]$. Comme f est paire, la propriété « parité et sens de variation » donne le sens contraire sur $[-2;0]$: f y est décroissante.

Tableau. On a $f(-2)=f(2)=16$ et $f(0)=0$:

x	-2		0		2
variations de f	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

> **À retenir : La parité fait la moitié du travail**
>
> Quand une fonction est paire ou impaire, étudie-la d'abord sur les réels positifs. La parité donne ensuite le sens de variation sur les réels négatifs.
>
> Pour une fonction paire, le sens s'inverse ; pour une fonction impaire, il se conserve.

Maximum et minimum

Définition : Maximum, minimum sur un intervalle

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$.

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**. On dit qu'il est **atteint** en a.

Propriété : Extremum et changement de sens de variation

Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a;c]$.

- Si f est croissante sur $[a;b]$ et décroissante sur $[b;c]$, alors $f(b)$ est le maximum de f sur $[a;c]$.
- Si f est décroissante sur $[a;b]$ et croissante sur $[b;c]$, alors $f(b)$ est le minimum de f sur $[a;c]$.

Méthode : trouver un extremum

1. **Sur une courbe ou un tableau**, cherche où la fonction passe de la hausse à la baisse (maximum) ou de la baisse à la hausse (minimum). Compare aussi avec les images aux bornes.
2. **Par le calcul**, devine la valeur $f(a)$, puis étudie le signe de $f(x) - f(a)$ sur l'intervalle.
3. **Conclus** en donnant trois informations : l'intervalle, la valeur, le réel qui la réalise.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto 5 - |2x - 4|$, définie sur $\mathbb{R}$. Montre que 5 est le maximum de f.

Valeur atteinte. $f(2) = 5 - |0| = 5$.

Signe. Pour tout réel x :

$$f(x) - 5 = -|2x - 4|.$$

Une valeur absolue est positive ou nulle, donc $f(x) - 5 \leq 0$, soit $f(x) \leq f(2)$.

Conclusion. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 5, atteint en 2.

Exemple

Énoncé. On reprend le tableau de la fonction f définie sur $[-3;5]$: 4, puis $\searrow$ jusqu'à -2 en 1, puis $\nearrow$ jusqu'à 3. Donne ses extremums.

Minimum. f est décroissante sur $[-3;1]$ et croissante sur $[1;5]$. Le sens change en 1 : son minimum sur $[-3;5]$ est donc $f(1) = -2$.

Maximum.

- Sur $[-3;1]$, f est décroissante, donc $f(x) \leq f(-3) = 4$.
- Sur $[1;5]$, f est croissante, donc $f(x) \leq f(5) = 3$.

Comme $3 < 4$, on a $f(x) \leq 4$ pour tout x de $[-3;5]$, et $f(-3) = 4$. Le maximum vaut 4, atteint en -3.

Attention : Un majorant n'est pas toujours un maximum

Sur $]0;2[$, la fonction $x \mapsto 2x$ vérifie $2x \leq 4$. Pourtant 4 n'est pas un maximum : il faudrait $2x = 4$, soit $x = 2$, qui n'est pas dans $]0;2[$.

Un maximum est toujours une image, atteinte en un réel de l'intervalle. Ici, la fonction n'a pas de maximum.

Résolution graphique

Propriété : Résolution graphique d'une équation, d'une inéquation

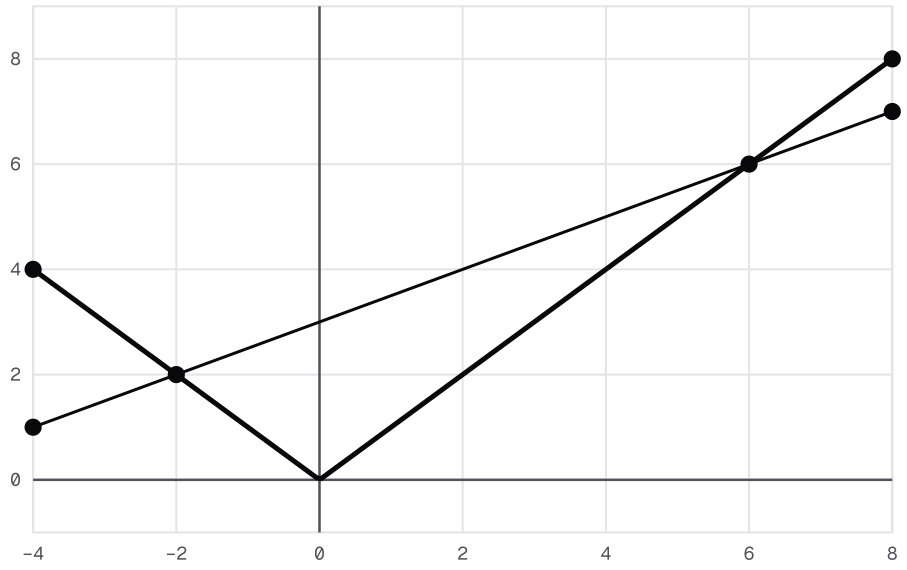
Le plan est rapporté à un repère dont l'axe des ordonnées est orienté vers le haut. Soit f et g deux fonctions, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et k un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les réels x de $D_f \cap D_g$ pour lesquels le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est **strictement au-dessus** du point de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.
- Les solutions de $f(x) \geq g(x)$ sont les solutions de $f(x) > g(x)$ et celles de $f(x) = g(x)$.
- On résout de même $f(x) < g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$ avec les points situés au-dessous.
- Avec la droite d'équation $y = k$ à la place de $\mathcal{C}_g$, on résout de même $f(x) = k$, $f(x) > k$ et les autres inéquations.

Méthode : résoudre sur un graphique

1. **Identifie** les deux courbes, ou la courbe et la droite d'équation $y = k$.
2. **Pour une équation**, relève les abscisses des points d'intersection.

3. **Pour une inéquation**, repère où une courbe passe au-dessus de l'autre et lis les abscisses. Inclus les points d'intersection pour $\geq$ ou $\leq$; exclus-les pour $>$ ou $<$.
4. **Contrôle** par le calcul les valeurs lues, quand c'est possible ; la calculatrice aide à obtenir une valeur approchée.
5. **Conclus** seulement sur l'intervalle où les courbes sont tracées.



La courbe de f : x ↦ |x| et la droite de g : x ↦ x/2 + 3

Exemple

Énoncé. Avec $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 3$, résous $f(x) = g(x)$, puis $f(x) \leq g(x)$, sur $[-4; 8]$.

Lecture. Les courbes se coupent aux points d'abscisses -2 et 6.

Contrôle.

- $|-2| = 2$ et $-1 + 3 = 2$;
- $|6| = 6$ et $3 + 3 = 6$.

Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont -2 et 6.

Inéquation. Le V est au-dessous de la droite entre -2 et 6. L'inégalité est large : les bornes sont comprises. L'ensemble des solutions de $f(x) \leq g(x)$ est $[-2; 6]$.

Attention : Bornes et valeurs approchées

Dans l'exemple précédent, l'inéquation stricte $f(x) < g(x)$ a pour solutions $]-2;6[$: en -2 et en 6, il y a égalité. Les crochets changent avec le symbole.

Quand une abscisse lue n'est pas entière, écris-la avec $\approx$ et contrôle-la par le calcul.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Trouver une image** : remplace x par sa valeur.
- **Trouver des antécédents** : résous une équation, ou coupe la courbe par une droite horizontale.
- **Trouver l'ensemble de définition** : les dénominateurs et les racines carrées.
- **Comparer deux fonctions** : les ensembles de définition, puis les expressions.
- **Étudier une parité** : un ensemble symétrique, puis $f(-x)$.
- **Étudier les variations** : la lecture de la courbe, ou le signe de T.
- **Trouver un extremum** : le tableau de variations, ou le signe de $f(x) - f(a)$.
- **Résoudre graphiquement** : les points d'intersection et les positions des courbes.

Point de la courbe

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \text{ si et seulement si } x \in D_f \text{ et } y = f(x)$$

Fonction paire, ensemble symétrique

$$f(-x) = f(x)$$

Fonction impaire, ensemble symétrique

$$f(-x) = -f(x)$$

Taux de variation, deux réels distincts

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Maximum sur I, atteint en a

$$f(x) \leq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

Minimum sur I, atteint en a

$$f(x) \geq f(a) \text{ pour tout } x \in I$$

À retenir : Rédiger en devoir

- Écris chaque condition avant de la résoudre.
- Nomme la propriété employée : « d'après la propriété du taux de variation ».
- Donne toujours l'intervalle d'un sens de variation ou d'un extremum.
- Écris une valeur lue sur une courbe avec $\approx$.
- Termine par une phrase de conclusion.